第一篇
光与原子相互作用的基本理论

引　言

我们假定读者均熟悉量子力学的基本理论，所以本篇第一章只概述量子力学描述的三种绘景，对量子力学的基本原理也只作简要回顾，主要希望通过这一章的学习，明确采用不同绘景描述量子系统有其不同的目的和特征. 此外，由于密度矩阵理论在量子光学中应用极为普遍，所以，在这里我们对这一基本量子理论也作了简要的阐明. 为了展开对光与原子相互作用理论的研究，我们在第二章中引进了二能级原子的概念，它虽是实际原子的理想模型，然而却是被广泛采用的典型的理论模型. 所以关于二能级原子的量子描述以及它和辐射场相互作用的运动方程——光学布洛赫方程——均有十分重要的理论意义，在第二章中对此作了较为详细的论述. 量子理论中如何表示光场的问题是一个必须从概念上明确的问题，在第三章中，我们首先概述了真空中电磁场的经典描述，然后通过辐射场的量子化引入了描述光场的力学量和算符，接着又集中介绍了描述光场的几种态函数，它们可以从不同侧面展现光场的物理性质. 由于在现代量子光学理论中，描述光场与原子相互作用系统最常用的理论模型有狄克模式和 Jaynes-Cummings (J-C)模型，所以我们在第四章中对这两种典型理论模型作了专门介绍，读者将会发现，它们在理论上有极为广泛的应用. 本篇的最后一章我们以小系统与库耦合的量子系统为典型，论述量子光学中量子统计的基本理论. 这一章除了介绍郎之万理论和福克尔-普朗克方程以外，还对量子谐振子满足的主方程以及量子谐振子的特征函数与准概率分布等等都作了专门论述.

第一章　量子力学描述的三种绘景

在量子力学中，对同一量子系统的描述，可以采用三种不同的绘景，即薛定谔绘景、海森伯绘景和相互作用绘景. 这同对经典质点的描述可以采用坐标基矢不变而态矢随时间改变的描述方式、也可采用态矢不变而坐标基矢随时间改变的描述方式相似，显然这两种描述方式的数学表示是不同的，但它们所描述质点的客观运动规律是相同的. 量子力学中，对于系统采用三种不同的绘景，意味着三种不相同的描述方式. 当三者描述同一客体时，其反映的微观客体运动规律应是同一的. 因此三种绘景具有严格的对应关系，可以互相转化. 究竟采用何种绘景描述量子系统，要根据系统的特征，选取最易揭示其物理特性，最方便求解的绘景来描述. 下面，我们对三种绘景作一简单的概述.

第一节　薛定谔绘景

在量子力学中，对一个系统（例如一个原子，或一个与单模光场相互作用的原子，或两个原子与双模光场相互作用等等）进行描述时，通常假设系统的状态可以用态函数$|\Psi(t)\rangle$来表示. 如果系统是单个微观粒子，它可以用态函数$|\Psi(\boldsymbol{r},t)\rangle$描述，其中$\boldsymbol{r}$表示系统（微观粒子）的空间坐标，$t$为时间坐标. 当知道系统态函数的确切表示以后，就可以知道系统的时间演化状态，例如可以知道时刻t在点$\boldsymbol{r}$处发现该微观粒子的概率，其定义为$\langle\Psi(\boldsymbol{r},t)|\Psi(\boldsymbol{r},t)\rangle$. 因此，在$\boldsymbol{r}$处在体元$d^3r=dxdydz$中于$t$时刻发现该粒子的概率是$\langle\Psi(\boldsymbol{r},t)|\Psi(\boldsymbol{r},t)\rangle d^3\boldsymbol{r}$. 由于粒子在整个空间区域被发现的概率应等于1，所以态函数应满足归一化条件，即

$$\int \langle \Psi(\boldsymbol{r},t) | \Psi(\boldsymbol{r},t) \rangle d^3\boldsymbol{r} = 1 \tag{1.1.1}$$

量子力学的另一个基本假定是：系统的物理量 A 由算符表示，如坐标、动量、角动量、自旋等等. 物理量的可观测性要求算符是本征值为实数的线性算符，即厄米算符. 任一厄米算符 A 都满足相应的本征值方程

$$A|u_n\rangle = \lambda_n |u_n\rangle \tag{1.1.2}$$

其中，$|u_n\rangle$ 为厄米算符 A 的本征函数，λ_n 为相应的本征值. 厄米算符具有三个重要的性质：(1)厄米算符的本征值 λ_n 都是实数；(2)厄米算符的属于不同本征值的两个本征态矢 $|u_n\rangle$ 和 $|u_m\rangle$ $(n\neq m)$ 相互正交；(3)厄米算符的本征态矢构成一个完备集 $\{|u_n\rangle\}$，这一性质使系统的任意态矢 $|\Psi\rangle$ 都可以按这一本征态矢集展开：

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n |u_n\rangle\langle u_n|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)|u_n\rangle \tag{1.1.3a}$$

其中

$$C_n(t) = \langle u_n | \Psi(t)\rangle \tag{1.1.3b}$$

表示系统在 $|\Psi(t)\rangle$ 时处于本征态 $|u_n\rangle$ 的概率幅. 这样，我们就可以利用物理量算符 A 的本征态矢集 $\{|u_n\rangle\}$ 的线性叠加来表述一个量子系统的态矢.

描述一个微观体系(如单个氢原子等)需要多个物理量，如坐标、动量、角动量、能量、自旋等，那么这些物理量算符之间有什么关系呢？物理量之间的具体关系是由系统的物理属性(物理规律)决定的. 从理论的观点来看，任意算符之间的关系可分为两类. 如果两个物理量 A，B 具有共同的本征函数集，那么这两个算符 A 和 B 满足乘法交换律，我们就说算符 A 和 B 是对易的，记作

$$[A,B] = AB - BA = 0 \tag{1.1.4a}$$

如果算符 A 和 B 分别具有不同的本征函数集，此时不满足(1.1.4a)式，我们就称算符 A，B 之间是不对易的. 此时，算符 A，B

之间满足如下一般的对易关系：

$$[A,B]=iC \tag{1.1.4b}$$

其中 C 为一常数或另一厄米算符. 对易关系(1.1.4)式表征物理量 A 和 B 之间遵循的相应的物理关联或物理规律.

如何确定系统的动力学行为，是量子力学处理的基本问题. 量子力学假定，系统的态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 的时间演化由薛定谔方程决定，写作

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle=H|\Psi(t)\rangle \tag{1.1.5}$$

其中算符 H 是表征系统能量的物理量，称为系统的哈密顿量. 原则上说，对于任一给定的系统，都具有确定的 H，那么根据方程(1.1.5)式和初始条件，就可以确定态函数 $|\Psi(t)\rangle$，从而得知系统的时间演化规律.

研究系统的动力学行为，选择适当的绘景是十分重要的，量子力学中最常采用的是薛定谔绘景. 这种绘景的主要特点是通过态函数 $|\Psi(t)\rangle$ 的时间演化来表征系统的变化，而系统的物理量算符 A（如 H，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{r}$ 等）则不随时间而改变. 为区别其它绘景，常用下标(或上标)S 来表明薛定谔绘景中的态函数和物理量，例如 $|\Psi_S(t)\rangle$，H_S，q_S，p_S 等. 一般情况下，若未注明绘景下标(或上标)，则说明是在薛定谔绘景中讨论的量. 由于在薛定谔绘景中物理量 A_S 不随时间而改变，因而，物理量 A_S 的本征态矢 $|A_S\rangle$ 也不随时间而改变. 因此，在薛定谔绘景中，任一物理量的本征态矢集可以构成描述系统的态及其它物理量的固定的本征基. 可见，薛定谔绘景中本征基矢是静态的，而描述系统的态函数 $|\Psi(t)\rangle$ 则是动态的. 依据方程(1.1.5)式和初始条件 $|\Psi_S(t_0)\rangle$，可以求解出 t 时刻的态矢 $|\Psi_S(t)\rangle$：

$$|\Psi_S(t)\rangle=U(t,t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle \tag{1.1.6}$$

式中，$U(t,t_0)$ 称为时间演化算符，它由系统的哈密顿量决定. 将

(1.1.6)式代入(1.1.5)式，得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle = H_S U(t,t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle \quad (1.1.7)$$

由于$|\Psi_S(t_0)\rangle$是完全任意的，所以时间演化算符$U(t,t_0)$满足如下方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_S U(t,t_0) \quad (1.1.8)$$

积分上式，得知

$$U(t,t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H_S(t')dt'\right] \quad (1.1.9)$$

显然，$U(t,t_0)$为一幺正变换算符. 如果系统的哈密顿量H_S不显含时间t，则(1.1.9)式简化为

$$U(t,t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_S(t-t_0)\right] \quad (1.1.10)$$

将(1.1.9)式或(1.1.10)式代回(1.1.6)式，就可确定t时刻系统的态矢. 这时，系统于t时刻处于某一物理量的本征态$|u_m\rangle$的概率为

$$|\langle u_m|\Psi_S(t)\rangle|^2 = |\langle u_m|U(t,t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle|^2 \quad (1.1.11)$$

系统的任一物理量A_S在t时刻的期望值为

$$\langle A\rangle_S = \langle\Psi_S(t)|A_S|\Psi_S(t)\rangle \quad (1.1.12)$$

这里还要指出一点，在量子系统中，如果表示物理量的两个厄米算符A,B是不可对易的，它们满足关系(1.1.4b)式，也就是说，它们没有共同的本征函数集，因而不能同时确定，那么算符A,B的均方涨落$(\Delta A)^2=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2$, $(\Delta B)^2=\langle B^2\rangle-\langle B\rangle^2$将满足不等式：

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4}|\langle C\rangle|^2 \quad (1.1.13)$$

式中

$$\langle C\rangle=\langle\Psi(t)|C|\Psi(t)\rangle \tag{1.1.14}$$

$$(\Delta A)^2=\langle\Psi(t)|A^2|\Psi(t)\rangle-(\langle\Psi(t)|A|\Psi(t)\rangle)^2 \tag{1.1.15}$$

(1.1.13)式称为海森伯不确定度关系，它是量子系统中非对易算符间满足的一个基本关系. 如果$\langle C\rangle=0$，也就是$C=0$，那么此时A和B是对易的，因而两物理量A和B可以同时精确测定. 如果令算符A为坐标算符q，B为动量算符p，由于它们之间满足对易关系：

$$[q,p]=i\hbar \tag{1.1.16}$$

所以(1.1.13)式可简化为

$$(\Delta p)^2(\Delta q)^2\geqslant\frac{1}{4}\hbar^2 \tag{1.1.17}$$

这就是我们熟知的海森伯动量-坐标不确定度关系. 如果A为角动量算符的x分量L_x，B为角动量算符的y分量L_y，L_x，L_y满足对易关系：

$$[L_x,L_y]=i\hbar L_z \tag{1.1.18}$$

则有

$$(\Delta L_x)^2(\Delta L_y)^2\geqslant\frac{1}{4}\hbar^2|\langle L_z\rangle|^2 \tag{1.1.19}$$

(1.1.19)式即为粒子角动量x-y分量的不确定度关系，它决定于角动量z分量的期望值.

第二节　海森伯绘景

由上面的讨论知道，在薛定谔绘景中，物理量不随时间而改变，从而系统的本征态矢是静态的，它不随时间演化而变化，而描

述系统的态矢$|\Psi_S(t)\rangle$则是随时间而改变的.如果反过来,我们选取本征基矢变化,也就是令物理量 A 随时间变化,而描述系统的态矢$|\Psi(t)\rangle$则是固定不变的,那么这种绘景就称为海森伯绘景.这样,在海森伯绘景中,态函数

$$|\Psi_H\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle \tag{1.1.20}$$

与 t_0 时刻薛定谔绘景中的态函数相等.所以薛定谔绘景中的态函数与海森伯绘景中的态函数之间的关系式由(1.1.6)式可知为

$$|\Psi_S(t)\rangle = U(t,t_0)|\Psi_H\rangle \tag{1.1.21}$$

由于物理量的期望值与实际测量结果相对应,因此其结果应与用何种绘景描述无关,所以两种绘景的期望值相等.于是有

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \langle\Psi_S(t)|A_S|\Psi_S(t)\rangle = \langle\Psi_S(t_0)|U^+(t,t_0)A_SU(t,t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle \\ &= \langle\Psi_H|U^+(t,t_0)A_SU(t,t_0)|\Psi_H\rangle = \langle\Psi_H|A_H(t)|\Psi_H\rangle\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

可见,两种绘景中的算符之间具有如下确定的关系:

$$A_H(t) = U^+(t,t_0)A_SU(t,t_0) \tag{1.1.23}$$

这种关系表明,薛定谔绘景中形式上不随时间而变化的算符 A_S 通过幺正变换 $U(t,t_0)$而转化为海森伯绘景中随时间而变化的算符 $A_H(t)$.下面,我们再来看看海森伯绘景中算符 $A_H(t)$的本征态矢如何随时间变化.在薛定谔绘景中,算符 A_S 满足的本征值方程为

$$A_S|u_n^S\rangle = \lambda_n|u_n^S\rangle \tag{1.1.24}$$

利用(1.1.23)式,有

$$U(t,t_0)A_H(t)U^+(t,t_0)|u_n^S\rangle = \lambda_n|u_n^S\rangle$$

在上式两边左乘幺正算符 $U^+(t,t_0)$,则

$$A_H(t)|u_n^H(t)\rangle = \lambda_n|u_n^H(t)\rangle \tag{1.1.25}$$

式中已令

$$|u_n^H(t)\rangle = U^+(t,t_0)|u_n^S\rangle \tag{1.1.26}$$

这即是两种绘景中物理量 A 的本征态矢间的变换关系. 它表明，在薛定谔绘景中静态的本征态矢 $|u_n^S\rangle$ 在海森伯绘景中变为动态的本征态矢 $|u_n^H(t)\rangle$. 比较(1.1.21)和(1.1.26)式还可以明显看出：在薛定谔绘景中，描述系统的态矢 $|\Psi_S(t)\rangle$ 沿一确定的方向随着时间的演化而变化；而在海森伯绘景中，物理量 A 的本征基矢则沿着相反的方向随时间变化.

在海森伯绘景中，系统随时间的演化规律可以通过求解算符 $A_H(t)$ 的海森伯方程而得知. 对方程(1.1.23)式两边求导并利用(1.1.8)式，可得

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}A_H &= U^+A_SH_SU - U^+H_SA_SU + i\hbar U^+\frac{\partial}{\partial t}A_SU \\
&= U^+A_SUU^+H_SU - U^+H_SUU^+A_SU + i\hbar U^+\frac{\partial}{\partial t}A_SU \\
&= [A_H, H_H] + i\hbar U^+\frac{\partial}{\partial t}A_SU
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

这里已应用了(1.1.23)式，其中

$$H_H(t) = U^+(t,t_0)H_SU(t,t_0) \tag{1.1.28}$$

是海森伯绘景中系统的哈密顿算符，方程(1.1.27)式称为算符 A_H 的海森伯运动方程. 与薛定谔绘景中的薛定谔方程一样，在海森伯绘景中，方程(1.1.27)式是描述系统运动规律的基本方程. 因为系统随时间的演化要由相应算符 $A_H(t)$ 的时间行为体现出来，所以只要通过算符运动方程(1.1.27)式，求解出 $A_H(t)$ 的表达式，我们便可得到相应物理量的期望值以及可能的测量值(本征值)等等.

如果 $\frac{d}{dt}A_H=0$，那么 A_H 就是运动常数. 而如果算符 A_S 不显含时间，即 $\frac{\partial}{\partial t}A_S=0$，那么算符 A_H 遵循的运动方程为

$$\frac{d}{dt}A_H = \frac{1}{i\hbar}[A_H, H_H] \tag{1.1.29}$$

事实上，对于一个能量保持守恒的系统，在薛定谔绘景中有：$\frac{d}{dt}H_S=0$. 另外，当 $A_S=H_S$ 时，注意到此时 $U(t,t_0)$ 由式(1.1.10)表示，故 $[H_S,U]=0$，在这种情况下，(1.1.23)式给出 $H_H=H_S$. 这表明对于能量守恒系统，系统的哈密顿算符在薛定谔绘景和海森伯绘景中相同. 按(1.1.29)式，我们有

$$\frac{d}{dt}H_H=0 \tag{1.1.30}$$

所以，系统的哈密顿算符 H 在两种绘景中均是守恒量. 反过来也可以这样说，对于保守系统而言，由于 H 是守恒量，所以它在两种绘景中是相同的.

我们还要指出的是，由于算符之间的对易关系反映物理量之间的物理关联，所以它不应该依不同的量子描述方式(绘景)而有所改变. 下面我们来证明，算符间的对易关系在两种绘景中具有相同的形式. 设在薛定谔绘景中，系统的算符 A_S,B_S,C_S 之间满足对易关系：

$$[A_S,B_S]=iC_S \tag{1.1.31}$$

如果将上式两边左乘 U^+，右乘 U，那么可得

$$U^+A_SB_SU-U^+B_SA_SU=iU^+C_SU$$

再在算符 A_S,B_S 之间插入恒等算符 $UU^+=I$，则有

$$U^+A_SUU^+B_SU-U^+B_SUU^+A_SU=iU^+C_SU$$

应用关系(1.1.23)式，上式化为

$$[A_H(t),B_H(t)]=iC_H(t) \tag{1.1.32}$$

比较(1.1.31)和(1.1.32)式可以发现，在海森伯绘景和薛定谔绘景中算符间的对易关系具有相同的形式. 由于算符间的对易关系具有相同的形式，从而在海森伯绘景中，算符 $A_H(t)$ 和 $B_H(t)$ 具有与薛定谔绘景中的海森伯不确定度关系相同的形式.

现在已得出量子力学中的运动方程的两种形式.应该指出,在这两种形式中,薛定谔绘景对于保守系统更为适用.因为在这种情况下,通过薛定谔运动方程(1.1.5)式比较容易求解系统的态函数.而对于开放系统(如位于劣腔中的原子与光场的相互作用系统),由于系统受到外界环境的影响,系统的哈密顿量有比较复杂的形式,不容易利用薛定谔方程(1.1.5)式求出系统的态矢.但在这种情况下,应用海森伯绘景,通过求解物理量的运动方程(1.1.29)式,则比较容易给出物理量算符和它们的期望值随时间演化的规律.因此,对于不同的问题,应视具体情况,选择数学上较易求解且更能揭示物理规律的绘景来处理.

第三节　相互作用绘景

一、相互作用绘景中的运动方程

在量子光学中经常应用的另一种绘景是相互作用绘景.在此,系统的哈密顿量 H 可以分解为两部分之和:

$$H_S = H_0^S + V_S \qquad (1.1.33)$$

其中 H_0^S 不显含时间,而且它所对应的本征基矢也易于由方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_n\rangle = H_0^S|\Psi_n\rangle \qquad (1.1.34)$$

求解.V_S 可看作系统的相互作用能部分,通常它显含时间,因而对系统的行为往往有特别的效应.引入相互作用绘景就是集中地体现相互作用能量 $V(t)$ 对系统的效应,以便最大程度上能由 $V(t)$ 决定系统的态矢随时间的演化.由薛定谔绘景变换到相互作用绘景的方法是引入幺正变换 $U_0(t,t_0)$,使

$$|\Psi_S(t)\rangle = U_0(t,t_0)|\Psi_I(t)\rangle \qquad (1.1.35)$$

其中,$|\Psi_I(t)\rangle$ 中的下标 I 表征为相互作用绘景中的态函数.令

$$U_0(t,t_0)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_0^{\mathrm{S}}(t-t_0)\right] \tag{1.1.36}$$

显然

$$U_0^+=U_0^{-1} \tag{1.1.37a}$$

$$U_0(t_0,t_0)=1 \tag{1.1.37b}$$

把幺正算符 $U_0(t,t_0)$对时间求导,可知它满足如下方程:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0=H_0^{\mathrm{S}}U_0 \tag{1.1.38}$$

现在我们来推导相互作用绘景中态函数 $|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle$满足的运动方程. 在薛定谔绘景中,对于形如(1.1.33)式的哈密顿量,态函数 $|\Psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle$满足的运动方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle=(H_0^{\mathrm{S}}+V_{\mathrm{S}})|\Psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle \tag{1.1.39}$$

将(1.1.35)式代入上式,得

$$i\hbar\frac{\partial U_0}{\partial t}|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle+i\hbar U_0\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle=[H_0^{\mathrm{S}}+V_{\mathrm{S}}]U_0|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle$$

若在上式中应用(1.1.38)式,再左乘 U_0^+,则得相互作用绘景中态函数 $|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle$满足的薛定谔方程:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle=V_{\mathrm{I}}(t)|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle \tag{1.1.40}$$

其中算符 $V_{\mathrm{I}}(t)$为

$$V_{\mathrm{I}}(t)=U_0^+V_{\mathrm{S}}U_0 \tag{1.1.41}$$

(1.1.41)式表明,相互作用绘景中系统的态函数 $|\Psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle$的时间演化,原则上由系统的相互作用能 $V_{\mathrm{I}}(t)$决定,所以它突出了相互作用能的效应.

由于不同绘景中物理量的期望值应当一致,所以,算符 A 的

期望值为

$$\langle A\rangle=\langle\Psi_S(t)|A_S|\Psi_S(t)\rangle=\langle\Psi_I(t)|U_0^+A_SU_0|\Psi_S(t)\rangle$$
$$=\langle\Psi_I(t)|A_I(t)\rangle|\Psi_I(t)\rangle \tag{1.1.42}$$

由此可知，相互作用绘景中的算符与薛定谔绘景中的算符 A_S 的关系为

$$A_I(t)=U_0^+(t,t_0)A_SU_0(t,t_0) \tag{1.1.43}$$

由于相互作用绘景中不仅态函数 $|\Psi_I(t)\rangle$ 随着时间变化，它由薛定谔方程(1.1.40)式决定，而且物理量 $A_I(t)$ 也是时间的函数，所以，我们也应讨论算符 $A_I(t)$ 满足的运动方程. 把(1.1.43)式对 t 求导，并应用(1.1.38)式及其共轭式，得到

$$i\hbar\frac{d}{dt}A_I=U_0^+A_Si\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0^+A_SU_0+U_0^+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A_SU_0$$
$$=U_0^+A_SH_0^S-U_0^+H_0^SA_SU_0+U_0^+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A_SU_0 \tag{1.1.44}$$

由于 H_0^S 与时间无关，且

$$[H_0^S,V_S]=0 \tag{1.1.45}$$

所以

$$H_0^S=H_0^I \tag{1.1.46}$$

于是，(1.1.44)式简化为

$$i\hbar\frac{d}{dt}A_I=[A_I,H_0^I]+i\hbar U_0^+\frac{\partial}{\partial t}A_SU_0$$
$$=[A_I,H_0^S]+i\hbar U_0^+\frac{\partial}{\partial t}A_SU_0 \tag{1.1.47}$$

这样，我们就得到了相互作用绘景中算符 $A_I(t)$ 所遵循的运动方程(1.1.47)式. 依据方程(1.1.47)式和初始条件，原则上可求出算符 $A_I(t)$ 的时间行为.

二、用微扰法求解态函数 $|\Psi_I(t)\rangle$

为求解系统的态函数 $|\Psi_I(t)\rangle$，必须从 $|\Psi_I(t)\rangle$ 满足的薛定谔

方程(1.1.40)式出发. 注意到(1.1.35)式，可知初始时刻 $t=t_0$ 时，$|\Psi_I(t_0)\rangle=|\Psi_S(t_0)\rangle$. 但是，对于不同形式的 $V_I(t)$ 及初始条件 $|\Psi_I(t_0)\rangle$，大多数情况下不便直接由方程(1.1.40)式求解 $|\Psi_I(t)\rangle$. 不过，我们可引入一幺正变换 $U(t,t_0)$，使得

$$|\Psi_I(t)\rangle=U(t,t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle \tag{1.1.48}$$

以表示随着时间的演化，系统态函数从初始时刻的 $|\Psi_I(t_0)\rangle$ 到 t 时刻的 $|\Psi_I(t)\rangle$ 的变化. 把(1.1.48)式代入(1.1.40)式，并注意到初始值 $|\Psi_I(t_0)\rangle$ 是可以任意选取的. 于是幺正变换算符 $U(t,t_0)$ 应满足如下方程：

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0)=V_I(t)U(t,t_0) \tag{1.1.49}$$

通过求解方程(1.1.49)式，原则上由 $V_I(t)$ 以及初始条件

$$U(t_0,t_0)=1 \tag{1.1.50}$$

可以得出 $U(t,t_0)$ 的精确或微扰表达式. 从而得出态函数 $|\Psi_I(t)\rangle$，并进而由下式给出 $|\Psi_S(t)\rangle$：

$$\begin{aligned}|\Psi_S(t)\rangle&=U_0^+(t,t_0)|\Psi_I(t)\rangle\\&=U_0^+(t,t_0)U(t,t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle\end{aligned} \tag{1.1.51}$$

现讨论 $U(t,t_0)$ 的微扰近似展开式. 对方程(1.1.49)式积分，并应用初始条件(1.1.50)式，得

$$U(t,t_0)=1+\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}V_I(t_1)U(t_1,t_0)dt_1 \tag{1.1.52}$$

积分号中 $U(t_1,t_0)$ 又可以作为 t_2 的函数，它具有如上式相同形式的解：

$$U(t_1,t_0)=1+\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1}V_I(t_2)U(t_2,t_0)dt_2 \tag{1.1.53}$$

把(1.1.53)式代入(1.1.52)式，得

$$U(t,t_0)=1+\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}V_I(t_1)U(t_1,t_0)dt_1$$

$$+\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}dt_1V_I(t_1)\int_{t_0}^{t_1}dt_2V_I(t_2)U(t_2,t_0) \quad (1.1.54)$$

继续运用叠代插入法,我们得到幺正变换算符 $U(t,t_0)$ 的级数展开式为

$$U(t,t_0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots$$

$$\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nV_I(t_1)V_I(t_2)\cdots V_I(t_n) \quad (1.1.55)$$

此式给出了通过 $V_I(t)$ 确定幺正算符 $U(t,t_0)$ 的表达式.由于相互作用能 $V_I(t)$ 通常远比 H_0 小,所以展开式(1.1.55)式中的后一项较前一项将迅速减小,因此取展开式的前几项,就可以相当准确地定出 $U(t,t_0)$. 将(1.1.55)式代入(1.1.48)式中,即得相互作用绘景中 t 时刻系统态函数的微扰展开式.

下面,考虑一特殊情况,假设 t_0 时刻系统处在未扰哈密顿量 H_0 的本征态 $|i\rangle$,它满足

$$H_0|i\rangle=E_i|i\rangle \quad (1.1.56)$$

由于相互作用能 $V(t)$ 的作用,随着时间的改变系统演化到态 $|\Psi_I(t)\rangle$. 那么,t 时刻系统跃迁到 H_0 的另一不同于 $|i\rangle$ 的本征态 $|k\rangle$ 的概率 $|\langle k|\Psi_I(t)\rangle|^2$ 为多少呢? 显然此时概率幅可表示为

$$\langle k|\Psi_I(t)\rangle=\langle k|U(t,t_0)|i\rangle \quad (1.1.57)$$

将(1.1.55)式代入上式,即得

$$\langle k|\Psi_I(t)\rangle=\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\langle k|V_I(t_1)|i\rangle dt_1$$

$$+\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\langle k|V_I(t_1)V_I(t_2)|i\rangle+\cdots \quad (1.1.58)$$

再把(1.1.41)式代入上式,在一级近似下,跃迁的概率幅可写为

$$\langle k|\Psi_1(t)\rangle \approx \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\langle k|V_S|i\rangle \exp(i\omega_{ki}t_1)dt_1 \qquad (1.1.59)$$

式中

$$\omega_{ki}=(E_k-E_i)/\hbar$$

为跃迁频率. 同样,我们还可以利用(1.1.58)式计算高阶近似的概率幅. 这样,对相互作用能取逐级近似后,依据方程(1.1.58)式进行运算可得方程(1.1.57)式的表达式,从而得出 t 时刻系统由初始态 $|i\rangle$ 跃迁到本征态 $|k\rangle$ 的概率幅.

第四节 密度算符

由前面的讨论我们知道,当确定系统在某时刻 t 的态以后,就可以确定系统的时间演化以及预言物理量的测量结果. 为得知系统在给定时刻的态,实验上可通过对应本征矢的一组测量而确定下来. 例如,利用光束通过偏振器的实验就可准确确定光子的极化态. 但是实际上,系统的态并不总是可以确定知道的,如由温度为 T 的热炉发射出的原子束中,具有一定动量的原子态就很难确定,此时我们仅能知道原子动量的统计分布. 也就是说,这时我们只知道系统的态的不完全信息. 那么,如何依据关于系统态的不完全信息,从理论上最大可能地预言测量结果呢? 为此,我们将引入一种非常有用的工具—— 密度算符.

一、密度算符及其特性

描述系统的态有两种类型. 一种是纯态;一种是统计混合态或者混沌态. 如果一个系统的态完全确定,我们就说这种态为纯态,它可由一态矢描述. 纯态 $|\Psi(t)\rangle$ 可由系统任一物理量的本征态矢 $|u_n\rangle$ 的叠加态来表示:

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_n C_n(t)|u_n\rangle \qquad (1.1.60)$$

式中，$|C_n(t)|^2$ 表征系统处于本征态 $|u_n\rangle$ 的概率.

如果系统的态不完全确定，这时只有关于系统的不完全的或然信息. 这典型地反映在对系统描述的概率概念上. 例如，自然光的光子具有相同概率的任何极化态，又如在温度为 T 的热平衡系统中，处于能量为 E_n 的态的概率正比于 $\exp(-E_n/kT)$. 一般情况下，系统处于态 $|\Psi_1\rangle$ 的概率为 P_1，处于态 $|\Psi_2\rangle$ 的概率为 P_2，…而且有

$$P_1+P_2+\cdots=\sum_n P_n=1 \tag{1.1.61}$$

那么我们就说，系统是处于态 $|\Psi_1\rangle$，$|\Psi_2\rangle$…且概率分别为 P_1，P_2…的统计混合态.

应该指出的是，混沌态的概率 P_n 与纯态中的概率 $|C_n(t)|^2$ 不同，后者是量子力学对系统固有量子属性的反映. 而 P_n 则不同，它不是系统的固有量子属性，它们之间可能有关联，其具有经典统计性，如热平衡时的 $\exp(-E_n/kT)$. 但 P_n 之间也可能没有关联，它们完全由各次测量结果得知. 而且，态函数 $|\Psi_n\rangle$ 之间可以正交也可以不正交.

对于需要用统计混合态描述的系统，采用密度算符的方法能更为方便地描述. 这里，我们首先讨论纯态情况下的密度算符，然后再推广到适用于统计混合态的情况.

如方程(1.1.60)式所示，一个由纯态描述的系统，任意时刻 t 的态函数可由一本征态矢集 $\{|u_n\rangle\}$ 展开，其系数 $C_n(t)$ 满足归一化条件：

$$\sum_n |C_n(t)|^2=1 \tag{1.1.62}$$

显然，在薛定谔绘景中，物理量 A 在时间 t 的期望值由态矢 $|\Psi_S(t)\rangle$ 确定：

$$\langle A\rangle_S=\langle\Psi_S(t)|A_S|\Psi_S(t)\rangle=\sum_{n,p}C_n^*(t)C_p(t)A_{np} \tag{1.1.63}$$

这里已应用了本征基矢 $\{|u_n^S\rangle\}$ 的完备性条件 $\sum_n |u_n\rangle\langle u_n|=1$，其

中物理量 A 的矩阵元为

$$A_{np}=\langle u_n^S|A_S|u_p^S\rangle \tag{1.1.64}$$

方程(1.1.63)式表明,与期望值相关联的函数 $C_n^*(t)C_p(t)$,可以看作为算符 $|\Psi_S(t)\rangle\langle\Psi_S(t)|$ 的矩阵元:

$$\langle u_n|\Psi_S(t)\rangle\langle\Psi_S(t)|u_p\rangle=C_n^*(t)C_p(t) \tag{1.1.65}$$

因此,如果引入纯态的密度矩阵算符:

$$\rho_S(t)=|\Psi_S(t)\rangle\langle\Psi_S(t)| \tag{1.1.66}$$

那么,在 $\{|u_n^S\rangle\}$ 基中密度算符 $\rho_S(t)$ 的矩阵元可表示为

$$\rho_{pn}^S(t)=\langle u_p^S|\rho_S(t)|u_n^S\rangle=C_n^*(t)C_p(t) \tag{1.1.67}$$

于是,根据方程(1.1.64)和(1.1.67)式我们可以由密度算符给出物理量 A_S 的期望值:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_S&=\sum_{n,p}\langle u_p^S|\rho_S(t)|u_n^S\rangle\langle u_n^S|A_S|u_p^S\rangle\\&=\sum_p\langle u_p^S|\rho_S(t)A_S|u_p^S\rangle=\mathrm{Tr}\{\rho_S(t)A_S\}\end{aligned} \tag{1.1.68}$$

归一化条件(1.1.62)式也可用密度算符表示为

$$\sum_n|C_n(t)|^2=\sum_n\rho_{nn}^S(t)=\mathrm{Tr}\rho_S(t)=1 \tag{1.1.69}$$

根据态函数 $|\Psi_S(t)\rangle$ 满足的薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_S(t)\rangle=H_S|\Psi_S(t)\rangle \tag{1.1.70}$$

及其共轭式可以得知薛定谔绘景中密度算符 $\rho_S(t)$ 所遵循的运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t)&=\left\{\frac{d}{dt}|\Psi_S(t)\rangle\right\}\langle\Psi_S(t)|+|\Psi_S(t)\rangle\left\{\frac{d}{dt}\langle\Psi_S(t)|\right\}\\&=\frac{1}{i\hbar}H_S|\Psi_S(t)\rangle\langle\Psi_S(t)|+\left(-\frac{1}{i\hbar}\right)|\Psi_S(t)\rangle\langle\Psi_S(t)|H_S\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\left[H_S, \rho_S(t)\right] \tag{1.1.71}$$

类似地，在海森伯绘景和相互作用绘景中密度算符可分别定义为

$$\rho_H(t)=|\Psi_H(t)\rangle\langle\Psi_H(t)| \tag{1.1.72}$$

$$\rho_I(t)=|\Psi_I(t)\rangle\langle\Psi_I(t)| \tag{1.1.73}$$

由三种绘景中态矢间的变换关系(1.1.21)和(1.1.35)式可得 $\rho_H(t)$，$\rho_I(t)$和 $\rho_S(t)$间的关系：

$$\rho_H(t)=U^+(t,t_0)\rho_S(t)U(t,t_0) \tag{1.1.74}$$

$$\rho_I(t)=U_0^+(t,t_0)\rho_S(t)U_0(t,t_0) \tag{1.1.75}$$

式中，$U(t,t_0)$和 $U_0(t,t_0)$分别由(1.1.9)和(1.1.36)式定义. 显然，在海森伯绘景中密度算符 $\rho_H(t)$不随时间演化；而在相互作用绘景中密度算符 $\rho_I(t)$随时间的演化规律遵循

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t)=\left(\frac{d}{dt}|\Psi_I(t)\rangle\right)\langle\Psi_I(t)|+|\Psi_I(t)\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\Psi_I(t)|\right)$$

$$=\frac{1}{i\hbar}V_I(t-t_0)|\Psi_I(t)\rangle\langle\Psi_I(t)|$$

$$+\frac{1}{(-i\hbar)}|\Psi_I(t)\rangle\langle\Psi_I(t)|V_I(t-t_0)$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\left[V_I(t-t_0), \rho_I(t)\right] \tag{1.1.76}$$

这样，我们给出了三种绘景中纯态情况下密度算符的定义式及其随时间的演化规律. 下面，我们来讨论密度算符的性质. 由(1.1.66)，(1.1.72)和(1.1.73)式可知它是厄米算符，即

$$\rho^+=\rho \tag{1.1.77}$$

且满足关系

$$\rho^2=\rho \tag{1.1.78}$$

$$\mathrm{Tr}\rho^2=\mathrm{Tr}\rho=1 \tag{1.1.79}$$

显然，在三种绘景中，由于纯态时 $|\Psi(t)\rangle$ 与 $e^{i\theta}|\Psi(t)\rangle$ 有相同的 ρ，所以用 ρ 描述系统时，可以消除相因子的背景影响.

现在来讨论由统计混合态所描述的系统的情况，此时薛定谔绘景中密度算符定义为

$$\rho_S(t)=\sum_k P_k|\Psi_k^S(t)\rangle\langle\Psi_k^S(t)|=\sum_k P_k\rho_k^S(t) \tag{1.1.80}$$

其中

$$\rho_k^S(t)=|\Psi_k^S(t)\rangle\langle\Psi_k^S(t)| \tag{1.1.81}$$

类似地，在海森伯绘景和相互作用绘景中密度算符定义为

$$\rho_H(t)=\sum_k P_k|\Psi_k^H(t)\rangle\langle\Psi_k^H(t)|=\sum_k P_k\rho_k^H(t) \tag{1.1.82}$$

$$\rho_I(t)=\sum_k P_k|\Psi_k^I(t)\rangle\langle\Psi_k^I(t)|=\sum_k P_k(t)\rho_k^I(t) \tag{1.1.83}$$

由于系统是由分布概率分别为 $P_1,P_2,\cdots,P_k,\cdots$ 的态矢 $|\Psi_1\rangle$，$|\Psi_2\rangle,\cdots,|\Psi_k\rangle,\cdots$ 所共同描述的，所以算符(1.1.80)—(1.1.83)式是在不同绘景中描述混合系统的密度算符. 这种情况下，物理量 A 的期望值仍等于

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}(\rho_S A_S)=\mathrm{Tr}(\rho_H A_H)=\mathrm{Tr}(\rho_I A_I) \tag{1.1.84}$$

而且由(1.1.80)，(1.1.83)式定义的密度算符 $\rho_S(t)$，$\rho_I(t)$ 遵循与纯态下相同的运动方程.

下面，我们来讨论统计混合态下，密度算符的性质. 由(1.1.80)—(1.1.83)式可明显看出，与纯态情况相似，ρ 仍为厄米算符. 但此时

$$\rho^2=\sum_k P_k|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\sum_{k'}P_{k'}|\Psi_{k'}\rangle\langle\Psi_{k'}|=\sum_k P_k^2|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\neq\rho \tag{1.1.85}$$

而且容易证明，一般情况下

$$\mathrm{Tr}\rho^2 \leqslant 1 \tag{1.1.86}$$

其中的等号只有在纯态条件下成立，所以(1.1.86)式可用来判断系统是否处于纯态.

二、密度算符方程的解

原则上，根据系统的哈密顿量 H 和初始条件并由密度算符演化方程(1.1.71)和(1.1.76)式可分别求出 $\rho_S(t)$和 $\rho_I(t)$，然后就可得知系统的信息，如物理量的期望值、测量量的概率分布等等.由于薛定谔绘景中的密度算符 $\rho_S(t)$与相互作用绘景中的密度算符 $\rho_I(t)$存在幺正变换关系(1.1.75)式，因而我们只须求出两者之一就可容易地推知另一算符.下面，我们以相互作用绘景中的情形为例，介绍求解密度算符的几种方法.

1. 应用幺正变换算符 $U(t)$，求解 $\rho_I(t)$

对于一个由哈密顿量

$$H_S = H_0^S + V_S \tag{1.1.87}$$

描述的系统，如果 H_0^S 不显含时间，可定义态函数 $|\Psi_k^I(t)\rangle$满足幺正变换

$$|\Psi_k^I(t)\rangle = U(t)|\Psi_k(0)\rangle \tag{1.1.88}$$

则

$$\rho_I(t) = \sum_k P_k U(t)|\Psi_k(0)\rangle\langle\Psi_k(0)|U^+(t) = U\rho(0)U^+ \tag{1.1.89}$$

可见，若知道 $U(t)$，就可根据 $\rho(0)$而由(1.1.89)式得知 $\rho_I(t)$.把(1.1.89)式代入(1.1.76)式，可得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t) = V_I U(t) \tag{1.1.90}$$

由上式解出 $U(t)$，则可知 $\rho_I(t)$.如果 V_I 不显含时间，那么

$$U(t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}V_It\right) \tag{1.1.91}$$

所以

$$\rho_I(t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}V_It\right)\rho(0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}V_It\right) \tag{1.1.92}$$

应用(1.1.75)式可将上式变换到薛定谔绘景.如果 H_0^S 和 V_S 可对易,那么可得

$$\rho_S(t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_St\right)\rho(0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}H_St\right) \tag{1.1.93}$$

再将上式在哈密顿量 H_S 的能量本征基$\{|u_n\rangle\}$中展开,则密度算符可表示为

$$\begin{aligned}\rho_S(t)&=\sum_{n,l}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_St\right)|u_n\rangle\langle u_n|\rho(0)|u_l\rangle\langle u_l|\exp\left(\frac{i}{\hbar}H_St\right)\\&=\sum_{n,l}\langle u_n|\rho(0)|u_l\rangle\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_l)t\right]|u_n\rangle\langle u_l|\end{aligned} \tag{1.1.94}$$

此时密度矩阵元可表示为

$$\rho_{nl}^S(t)=\langle u_n|\rho_S(t)|u_l\rangle=\rho_{nl}^S(0)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_l)t\right] \tag{1.1.95}$$

$$\rho_{nl}^S(0)=\langle u_n|\rho_S(0)|u_l\rangle \tag{1.1.96}$$

可见,若系统的哈密顿量不显含时间,密度算符及其矩阵元 $\rho_{nl}^S(t)$ 完全由系统能量 H_0^S 的本征态以及初始条件 $\rho(0)$决定.

2. 应用微扰理论求解密度算符 $\rho_I(t)$

当系统的相互作用哈密顿量 V_S 显含时间时,一般来说,方程(1.1.76)式不易精确求解.如果 V_S 远比 H_0^S 小,这时我们可运用与求解态矢$|\Psi_I(t)\rangle$相似的微扰理论,在相互作用绘景中得到一个对 V_I 迅速收敛的幂级数形式的近似解.逐级积分方程(1.1.76)式,并注意到$U_0(t_0,t_0)=1$,即 $\rho_S(0)=\rho_I(0)$,则得

$$\rho_1(t)=\rho(0)+\frac{1}{i\hbar}\int_0^t[V_1(t_1),\rho(0)]dt_1$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int_0^t dt_2\int_0^t dt_1[V_1(t_1),[V_1(t_2),\rho(0)]]+\cdots$$
$$(1.1.97)$$

应该指出的是，密度算符的上述微扰展开式，比在相互作用绘景中求解态函数$|\Psi_1(t)\rangle$的微扰展开式(1.1.55)式更具普遍性，因为这里密度算符

$$\rho_1(t)=\sum_k P_k|\Psi_1(t)\rangle\langle\Psi_1(t)|$$

不仅对于起始时为纯态$|\Psi\rangle$的情况适宜，而且对于仅知道起始时是$|\Psi_k\rangle$的概率为P_k的混沌态情况也适宜.

3. 约化密度算符

由上面的讨论看出，运用求解密度算符的方法能比求解态函数的方法更为普遍地描述一个系统的信息. 现在我们讨论，对于两个彼此有耦合的系统A和B，如何应用密度算符来描述. 设两系统在$t=0$时刻以前彼此独立，其哈密顿量分别为H_A和H_B并且它们之间满足

$$[H_A,H_B]=0 \qquad (1.1.98)$$

它们的能量的本征值分别可解：

$$H_A|A'\rangle=E_{A'}|A'\rangle, \qquad H_B|B'\rangle=E_{B'}|B'\rangle \qquad (1.1.99)$$

若令$t=0$以后，两系统相互耦合，则总系统的哈密顿量可写为

$$H=H_A+H_B+V_{AB}=H_0+V_{AB} \qquad (1.1.100)$$

总系统的密度算符ρ_{AB}在薛定谔绘景中满足的运动方程为

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho_{AB}^S=[H,\rho_{AB}^S] \qquad (1.1.101)$$

由于$t=0$时刻，系统还未耦合，所以有初始条件：

$$\rho_{AB}(0)=\rho_A(0)\ \rho_B(0) \tag{1.1.102}$$

$$\mathrm{Tr}_{A}\rho_A(0)=\sum_{A'}\langle A'|\rho_A(0)|A'\rangle=1 \tag{1.1.103}$$

$$\mathrm{Tr}_{B}\rho_B(0)=\sum_{B'}\langle B'|\rho_B(0)|B'\rangle=1 \tag{1.1.104}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{AB}\rho_{AB}(0)&=\sum_{A',B'}\langle A',B'|\rho_A(0)\rho_B(0)|A',B'\rangle\\&=\mathrm{Tr}_{A}\rho_A(0)\ \mathrm{Tr}_{B}\rho_B(0)=1\end{aligned} \tag{1.1.105}$$

进入相互作用绘景后，我们有

$$\rho^{\mathrm{S}}_{AB}(0)=U_0(t)\rho^{\mathrm{I}}_{AB}(t)U_0^{\dagger}(t) \tag{1.1.106}$$

这里

$$U_0(t)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(H_A+H_B)t\right] \tag{1.1.107}$$

密度矩阵的运动方程为

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho^{\mathrm{I}}_{AB}(t)=[V^{\mathrm{I}}_{AB}(t),\rho^{\mathrm{I}}_{AB}(t)] \tag{1.1.108}$$

对于这样的耦合系统，如果我们只测量系统 A 的物理量 M，例如在原子-辐射场相互作用系统中，我们只测量原子自旋 z 分量的情况，那么，此时物理量 M 的期望值为

$$\begin{aligned}\langle M\rangle&=\mathrm{Tr}_{AB}(M_{\mathrm{S}}\rho^{\mathrm{S}}_{AB}(t))=\sum_{A',B'}\langle A',B'|M_{\mathrm{S}}\rho^{\mathrm{S}}_{AB}(t)|A',B'\rangle\\&=\sum_{A'}\langle A'|M_{\mathrm{S}}[\sum_{B'}\langle B'|\rho^{\mathrm{S}}_{AB}(t)|B'\rangle]|A'\rangle\\&=\mathrm{Tr}_{A}(M_{\mathrm{S}}\rho^{\mathrm{S}}_{A}(t))\end{aligned} \tag{1.1.109}$$

式中 $\rho^{\mathrm{S}}_{A}(t)$称为约化密度矩阵算符，定义为

$$\rho^{\mathrm{S}}_{A}(t)=\mathrm{Tr}_{B}\rho^{\mathrm{S}}_{AB}(t) \tag{1.1.110}$$

有了耦合系统中系统 A 的约化密度算符(1.1.110)式以后，就能较方便地直接计算系统 A 中任意物理量 M 的时间演化及其

测量期望值等.同时对 $\rho_A^S(t)$的求解,也可进入相互作用绘景,然后,应用微扰展开式逐级求出:

$$\rho_A^I(t)=\rho_A(0)+\frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt_1 \mathrm{Tr}_B[V_I(t_1),\rho_A(0)\rho_B(0)]$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int_0^t dt_2\int_0^t dt_1 \mathrm{Tr}_B[V_I(t_1),[V_I(t_2),\rho_A(0)\rho_B(0)]]+\cdots$$

(1.1.111)

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, The Principle of Quantum Mechanics, 4th ed., Clarendon, 1958.

[2] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, 3rd ed., McGraw-Hill, 1968.

[3] E. Merzbacher, Quantum Mechanics, 2nd ed., Wiley, 1970.

[4] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, Wiley, 1970.

[5] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Quantum Mechanics, Wiley and Hermann, 1977.

[6] 彭金生,共振荧光与超荧光,科学出版社,1993.

第二章　二能级原子与光学布洛赫方程

第一节　二能级原子

实际原子的谱结构都是比较复杂的，例如自然界最简单的氢原子，它的本征频谱就由一组束缚分离谱和一连续谱组成，其大部分能级都是简并的. 所以精确讨论多原子系与光场的相互作用是不可能的，即使讨论一个原子与光场的相互作用也难以给出精确的解释，通常需要借助某些假设. 电磁场能诱导原子不同本征态间的许多跃迁，然而最可能的跃迁是原子本征频率与光场频率近似相等的跃迁，所以最自然的假设是令原子只具有两个非简并能级 E_+ 和 E_-，称之为二能级原子. 二能级原子的能级图如图 1.2.1 所示. 二能级原子的本征跃迁频率为 ω_0，$\omega_0=(E_+-E_-)/\hbar$，当它与频率为 $\omega\approx\omega_0$ 的单模辐射场发生作用时就导致共振跃迁. 显然，二能级原子是一个实际原子的理想模型，如同质点的假设在经典力学中具有的重要性一样，它在研究光与物质相互作用的理论中起着很重要的作用. 从概念上说，二能级原子与磁场中自旋为 1/2 的粒子属于同一类粒子，所以我们有时也称它为自旋为 1/2 的赝自旋粒子.

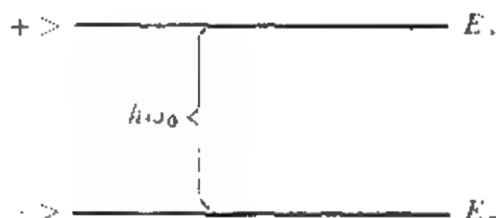


图 1.2.1　二能级原子的能级图

第二节　二能级原子与电磁场相互作用的哈密顿量

描述偶极矩为 $\boldsymbol{D}$ 的二能级原子与辐射场[我们用电磁场的 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)$ 表示]相互作用系统的哈密顿算符可以写为

$$H = H_A - \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) \tag{1.2.1}$$

其中 H_A 为描述二能级原子本身的能量算符，$\boldsymbol{D}$ 为描述二能级原子的偶极矩算符，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)$ 为偶极子在 $\boldsymbol{r}_0$ 处的电场算符. 令二能级原子的两个本征态为 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$，它满足的能量本征值方程为

$$H_A|\pm\rangle = E_\pm|\pm\rangle \tag{1.2.2}$$

若在原子的本征态矢表示的希尔伯特空间内用矩阵表示 H_A，则可写为

$$H_A = \begin{bmatrix} \langle +|H_A|+\rangle & \langle +|H_A|-\rangle \\ \langle -|H_A|+\rangle & \langle -|H_A|-\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_+ & 0 \\ 0 & E_- \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

类似地，我们也可以将相互作用能 $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)$ 用矩阵表示，因为原子偶极矩为

$$\boldsymbol{D} = e\boldsymbol{r} \tag{1.2.4}$$

显然，$\boldsymbol{D}$ 是奇宇称，由于 $|+\rangle$，$|-\rangle$ 有确定的宇称，于是

$$\begin{aligned} &\langle +|\boldsymbol{D}|+\rangle = 0 & &\langle -|\boldsymbol{D}|-\rangle = 0 \\ &\langle +|\boldsymbol{D}|-\rangle = \boldsymbol{D}_{+-} \neq 0 & &\langle -|\boldsymbol{D}|+\rangle = (\boldsymbol{D}_{+-})^* \neq 0 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

如果取 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 为氢原子的两个本征态 $\Psi_{211}(\boldsymbol{r})$ 和 $\Psi_{100}(\boldsymbol{r})$，则偶极矩阵元

$$\boldsymbol{D}_{+-} = \int \Psi_{211}^*(\boldsymbol{r}) e\boldsymbol{r}\, \Psi_{100}(\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r} \tag{1.2.6}$$

上式可以分为径向积分与角向积分的乘积，其中

$$径向积分=\int(2a_0^2)^{-3/2}\exp(-r/2a_0)er\left(\frac{2r}{\sqrt{3}a_0}\right)\times\exp(-r/a_0)r^2dr \tag{1.2.7}$$

$$角向积分=\int Y_{11}^*(\theta,\varphi)(\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{e}_z\cos\theta)\times Y_{00}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \tag{1.2.8}$$

这里 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为笛卡儿坐标的单位矢量.一般情况下,偶极矩阵元是复矢量,故可以描述为

$$\boldsymbol{D}_{+-}=\boldsymbol{d}_r+i\boldsymbol{d}_i \tag{1.2.9a}$$

$$\boldsymbol{D}_{-+}=\boldsymbol{d}_r-i\boldsymbol{d}_i \tag{1.2.9b}$$

$$\boldsymbol{d}_r=-2^7ea_0\boldsymbol{e}_x/3^5 \tag{1.2.9c}$$

$$\boldsymbol{d}_i=2^7ea_0\boldsymbol{e}_y/3^5 \tag{1.2.9d}$$

其中 $\boldsymbol{d}_r$ 和 $\boldsymbol{d}_i$ 是实矢量.这样,厄米算符 $\boldsymbol{D}$ 可以在原子本征态矢集 $\{|\pm\rangle\}$ 展开的二维希尔伯特空间中表示为非对角矩阵形式:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{d}_r+i\boldsymbol{d}_i\\ \boldsymbol{d}_r-i\boldsymbol{d}_i & 0\end{bmatrix} \tag{1.2.10}$$

所以系统的哈密顿算符可以写成矩阵形式:

$$\begin{aligned}H&=\begin{bmatrix}E_+ & 0\\ 0 & E_-\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{d}_r+i\boldsymbol{d}_i\\ \boldsymbol{d}_r-i\boldsymbol{d}_i & 0\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{E}\\ &=(E_+-E_-)/2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+(E_++E_-)/2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &\quad-(\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E})\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+(\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{E})\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

选取 $E_++E_-=0$,并考虑到

$$\omega_0=(E_+-E_-)/\hbar \tag{1.2.12}$$

同时应用泡利算符 σ_i 来表示(1.2.11)式中描述二能级原子的矩阵,则(1.2.11)式成为

$$H=\frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_3-(\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E})\sigma_1+(\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{E})\sigma_2 \tag{1.2.13}$$

其中泡利算符 σ_i 定义为

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\qquad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

它们分别是描述二能级原子的偶极矩和能量的算符,并且满足对易关系:

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2i\sigma_k \tag{1.2.14}$$

第三节　光学布洛赫方程

在得出了描述二能级原子与电磁场 $\boldsymbol{E}$ 相互作用系统的哈密顿算符表示式(1.2.13)式以后,由此出发,就可以进一步讨论原子系统的算符的时间演化.我们知道,任意不显含时间的算符 A 的运动方程满足

$$\frac{d}{dt}A=\frac{i}{\hbar}[H,A] \tag{1.2.15}$$

那么根据(1.2.13)式,并应用(1.2.14)式可得原子算符的海森伯方程为

$$\frac{d}{dt}\sigma_1(t)=-\omega_0\sigma_2(t)+\frac{2}{\hbar}[\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}(t)]\sigma_3(t) \tag{1.2.16a}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_2(t)=\omega_0\sigma_1(t)+\frac{2}{\hbar}[\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}(t)]\sigma_3(t) \tag{1.2.16b}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_3(t)=-\frac{2}{\hbar}[\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}(t)]\sigma_2(t)-\frac{2}{\hbar}[\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{E}(t)]\sigma_1(t) \tag{1.2.16c}$$

由此可以得知原子算符的时间行为.

要精确求解方程(1.2.16)式是相当复杂的，特别当电磁场用算符 $\boldsymbol{E}(t)$ 表示时，情况更为复杂. 一种简化是略去场算符与原子算符间的量子关联，即假定在计算算符乘积 $\boldsymbol{E}(t)\cdot\sigma_j(t)$ 的期望值时，可以写为两算符期望值之积，这种近似通常称为退关联近似，也就是令

$$\langle \boldsymbol{E}(t)\cdot\sigma_j(t)\rangle=\langle \boldsymbol{E}(t)\rangle\langle\sigma_j(t)\rangle \tag{1.2.17}$$

其次，在准经典理论里，常常假定电磁场算符期望值 $\langle\boldsymbol{E}(t)\rangle$ 可采用经典场 $\boldsymbol{E}(t)$ 来代替，这样，如果我们应用退关联近似，并把方程(1.1.16)式中的电场算符的期望值用经典场取代，并且令

$$R_i(t)=\langle\sigma_i(t)\rangle \qquad (i=1,2,3) \tag{1.2.18}$$

则可得准经典理论下原子与辐射场相互作用的动力学方程：

$$\begin{aligned}
\dot{R}_1(t)&=-\omega_0R_2(t)+\frac{2}{\hbar}\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}_0)R_3(t)\\
\dot{R}_2(t)&=\omega_0R_1(t)+\frac{2}{\hbar}\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}_0)R_3(t)\\
\dot{R}_3(t)&=-\frac{2}{\hbar}\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}_0)R_1(t)-\frac{2}{\hbar}\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}_0)R_2(t)
\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

在进一步讨论方程(1.2.19)式的解以前，我们先分析一下期望值 $R_i(t)$ $(i=1,2,3)$ 的物理意义. 由方程(1.2.13)式可以看出，$\hbar\omega_0R_3(t)/2$ 表示原子的能量，所以 $R_3(t)$ 对应原子能量算符的期望值. 而由方程(1.2.10)和(1.2.13)式可知，$R_1(t)$ 和 $R_2(t)$ 两者表示原子的偶极矩算符的期望值.

如果把(1.2.19)式分别乘上 $R_1(t)$、$R_2(t)$ 和 $R_3(t)$ 并相加，则知

$$R_1(t)\dot{R}_1(t)+R_2(t)\dot{R}_2(t)+R_3(t)\dot{R}_3(t)=0 \tag{1.2.20}$$

这说明

$$R_1^2(t)+R_2^2(t)+R_3^2(t)=\text{常数值} \tag{1.2.21}$$

而且可进一步证明，此常数为1. 因为若令原子态的一般态为

$$|\Psi\rangle=a|+\rangle+b|-\rangle \tag{1.2.22}$$

那么显然有

$$R_1(0)=\langle\Psi|\sigma_1|\Psi\rangle=a^*b+ab^*$$

$$R_2(0)=\langle\Psi|\sigma_2|\Psi\rangle=-i(a^*b-ab^*)$$

$$R_3(0)=\langle\Psi|\sigma_3|\Psi\rangle=|a|^2-|b|^2$$

也就是说

$$R_1^2(0)+R_2^2(0)+R_3^2(0)=(|a|^2+|b|^2) \tag{1.2.23}$$

由于态函数满足归一化的要求，即$\langle\Psi|\Psi\rangle=1$，于是$|a|^2+|b|^2=1$. 这就是说

$$R_1^2(t)+R_2^2(t)+R_3^2(t)=1 \tag{1.2.24}$$

它说明，原子态随时间t的变化保持概率守恒. 我们称$\boldsymbol{R}(t)$ $[R_1(t),R_2(t),R_3(t)]$为原子的赝自旋矢量，则(1.2.24)式表明，描述原子系统的赝自旋矢量随时间t变化保持在单位球面上，如图1.2.2所示.

通常也可以选定态$|+\rangle$和$|-\rangle$是$\Delta m=0$的跃迁态. 于是，可以选择态的相位因子使得偶极矩的$\boldsymbol{d}_i$等于零，并令

$$\frac{2}{\hbar}\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}=\frac{2d}{\hbar}\boldsymbol{U}_d\cdot\boldsymbol{E}=\kappa E \tag{1.2.25}$$

这里标量E表示电场矢量$\boldsymbol{E}$沿单位矢量$\boldsymbol{U}_d$的分量，κ定义为

$$\hbar\kappa/2=d \tag{1.2.26}$$

$\boldsymbol{U}_d$和d分别表示偶极矩的方向和数值. 这样描述原子和电磁场相互作用的赝自旋矢量满足的运动方程(1.2.19)式简化为

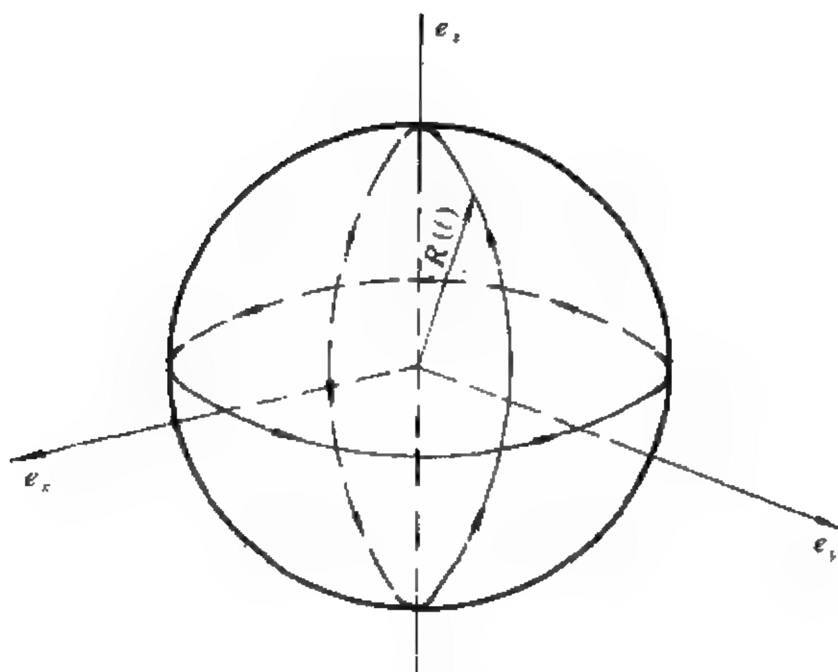


图 1.2.2 赝自旋矢量 $\boldsymbol{R}(t)$随 t 演化的单位球面

$$\dot{R}_1(t)=-\omega_0 R_2(t)$$

$$\dot{R}_2(t)=\omega_0 R_1(t)+\kappa E(t,\boldsymbol{r}_0)R_3(t) \tag{1.2.27}$$

$$\dot{R}_3(t)=-\kappa E(t,\boldsymbol{r}_0)R_2(t)$$

它与电偶极子满足的磁共振方程类似.同样,方程(1.2.27)式也可如磁共振方程一样改写为受转矩力 $\boldsymbol{\Omega}$ 作用下矢量 $\boldsymbol{R}(t)$的随时间发生旋进的运动方程.若令矢量 $\boldsymbol{\Omega}(t)$的分量为

$$\Omega_1(t)=-\kappa E,\qquad \Omega_2(t)=0,\qquad \Omega_3(t)=\omega_0 \tag{1.2.28}$$

那么矢量 $\boldsymbol{R}(t)[R_1(t),R_2(t),R_3(t)]$满足的运动方程(1.2.27)式可写为

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{\Omega}(t)\times\boldsymbol{R}(t) \tag{1.2.29}$$

我们称描述二能级原子与辐射场相互作用的赝自旋运动方程

(1.2.27)或(1.2.29)式为光学布洛赫方程.

在这里，光场对原子的效应通过转矩力 $\Omega(t)$ 体现，它导致原子赝自旋矢量 $R(t)$ 随时间在单位球面上旋进. 光学布洛赫方程是准经典理论框架内研究原子(单个或集合原子)与辐射场相互作用系统问题的基本方程.

第四节　二能级原子动力学行为的密度矩阵描述

上节，我们从海森伯绘景中的海森伯运动方程出发，讨论了一个无衰变的二能级原子与经典电磁场相互作用的动力学行为. 下面在薛定谔绘景中，我们利用密度算符理论来讨论一个衰变二能级原子与经典电磁场 $E(t)$ 作用时的动力学行为. 首先用密度算符理论来重新讨论一个无衰变的二能级原子与经典电磁场作用的情况，然后再讨论有衰变的二能级原子的情况.

一、不计及衰变时描述二能级原子的密度矩阵方程

在薛定谔绘景中，对于单个二能级原子系统，我们可以将 t 时刻的态函数 $|\Psi(t)\rangle$ 按其本征态矢集展开为

$$|\Psi(t)\rangle=C_+(t)|+\rangle+C_-(t)|-\rangle \qquad (1.2.30)$$

其中 $C_+(t)$，$C_-(t)$ 分别表征 t 时刻原子处在其本征态 $|+\rangle$，$|-\rangle$ 的概率幅. 将态矢 $|+\rangle$，$|-\rangle$ 写成矩阵形式：

$$|+\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad |-\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad (1.2.31)$$

则(1.2.30)式表示为

$$|\Psi(t)\rangle=\begin{bmatrix}C_+(t)\\C_-(t)\end{bmatrix} \qquad (1.2.32)$$

这样，二能级原子的密度算符可写为

$$\rho(t)=|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|=\begin{bmatrix}C_+C_+^* & C_+C_-^* \\ C_-C_+^* & C_-C_-^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--}\end{bmatrix}$$

(1.2.33)

显然，矩阵元 ρ_{++} 和 ρ_{--} 分别表示 t 时刻原子处在本征态 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 的概率.

由于我们可以选择适当的相位因子使得原子在 y 方向的偶极矩 d_i 等于零，这时对于与经典电磁场相互作用的无衰变二能级原子系统，其哈密顿算符(1.2.13)式简化为

$$H=\hbar\omega_0\sigma_3/2-(\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E})\sigma_1 \qquad (1.2.34)$$

注意到算符 σ_1，σ_3 与本征态矢 $|+\rangle$，$|-\rangle$ 之间满足关系式：

$$\begin{aligned}&\sigma_3|+\rangle=|+\rangle, \qquad \sigma_3|-\rangle=-|-\rangle \\ &\sigma_1|+\rangle=|-\rangle, \qquad \sigma_1|-\rangle=|+\rangle\end{aligned} \qquad (1.2.35)$$

将(1.2.32)和(1.2.34)式代入薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle=H|\Psi(t)\rangle \qquad (1.2.36)$$

并利用本征态矢 $|+\rangle$，$|-\rangle$ 间的正交性，可得概率幅随时间的演化方程：

$$i\dot{C}_+=\frac{1}{2}\omega_0C_+-\frac{1}{2}\kappa E(C_++C_-) \qquad (1.2.37)$$

$$i\dot{C}_-=-\frac{1}{2}\omega_0C_--\frac{1}{2}\kappa E(C_++C_-) \qquad (1.2.38)$$

这里 κ 与(1.2.26)式相同. 利用方程(1.2.37)，(1.2.38)式及其复共轭，可知 t 时刻系统的密度矩阵元随时间的演化遵循方程：

$$\frac{d}{dt}\rho_{++}=\left(\frac{d}{dt}C_+\right)C_+^*+C_+\left(\frac{d}{dt}C_+^*\right)=-i\kappa E(\rho_{+-}-\rho_{-+})/2$$

(1.2.39a)

$$\frac{d}{dt}\rho_{--}=i\kappa E(\rho_{+-}-\rho_{-+})/2 \qquad (1.2.39b)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{+-} = -i\omega_0\rho_{+-} - i\kappa E(\rho_{++} - \rho_{--})/2 \qquad (1.2.39c)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{-+} = i\omega_0\rho_{-+} + i\kappa E(\rho_{++} - \rho_{--})/2 \qquad (1.2.39d)$$

这就是与经典电磁场相互作用的无衰变二能级原子的密度矩阵满足的运动方程.

下面,我们来讨论方程(1.2.39)表征的物理意义. 从(1.2.39a)和(1.2.39b)式可以看到

$$\frac{d}{dt}(\rho_{++} + \rho_{--}) = 0 \qquad (1.2.40)$$

即

$$\rho_{++}(t) + \rho_{--}(t) = \rho_{++}(0) + \rho_{--}(0) = 1 \qquad (1.2.41)$$

这说明原子处在其本征态$|+\rangle$,$|-\rangle$的概率和不随时间演化,保持为 1. 比较(1.2.41)和(1.2.24)式,有

$$R_1^2(t) + R_2^2(t) + R_3^2(t) = \rho_{++}(t) + \rho_{--}(t) \qquad (1.2.42)$$

上式表明,在海森伯绘景中,矢量 $\boldsymbol{R}(t)[R_1(t), R_2(t), R_3(t)]$的标积反映了 t 时刻原子处在本征态$|+\rangle$,$|-\rangle$的概率和.

如果作变量代换:

$$\rho_1 = \rho_{+-} + \rho_{-+}, \qquad \rho_2 = i(\rho_{+-} - \rho_{-+}), \qquad \rho_3 = \rho_{++} - \rho_{--} \qquad (1.2.43)$$

则方程(1.2.39)式变为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_1 &= -\omega_0\rho_2 \\ \frac{d}{dt}\rho_2 &= \omega_0\rho_1 + \kappa E\rho_3 \qquad (1.2.44) \\ \frac{d}{dt}\rho_3 &= -\kappa E\rho_2 \end{aligned}$$

显然,(1.2.44)式与(1.2.27)式的形式完全一样,$\rho_i(t)$ ($i=1,2,$

3)与算符 σ_i 的期望值 $R_i(t)$ $(i=1,2,3)$相对应. 因而 $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ 与 $R_1(t)$, $R_2(t)$具有相同的物理意义,它们表示原子偶极矩随时间的演化,从而密度矩阵元 $\rho_{+-}(t)$、$\rho_{-+}(t)$描述了二能级原子的复偶极矩;原子处在态$|+\rangle$和态$|-\rangle$的概率差 $\rho_3=\rho_{++}-\rho_{--}$ 则反映了原子的能量算符的期望值 $R_3(t)$. 可见我们在讨论原子与辐射场相互作用系统时,利用密度矩阵同样可以给出简明的物理描述.

二、计及衰变效应时的密度矩阵方程

我们知道,实际原子只有当其处在基态时才是稳定的. 而处于激发态的原子由于自发辐射、原子间的碰撞以及原子与样品室的碰撞等过程,则会发生衰变,而具有有限的寿命. 下面,我们考虑一个有衰变的二能级原子与经典辐射场相互作用系统,利用密度矩阵理论来研究衰变效应对原子动力学行为的影响.

在考虑到衰变效应以后,原子与经典电磁场的相互作用哈密顿量仍可用(1.2.34)式来描述. 这里我们只要唯象地引入衰变项到方程(1.2.37)和(1.2.38)式就可揭示衰变过程对原子动力学行为的影响. 这时,(1.2.37)和(1.2.38)式变为

$$\dot{C}_+=-\frac{1}{2}\gamma_+C_++\frac{i}{2}\kappa E(C_++C_-)-\frac{1}{2}i\omega_0C_+ \qquad (1.2.45)$$

$$\dot{C}_-=-\frac{1}{2}\gamma_-C_-+\frac{i}{2}\kappa E(C_++C_-)+\frac{1}{2}i\omega_0C_+ \qquad (1.2.46)$$

其中 γ_+,γ_-分别对应态$|+\rangle$和态$|-\rangle$的衰变系数. 由上式看出,引入衰变项以后,即使无电磁场与原子发生作用,即($E=0$),处于态$|+\rangle$(或$|-\rangle$)的原子仍是不稳定的,它的概率按照指数规律 $\exp(-\gamma_+t)$[或 $\exp(-\gamma_-t)$]衰变. 通常把概率衰变到其初始值的 $1/e$ 时的时间,定义为原子处在态$|+\rangle$(或$|-\rangle$)时的寿命,其值为 $1/\gamma_+$(或 $1/\gamma_-$).

为计算简单起见,这里我们只讨论 $\gamma_+=\gamma_-=\gamma$,即原子处在态$|+\rangle$、态$|-\rangle$的寿命相同的情况. 这时,应用与推导方程(1.2.39)式同样的方法,利用方程(1.2.45)和(1.2.46)式可以得到原子密

度矩阵的运动方程：

$$\dot{\rho}_{++} = -\gamma\rho_{++} - i\kappa E(\rho_{+-} - \rho_{-+})/2 \qquad (1.2.47a)$$

$$\dot{\rho}_{--} = -\gamma\rho_{--} + i\kappa E(\rho_{+-} - \rho_{-+})/2 \qquad (1.2.47b)$$

$$\dot{\rho}_{+-} = -(\gamma + i\omega_0)\rho_{+-} - i\kappa E(\rho_{++} - \rho_{--})/2 \qquad (1.2.47c)$$

$$\dot{\rho}_{-+} = -(\gamma - i\omega_0)\rho_{-+} + i\kappa E(\rho_{++} - \rho_{--})/2 \qquad (1.2.47d)$$

将(1.2.47a)和(1.2.47b)式相加，得

$$\frac{d}{dt}(\rho_{++} + \rho_{--}) = -\gamma(\rho_{++} + \rho_{--}) \qquad (1.2.48)$$

显然

$$\rho_{++}(t) + \rho_{--}(t) = [\rho_{++}(0) + \rho_{--}(0)]\exp(-\gamma t) = \exp(-\gamma t) \qquad (1.2.49)$$

上式表明，二能级原子的寿命为 $1/\gamma$. 当 $t \to \infty$ 时，$\rho_{++}(\infty) + \rho_{--}(\infty) = 0$，这说明在时间很长时，二能级原子将完全衰变. 这是由于二能级原子只是实际原子的一种理想模型，实际原子都有许多能级，由于自发发射、非弹性碰撞等衰变过程的影响，原子将从态$|+\rangle$或态$|-\rangle$完全衰变到比它们能量低的态(基态或亚稳态)，所以原子处在态$|+\rangle$、态$|-\rangle$的概率和最终为零.

将(1.2.43)式代入(1.2.47)式，得

$$\dot{\rho}_1 = -\gamma\rho_1 - \omega_0\rho_2$$

$$\dot{\rho}_2 = -\gamma\rho_2 + \kappa E\rho_3 + \omega_0\rho_2 \qquad (1.2.50)$$

$$\dot{\rho}_3 = -\gamma\rho_3 - \kappa E\rho_2$$

由于 $\rho_i(t)$ 与原子算符的期望值 $R_i(t)$ 有相同的物理意义，与(1.2.29)式相似，也可将上式写成矢量的形式，即

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = -\gamma\,\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{\rho}\,(t) \tag{1.2.51}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}(t)$ 代表矢量[$\rho_1(t)$,$\rho_2(t)$,$\rho_3(t)$].原子因电磁场的作用所受的转矩力 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 与(1.2.28)式完全相同.从(1.2.51)式可以发现,描述原子动力学行为的矢量 $\boldsymbol{\rho}(t)$ 在转矩力 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 的作用下沿顺时针方向旋进.与不考虑原子衰变现象的情况相比,由于衰变过程的效应,矢量 $\boldsymbol{\rho}(t)$ 的长度[如(1.2.49)式所示]已不再保持为恒量 1,而是随着时间的变化逐渐减少,以致为零.

参 考 文 献

[1] L. Allen and J. H. Eberly, Optical Resonance and Two-level Atoms, Wiley, 1975.

[2] M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Laser Physics, Addison-Wesley, 1974.

[3] H. Haken, Light, Vol. 1, North-Holland, 1981.

[4] P. Meystre and M. Sargent III, Elements of Quantum Optics, Springer-Verlag, 1990.

[5] A. C. Newell and J. V. Moloney, Nonlinear Optics, Addison-Wesley, 1992.

[6] R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Academic, 1992.

[7] 李福利,高等激光物理学,中国科学技术大学出版社,1992.

[8] 彭金生,共振荧光与超荧光,科学出版社,1993.

第三章　光场的量子描述

上一章中，我们在讨论二能级原子与辐射场相互作用系统时，对原子的描述采用量子化算符，而对辐射场则采用经典电磁场描述. 但经典电磁场是不能全面描述光场的波粒二象性的. 为了揭示光场的波粒二象性，充分反映光场与物质相互作用系统的量子特征，必须将辐射场量子化. 下面我们在对电磁场的经典描述作一简要概述以后，着重介绍辐射场的量子化. 然后为了对光场的量子描述有较全面的了解，我们介绍了从不同方面描述光场的几种态函数.

第一节　真空中电磁场的经典描述

在经典电动力学里，真空中的电磁场借助拉格朗日(Lagrangian)密度 $\mathscr{L}$ 来描述：

$$\mathscr{L}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)^2-c^2(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right] \tag{1.3.1}$$

其中 ε_0 是真空中的介电常量，$\boldsymbol{A}$ 是满足库仑(Coulomb)规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 的矢量势. 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{B}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} \tag{1.3.2a}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.3.2b}$$

应用关系式

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{A}}=-\varepsilon_0 c^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\varepsilon_0 c^2\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{1.3.3a}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{A}}}=\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{A}} \tag{1.3.3b}$$

并解拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)}\right]-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{A}}=0 \tag{1.3.4}$$

可得麦克斯韦(Maxwell)方程组的第一式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=\frac{1}{c^2}\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{1.3.5a}$$

由(1.3.2)式可直接得出麦克斯韦方程组的其余三式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=-\nabla\times\boldsymbol{E} \tag{1.3.5b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.3.5c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{1.3.5d}$$

此外，由(1.3.2)和(1.3.5a)式容易得到电磁场矢势 $\boldsymbol{A}$ 满足的波动方程：

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\boldsymbol{A}=0 \tag{1.3.6}$$

与矢势 A 共轭的广义动量 $\boldsymbol{\Pi}$ 可由(1.3.1)式定义为

$$\boldsymbol{\Pi}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}=-\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1.3.7}$$

把(1.3.7)式代入(1.3.1)式，得知真空中电磁场的拉格朗日密度可表示为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2 \tag{1.3.8}$$

于是真空中电磁场的哈密顿函数为

$$H_F=\int\left(\boldsymbol{\Pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\mathscr{L}\right)d^3\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\Pi}^2+\varepsilon_0 c^2(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right]d^3\boldsymbol{r} \tag{1.3.9}$$

电磁场的动量 P_F 和角动量 J_F 可表示为

$$\boldsymbol{P}_F=\int d^3\boldsymbol{r}\,\frac{\varepsilon_0}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=-\frac{1}{c}\int d^3\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\Pi}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})] \qquad (1.3.10)$$

$$\boldsymbol{J}_F=-\int d^3\boldsymbol{r}\,\frac{1}{c}\{\boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{\Pi}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})]\} \qquad (1.3.11)$$

如果假定电磁场限定于边长为 L 的立方腔体内，腔体的立方体积 $V=L^3$，而且在立方体的腔壁上满足周期性边界条件，那么波动方程(1.3.6)式的解可利用傅里叶(Fourier)级数展开成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k[\boldsymbol{A}_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{A}_k^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}] \qquad (1.3.12)$$

这里，$\boldsymbol{A}_k^*(t)$，$\boldsymbol{A}_k(t)$是傅里叶级数的展开系数，它们表征电磁波的振幅. $\boldsymbol{k}$ 为波矢量，它反映电磁波的传播方向. 由周期性边界条件得知，波矢 $\boldsymbol{k}$ 满足

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{L}(\boldsymbol{e}_x n_x+\boldsymbol{e}_y n_y+\boldsymbol{e}_z n_z) \qquad (n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$(1.3.13)$$

把(1.3.12)式代入方程(1.3.6)式可得展开系数 $\boldsymbol{A}_k(t)$满足的方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{A}_k(t)+\omega_k^2\boldsymbol{A}_k(t)=0 \qquad (1.3.14)$$

其解为

$$\boldsymbol{A}_k(t)=\boldsymbol{A}_k(0)\exp(-i\omega_k t) \qquad (1.3.15)$$

其中，$\omega_k=ck$ 为电磁场波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的模的频率.

由于矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$满足库仑规范的要求，所以由方程(1.3.12)式知

$$0=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_k\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_k(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$
$$-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_k^*(t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\} \qquad (1.3.16)$$

从而有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_k(t)=0 \tag{1.3.17}$$

可见频率为 ω_k 的电磁波振幅的振动方向与电磁波的传播方向总是垂直的. 因此我们可以选择两个彼此正交且与 $\boldsymbol{k}$ 正交的单位矢量 $\boldsymbol{e}_{k_j}(j=1,2)$来描述电磁波振幅 $\boldsymbol{A}_k(t)$的方向,它们满足如下关系式:

$$\boldsymbol{e}_{k_j}\cdot\boldsymbol{e}_{k_{j'}}=\delta_{jj'},\quad \boldsymbol{e}_{k_j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{e}_{k_1}\times\boldsymbol{e}_{k_2}=\boldsymbol{k}/k \tag{1.3.18}$$

这里 $\boldsymbol{e}_{k_j}$ 通常称为电磁场的极化单位矢量,它描述电磁场的偏振方向. 所以,矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$可表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_j}[\boldsymbol{e}_{k_j}A_{k_j}(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$
$$+\boldsymbol{e}_{K_j}A^*_{k_j}(t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3.19}$$

于是,与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$相对应的广义动量 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)$以及电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$和磁场强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$分别为

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_j}[\boldsymbol{e}_{k_j}\Pi_{k_j}(t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+\boldsymbol{e}_{k_j}\Pi^*_{k_j}(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$
$$=i\varepsilon_0\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_j}\omega_k[\boldsymbol{e}_{k_j}A^*_{k_j}(t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$
$$-\boldsymbol{e}_{k_j}A_{k_j}(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3.20}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=i\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_j}\omega_k[\boldsymbol{e}_{k_j}A_{k_j}(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$
$$-\boldsymbol{e}_{k_j}A^*_{k_j}(t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3.21}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=i\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_j}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{k_j}A_{k_j}(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$
$$-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{k_j}A^*_{k_j}(t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3.22}$$

将(1.3.20)和(1.3.21)式代入(1.3.9—1.3.11)式,即可得电磁场的能量,动量和角动量的表示式. 这样,我们就把腔体 V 中的电磁场分解为一组无限多个分离的平面波模式,每一个模式由波矢量

$\boldsymbol{k}$ 和极化矢量 $\boldsymbol{e}_{k_j}(j=1,2)$ 表征.

电磁场的偏振情况是一个应该在概念上明确的问题. (1.3.18)式表明,电磁波可由两个彼此独立、相互垂直且与电磁波的传播方向垂直的偏振分量组成,单位极化矢量 $\boldsymbol{e}_{k_j}(j=1,2)$ 表征偏振分量的方向. 在这种情况下波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的电磁场,其电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 的正频分量由两偏振分量之和表征:

$$\boldsymbol{E}_{+}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_{k_1}E_1\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\delta_1)] \\ +\boldsymbol{e}_{k_2}E_2\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\delta_2)] \tag{1.3.23}$$

其中 E_1 和 E_2 是电场分量的振幅,δ_1 和 δ_2 为它们的相位角.

如果两分量的相位角差 $\delta_1-\delta_2=0$ 或 π,且 $E_1=E_2=E$,则上式成为

$$\boldsymbol{E}_{+}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k_1}\pm\boldsymbol{e}_{k_2})\sqrt{2}E\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\delta_1)] \tag{1.3.24}$$

(1.3.24)式表明电场具有沿极化方向为 $\boldsymbol{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k_1}\pm\boldsymbol{e}_{k_2})$ 振动的分量,我们称此时的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 具有线偏振性质. 由这样的电磁场所描述的光为线偏振光.

如果两分量的相位角差 $\delta_1-\delta_2=\pm\pi/2$,且 $E_1=E_2=E$,则(1.3.23)式简化为

$$\boldsymbol{E}_{+}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k_1}\pm i\boldsymbol{e}_{k_2})\sqrt{2}E\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\delta_1)] \tag{1.3.25}$$

这里 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k_1}\pm i\boldsymbol{e}_{k_2})$ 为复单位极化矢量. 随着时间 t 的演化,上式给定的电场矢量的振幅将在 $\boldsymbol{e}_{k_1}$ 和 $\boldsymbol{e}_{k_2}$ 所确定的复平面内变化,所以称这种情况的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 处于圆偏振状态. 显然,$\boldsymbol{E}_{+}(\boldsymbol{r},t)$ 的实部为

$$E[\boldsymbol{e}_{k_1}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\delta_1)\mp\boldsymbol{e}_{k_2}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\delta_1)] \tag{1.3.26}$$

(1.3.25)和(1.3.26)式表明处于圆偏振状态的电磁场其电场强度值不随时间变化. 电场矢量随时间的演化而绕着波矢量 $\boldsymbol{k}$ 以频率 $\omega=ck$ 旋转，在这种情况下，如果我们迎着波矢传播方向观察极化矢量 $\boldsymbol{e}_{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k_1}+i\boldsymbol{e}_{k_2})$ 的电磁波，就会发现它沿逆时针方向旋转，通常称它所描述的光为左圆偏振光；而把极化矢量为 $\boldsymbol{e}_{R}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k_1}-i\boldsymbol{e}_{k_2})$ 的电磁波描述的光称为右圆偏振光.

第二节　辐射场的量子化

现在，我们来讨论辐射场的量子化问题. 光波是电磁波，所以从(1.3.19)和(1.3.20)式出发，对电磁场进行量子化，也就实现了辐射场的量子化.

一、辐射场的量子化

电磁场的量子化方法是把描述电磁场的经典物理量 $A_{k_j}(t)$ 和 $\Pi_{k_j}(t)$ 用算符 $A_{k_j}(t)$ 和 $\Pi_{k_j}(t)$ 来取代，即将电磁场的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和广义动量 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)$ 用算符 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)$ 来取代，并且令它们满足对易关系：

$$[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)]=i\hbar \tag{1.3.27}$$

更为有用的是引入两个新算符 $a_{k_j}(t)$ 和 $a_{k_j}^{+}(t)$ 来取代算符 $A_{k_j}(t)$ 和 $\Pi_{k_j}(t)$，它们可定义为

$$A_{k_j}(t)=\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}}a_{k_j}(t) \tag{1.3.28}$$

$$\Pi_{k_j}(t)=i\left(\frac{\hbar\omega_k\varepsilon_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a_{k_j}^{+}(t) \tag{1.3.29}$$

由(1.3.27)和(1.3.29)式得知它们之间满足的对易关系为

$$[a_{k_j}, a^{\dagger}_{k'_{j'}}] = \delta_{kk'}\delta_{jj'} \tag{1.3.30a}$$

$$[a_{k_j}, a_{k'_{j'}}] = [a^{\dagger}_{kj}, a^{\dagger}_{k'j'}] = 0 \tag{1.3.30b}$$

把(1.3.28)和(1.3.29)式代入(1.3.19)和(1.3.20)式，可得电磁场的矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和广义动量算符 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)$：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{k_j}\left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{k_j}[a_{k_j}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) + a^{\dagger}_{k_j}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3.31}$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t) = i\sum_{k_j}\left(\frac{\hbar\omega_k\epsilon_0}{2V}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{k_j}[-a_{k_j}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) + a^{\dagger}_{k_j}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3.32}$$

将上述两式代入(1.3.9)式，并对体积 V 积分，经过简单的代数运算后得到

$$\begin{aligned} H_F = -\frac{\hbar}{4V}\sum_{k_j}\sum_{k'_{j'}}(\omega_k\omega_{k'})^{1/2}[\boldsymbol{e}_{k_j}\cdot\boldsymbol{e}_{k'_{j'}} - (\boldsymbol{e}_{k_j}\times\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{e}_{k'_{j'}}\times\boldsymbol{k}')/kk'] \\ \times\int d\boldsymbol{V}[a_{k_j}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - a^{\dagger}_{k_j}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \\ \times[a_{k'_{j'}}\exp(i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}) - a^{\dagger}_{k'_{j'}}\exp(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r})] \end{aligned} \tag{1.3.33}$$

其中已应用了

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{e}_{k_j}e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = \pm i(\boldsymbol{e}_{k_j}\times\boldsymbol{k})e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.3.34}$$

和关系式(1.3.18)式．注意到

$$\int\exp[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}]d^3\boldsymbol{r} = V\delta_{kk'} \tag{1.3.35}$$

我们可得

$$\begin{aligned} H_F = -\sum_{k_j}\sum_{k_{j'}}\frac{\hbar\omega_k}{4}\{(a_{k_j}a^{\dagger}_{k_{j'}} + a^{\dagger}_{k_j}a_{k_{j'}})[(\boldsymbol{e}_{k_j}\cdot\boldsymbol{e}_{k_{j'}}) \\ + (\boldsymbol{e}_{k_j}\times\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{e}_{k'_{j'}}\times\boldsymbol{k})/k^2] - (a_{k_j}a^{\dagger}_{k_{j'}} + a^{\dagger}_{k_j}a_{k_{j'}})[(\boldsymbol{e}_{k_j}\cdot\boldsymbol{e}_{k_{j'}}) \end{aligned}$$

$$+(\boldsymbol{e}_{k_j}\times\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{e}_{k'_{j'}}\times\boldsymbol{k})/\boldsymbol{k}^2]\}$$

根据矢量分析的通常规则：

$$(\boldsymbol{e}_{k_j}\times\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{e}_{k_{j'}}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{\delta}_{jj'} \qquad (1.3.36)$$

可得自由场的哈密顿量的简单表示式：

$$H_F=\sum_{K_j}\hbar\omega_k\left(a^\dagger_{k_j}a_{k_j}+\frac{1}{2}\right) \qquad (1.3.37)$$

对易关系(1.3.27)和(1.3.30)式是典型的玻色子对易关系. 这就是说，我们已证明了电磁场等价于一组玻色子，或者说，电磁场由一组分离谐振子构成，它由一组玻色子算符 a_{k_j}，$a^\dagger_{k_j}$ 描述. 按照海森伯运动方程，由(1.2.37)式可得算符 a_{k_j} 的时间依赖关系. 由于

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_{k_j}=[a_{k_j},H_F]=\hbar\omega_k a_{k_j} \qquad (1.3.38)$$

所以

$$a_{k_j}(t)=a_{k_j}(0)\exp(-i\omega_k t) \qquad (1.3.39)$$

应用上式 $a_{k_j}(t)$ 及其复共轭 $a^\dagger_{k_j}(t)$，再把矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 的表示式代入方程(1.3.2)式，则得到电磁场算符的表示式：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=i\sum_{k_j}\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2}\boldsymbol{e}_{k_j}[a_{k_j}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-a^\dagger_{k_j}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}] \qquad (1.3.40a)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=i\sum_{k_j}\left(\frac{\hbar}{2\omega_k\epsilon_0 V}\right)^{1/2}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{k_j})[a_{k_j}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-a^\dagger_{k_j}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]$$

(1.3.40b)

我们知道，(1.3.37)式所示的自由电磁场能量算符 H_F 的归一化本征函数具有 $|n_{k_1j_1},n_{k_2j_2},\cdots\rangle$ 的形式，或者缩记为 $|\{n_{kj}\}\rangle$，其中每一个 n_{kj} 均是正整数. 这表明，H_F 的本征态是由波矢为 $\boldsymbol{k}_1$、极化为 $\boldsymbol{e}_{k_1j_1}$ 模式的玻色子 $n_{k_1j_1}$ 和波矢为 $\boldsymbol{k}_2$、极化为 $\boldsymbol{e}_{k_2j_2}$ 模式的玻色子

$n_{k_2 j_2}\cdots$表示的，这些电磁场的玻色子也表征通常所说的光子.

根据玻色子算符的对易关系(1.3.30)式可以得知谐振子算符$a_{k_j}^+$和a_{k_j}的性质.由于它们满足下列关系：

$$a_{k_l j_l}|\{n_{k_j}\}\rangle=\sqrt{n_{k_l j_l}}|n_{k_1 j_1},n_{k_2 j_2},\cdots n_{k_l j_l}-1,\cdots\rangle \quad (1.3.41a)$$

$$a_{k_l j_l}^+|\{n_{k_j}\}\rangle=\sqrt{n_{k_l j_l}+1}|n_{k_1 j_1},n_{k_2 j_2},\cdots n_{k_l j_l}+1,\cdots\rangle \quad (1.3.41b)$$

$$a_{k_l j_l}^+ a_{k_l j_l}|\{n_{k_j}\}\rangle=n_{k_l j_l}|\{n_{k_j}\}\rangle(j=1,2) \quad (1.3.41c)$$

从而可以看出，$a_{k_l j_l}$对H_F的本征态的作用是湮没一个模式为$k_l j_l$的光子，而$a_{k_l j_l}^+$则是产生一个这种模式的光子.所以我们称a和a^+(或a_{k_j}和$a_{k_j}^+$)为光子的湮没和产生算符，而乘积算符a^+a(或$a_{k_j}^+a_{k_j}$)则称为光子数算符.

通过上述程序，我们已实现了辐射场的量子化，从而能采用光子产生和湮没算符$a_{k_j}^+$和a_{k_j}来描述光场.下面，我们来讨论光子的动量和自旋的性质.

二、光子的动量和自旋

将(1.3.31)和(1.3.32)式代入(1.3.10)式，即得光场动量的量子化的表述形式：

$$\boldsymbol{P}_F=\sum_{k_j}\frac{\hbar \boldsymbol{k}}{2}(a_{k_j}^+a_{k_j}+a_{k_j}a_{k_j}^+)=\sum_{k_j}\hbar \boldsymbol{k}\left(a_{k_j}^+a_{k_j}+\frac{1}{2}\right)$$

由于k的取值范围为$-\infty\to\infty$，所以$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\hbar \boldsymbol{k}/2=0$，因而上式简化为

$$\boldsymbol{P}_F=\sum_{k_j}\hbar \boldsymbol{k} a_{k_j}^+ a_{k_j} \quad (1.3.42)$$

上式表明，如果光场在某个模式k_j具有n_{k_j}个光子，那么其动量为$n_{k_j}\hbar \boldsymbol{k}$.当$n_{k_j}=1$时，即光场在该模式只有一个光子，那么光场的动量为$\hbar \boldsymbol{k}$，可见波矢量为$\boldsymbol{k}$的每个光子具有动量$\hbar \boldsymbol{k}$.

同样地，将(1.3.31)和(1.3.32)式代入(1.3.11)式，即可得出光场的角动量算符，下面我们来讨论这一问题.

由于

$$[\boldsymbol{\Pi}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})]_k=\sum_{lm}\varepsilon_{klm}\Pi_l(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_m=\sum_{\substack{l,m\\i,j}}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mij}\Pi_l\nabla_i A_j$$

利用关系式 $\sum_m\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mij}=\delta_{ki}\delta_{lj}-\delta_{kj}\delta_{li}$，有

$$[\boldsymbol{\Pi}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})]_k=\sum_l[\Pi_l\nabla_k A_l-\nabla_l(\Pi_l A_k)]$$

于是角动量密度的第 i 分量化为

$$\{\boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{\Pi}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})]\}_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}r_j[\boldsymbol{\Pi}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})]_k$$

$$=\sum_{j,k,l}\varepsilon_{ijk}r_j[\Pi_l\nabla_k A_l-\nabla_l(\Pi_l A_k)]$$

$$=\sum_l\Pi_l(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})_i A_l-\sum_{l,j,k}\nabla_l(\Pi_l\varepsilon_{ijk}r_j A_k)+\sum_{l,k}\varepsilon_{ilk}\Pi_l A_k$$

把上式代入(1.3.11)式，积分后第二项化为边界上的面积分，其值为零.因此电磁场的角动量可写为

$$\boldsymbol{J}_F=-\frac{1}{c}\sum_{l=1}^{3}\int d^3r\Pi_l(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})A_l-\frac{1}{c}\int d^3r\,\boldsymbol{\Pi}\times\boldsymbol{A}$$

(1.3.43)

显然，上式的第一项与坐标原点的选择有关，所以它代表轨道角动量.(1.3.43)式的第二项与坐标原点的选择无关，它是光场的内禀角动量，即自旋角动量.下面以频率为 ω_0、波矢量为 $\boldsymbol{k}_0$的光场为例，来讨论光场角动量的性质.

波矢量为 $\boldsymbol{k}_0$的光场，有两个彼此垂直的单位极化矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，且可选择

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{k}_0/k,\quad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0,\quad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{k}_0=0\qquad(1.3.44)$$

这样，在薛定谔绘景中，由(1.3.31)和(1.3.32)式表示的矢势算符

$A(r)$和广义动量算符$\Pi(r)$可写为

$$A(r,t)=\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega_0}\right)^{1/2}\{e_1 a_1 \exp(ik_0\cdot r)+e_1 a_1^+ \exp(-ik_0\cdot r)$$
$$+e_2 a_2 \exp(ik_0\cdot r)+e_2 a_2^+ \exp(-ik_0\cdot r)\}$$

(1.3.45)

$$\Pi(r,t)=-i\left(\frac{\hbar\omega_0\varepsilon_0}{2V}\right)^{1/2}\{e_1 a_1 \exp(ik_0\cdot r)-e_1 a_1^+ \exp(-ik_0\cdot r)$$
$$+e_2 a_2 \exp(ik_0\cdot r)-e_2 a_2^+ \exp(-ik_0\cdot r)\} \qquad (1.3.46)$$

将上述两式代入(1.3.43)式的第二项，则

$$J_S(t)=-\frac{1}{c}\int d^3r\Pi\times A=i\hbar\frac{k_0}{k_0}(a_2^+a_1-a_1^+a_2) \qquad (1.3.47)$$

这就是光场的自旋角动量算符，它表明自旋角动量与波矢量k_0平行或反平行. 下面，我们再来讨论光场自旋角动量算符的本征值和本征态矢.

假设只有波矢为k_0的一个光子，因它只有两种可能的独立极化方向，所以其状态可由态矢$|1,0\rangle$和$|0,1\rangle$的线性叠加态$\alpha|1,0\rangle+\beta|0,1\rangle$来描述，这里$|1,0\rangle$表示光子处于极化为$e_1$的态，而$|0,1\rangle$表示光子处于极化为$e_2$的态. 显然，算符

$$S=i\hbar(a_2^+a_1-a_1^+a_2) \qquad (1.3.48)$$

满足

$$\begin{aligned}&\langle 1,0|S|1,0\rangle=0, \qquad \langle 0,1|S|0,1\rangle=0\\&\langle 1,0|S|0,1\rangle=-i\hbar, \qquad \langle 0,1|S|1,0\rangle=i\hbar\end{aligned} \qquad (1.3.49)$$

因此，S 在态矢$|1,0\rangle$和$|0,1\rangle$表示的希尔伯特空间中的矩阵表示为

$$S=\begin{bmatrix}0 & -i\hbar\\ i\hbar & 0\end{bmatrix} \qquad (1.3.50)$$

求解其本征值方程：

$$\begin{bmatrix} 0 & -i\hbar \\ i\hbar & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{1.3.51}$$

得到算符 S 的本征值和本征态矢为

$$\begin{aligned} &\lambda_{+}=\hbar, \quad |1_{+}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle+i|0,1\rangle) \\ &\lambda_{-}=-\hbar, \quad |1_{-}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle-i|0,1\rangle) \end{aligned} \tag{1.3.52}$$

上式表明，在本征态矢 $|1_{+}\rangle$ 中，每个光子沿波矢量方向具有确定的自旋角动量. 显然，如果光子的自旋角动量值为 $\hbar$，表明光子处在态 $|1_{+}\rangle$，与(1.3.25)式的 $\boldsymbol{e}_L$ 相似，我们称它为左圆偏振光子；当光子处在态 $|1_{-}\rangle$，其自旋角动量为 $-\hbar$，这时则称它为右圆偏振光子. 另外，(1.3.52)式表明，光子的自旋角量子数 $s=1$，这说明光子为玻色子. 按角动量理论可知，自旋角动量的 z 分量为 $\hbar$，0，$-\hbar$，但(1.3.52)式表明，光场不存在自旋角动量的 z 分量为零的光子. 这是因为这里讨论的电磁场满足库仑规范，使得它只有 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 两个与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的独立的偏振方向，因而不存在自旋角动量 z 分量本征值为0的光子. 但光子可处在本征态 $|1_{+}\rangle$ 和 $|1_{-}\rangle$ 的叠加态：

$$\frac{1+i}{2}|1_{+}\rangle+\frac{1-i}{2}|1_{-}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle+|0,1\rangle)$$

或

$$\frac{1-i}{2}|1_{+}\rangle+\frac{1+i}{2}|1_{-}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle-|0,1\rangle)$$

其自旋角动量的期望值 $\langle S\rangle=0$，我们把处在 $\frac{1+i}{2}|1_{+}\rangle+\frac{1-i}{2}|1_{-}\rangle$ 或 $\frac{1-i}{2}|1_{+}\rangle-\frac{1+i}{2}|1_{-}\rangle$ 的光子称为线偏振光子.

第三节　描述光场的态函数

对于光场的许多量子特性，采用不同的态函数描述，可以较清楚地展示出来. 描述光场的态函数有许多种，如光场粒子数算符 $N(a^+a)$ 的本征态——粒子数态 $|n\rangle$；光场湮灭算符 a 的本征态——相干态 $|\alpha\rangle$；光场相位算符 Φ 的本征态——相位态 $|\theta\rangle$ 以及与光场压缩算符 $S(\zeta)=\exp\left[\frac{1}{2}(\zeta a^{+2}-\zeta^* a^2)\right]$ 直接相关的压缩态等等. 其中最基本的是粒子数态 $|n\rangle$，这是因为相干态、相位态以及压缩态等都可以用粒子数态矢集 $\{|n\rangle\}$ 的线性叠加明显表示出来. 我们把这一类态称为光场的纯态. 与纯态性质截然不同的另一类态称为光场的混沌态，在这类态中，我们仅知道光场以一定的概率处于某些态矢上，因而不能利用 $\{|n\rangle\}$ 将态矢明显地表示出来. 本节中，我们简单地讨论光场的粒子数态，相干态和相位态以及一种典型的混沌态——热光场态. 对于目前广泛讨论的压缩态则在第二篇第二章中再专门介绍.

一、光场的粒子数态

如果我们只考虑频率为 ω 的单模光场，那么单模光场的哈密顿量由(1.3.37)式得到

$$H=\hbar\omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right) \tag{1.3.53}$$

单模光场的光子数算符 $N=a^+a$ 的本征值方程为

$$N|n\rangle=n|n\rangle \tag{1.3.54}$$

由对易关系 $[a,a^+]=1$ 可知，本征值 n 为正整数，即 $n=0,1,2,\cdots$. 由系统的能量本征值方程

$$H|n\rangle=E_n|n\rangle \tag{1.3.55}$$

可知单模光场的能量本征值为

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \tag{1.3.56}$$

能级图如图1.3.1所示，当光场的能量由(1.3.56)式给定时，

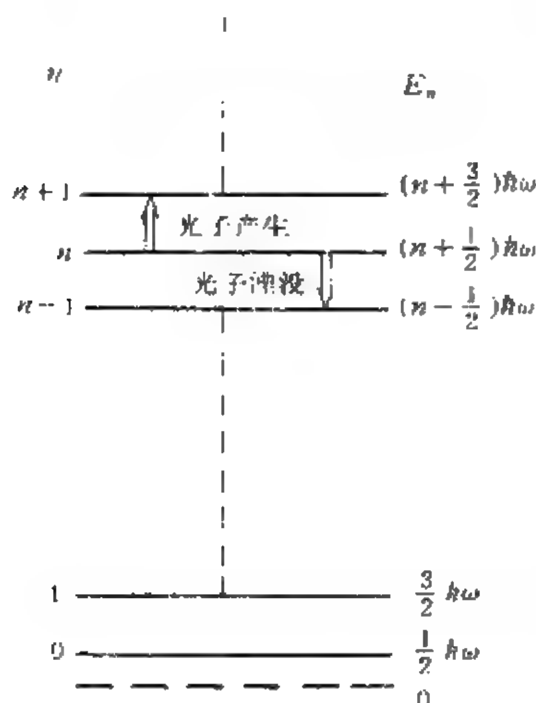


图 1.3.1　单模光场的本征能谱及产生和湮没光子的跃迁过程

系统处于第 n 个激发态.若 $n=0$，则系统处于真空态(基态)，但此时仍有零点能 $\hbar\omega/2$存在.从实验的角度来看，人们所观测的是相对于基态能量以上的激发程度，所以零点能没有实质的意义.例如处于能量为 E_n 的态$|n\rangle$，它有 n 个能量为 $\hbar\omega$ 的光量子能量、附加零点能 $\hbar\omega/2$，此时我们说，辐射场处于有 n 个光子的激发态$|n\rangle$.算符 a 和 a^+ 满足方程

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{1.3.57a}$$

和

$$a^{+} = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{1.3.57b}$$

它们表明，算符 a 的作用是使系统由具有 n 个光子的激发态$|n\rangle$转

化为只具有 $n-1$ 个光子的激发态 $|n-1\rangle$，所以，算符 a 为一个光子的湮没算符. 相反，算符 a^{+} 的作用使系统由 $|n\rangle$ 态转化为 $|n+1\rangle$ 态，所以称算符 a^{+} 为光子的产生算符. 因此，采用粒子数态描述光场时，可明显地揭示光的粒子性.

那么，粒子数态 $|n\rangle$ 能否揭示光场的波动性质呢？下面我们来讨论与经典电动力学中描述波动性质的典型物理量——电场强度——相对应的电场算符的期望值 $\langle n|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|n\rangle$. 由(1.3.40)式可知，单模辐射场的电场算符表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}\{a\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]-a^{+}\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\}$$

(1.3.58)

利用(1.3.57)式可知，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 在态矢 $|n\rangle$ 中的期望值为

$$\langle n|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|n\rangle=0 \tag{1.3.59}$$

上式表明，由粒子数态 $|n\rangle$ 表征的光场，其电场强度的期望值对于所有的时间 t 和所有的空间位置 $\boldsymbol{r}$ 均等于零. 因此，采用粒子数态 $|n\rangle$ 描述光场，不能揭示光的波动性.

用粒子数态 $|n\rangle$ 描述的光场，其光子数的不确定度显然为零，因为

$$(\Delta n)^2=\langle n|(N-n)^2|n\rangle \tag{1.3.60}$$

于是有

$$\Delta n=0$$

通常也称(1.3.60)式表征光子数的涨落. 显然，在粒子数态 $|n\rangle$ 中，由于光子数已确定地给出，所以它的涨落为零. 不过由实际光源产生的单模光场中，并没有非常确定的光子数. 实验中测定的只是光的强度，但光的强度是与光子数成正比的量. 所以确定的光子数对应确定的光场强度.

此外，考虑到厄米算符 N 的本征态矢集 $\{|n\rangle\}$ 具有完备性：

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I$$

所以可将光场的一般态表述为

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \tag{1.3.61}$$

式中，$|C_n|^2 = |\langle n|\Psi\rangle|^2$表征光场处在粒子数态$|n\rangle$的概率.

上面我们介绍了单模光场哈密顿算符的本征态——粒子数态$|n\rangle$，下面我们将它推广到多模光场的情形. 对于由哈密顿量(1.3.37)式描述的光场，其能量本征态可能在第一个模式里有n_1个光子，第二个模式里有n_2个光子，第l个模式里有n_l个光子，…，于是本征态矢可以写为

$$|n_1\rangle|n_2\rangle\cdots|n_l\rangle\cdots$$

或者将其表述为

$$|n_1, n_2, \cdots, n_l, \cdots\rangle = |\{n_l\}\rangle \tag{1.3.62}$$

因此态矢$|\{n_l\}\rangle$就是描述多模光场的粒子数态. 须注意的是：在哈密顿量(1.3.37)式中光场各模之间无耦合，因此，哈密顿量中的a_l($a_l^\dagger$)只作用在该模的粒子数态$|n_l\rangle$上，对其他模的态不发生作用. 例如：

$$a_l|\{n_l\}\rangle = \sqrt{n_l}\,|n_1, n_2, \cdots, n_l - 1, \cdots\rangle$$

光场一般的态矢可以利用本征态矢集$\{|\{n_l\}\rangle\}$表示为

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_l}\cdots C_{n_1, n_2, \cdots, n_l, \cdots}|n_1, n_2, \cdots, n_l, \cdots\rangle \\ &= \sum_{\{n_l\}} C_{\{n_l\}}|\{n_l\}\rangle \end{aligned} \tag{1.3.63}$$

二、光场的相干态

我们知道，在经典电动力学中采用电磁波描述光场. 对于一单模经典驻波场可表示为

$$E(x,t)=q(t)\sin kx \tag{1.3.64}$$

其中谐振波幅为

$$q(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

经典情况下,可以同时确定相位 $\omega t+\phi$ 和强度 $I(\propto A^2)$. 但在量子力学中,光子数 n 对应强度 I,它是粒子图像,而相位则是波动的概念,两者不能同时确定. 用粒子数态 $|n\rangle$ 描述的单模光场,光子数有确定值,而相位则不确定. 我们也可以采用另一种描述光场的态函数,它称为相干态,用这种态函数描述光场可以构成一个波包,其相位有近似确定的值,但光子数具有较大的不确定度. 现在我们来介绍这种态函数,理论上把相干态定义为非厄米算符 a 的本征态矢 $|\alpha\rangle$:

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle \tag{1.3.65}$$

由于 a 是非厄米算符,所以 α 是复数,为了方便可写为 $\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$.

1. 相干态 $|\alpha\rangle$ 的表示

为了找到相干态 $|\alpha\rangle$ 的表示式,必须求解 a 的本征值方程(1.3.65)式. 利用粒子数算符 $a^\dagger a$ 的本征态矢集 $\{|n\rangle\}$ 的完备性,可把相干态 $|\alpha\rangle$ 表示为

$$|\alpha\rangle=\sum_n|n\rangle\langle n|\alpha\rangle=\sum_n C_n(\alpha)|n\rangle \tag{1.3.66}$$

其中

$$C_n(\alpha)=\langle n|\alpha\rangle \tag{1.3.67}$$

表示粒子数态和相干态表象间的变换函数. $|C_n(\alpha)|^2$ 对应在态 $|\alpha\rangle$ 中光场处于 n 个频率为 ω 的光子态的概率. 为求得 $C_n(\alpha)$,我们把(1.3.66)式代入(1.3.65)式中,则有

$$a|\alpha\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\alpha)\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha C_n(\alpha)|n\rangle \tag{1.3.68}$$

由于上式第一个求和中 $n=0$ 的项等于零,因此第一个求和是从1

到∞. 我们对左边作代换 $n\to n+1$, 这样, 上式就变成

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1}\,|n\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha C_n(\alpha)\,|n\rangle \qquad (1.3.69)$$

把上式左乘 $\langle m|$, 并注意到 $\langle m|n\rangle=\delta_{mn}$, 就可得 $C_n(\alpha)$ 满足的递推关系:

$$C_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1}=\alpha C_n(\alpha) \qquad (1.3.70)$$

这样可知

$$C_1=\alpha C_0/\sqrt{1}$$

$$C_2=\alpha C_1/\sqrt{2}=\alpha^2 C_0/\sqrt{2!}$$

$$C_3=\alpha^3 C_0/\sqrt{3!}$$

所以

$$C_n(\alpha)=\alpha^n C_0/\sqrt{n!} \qquad (1.3.71)$$

把(1.3.71)式代入(1.3.66)式, 则

$$|\alpha\rangle=C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad (1.3.72)$$

由态函数的归一化条件可以确定 C_0, 即

$$\langle\alpha|\alpha\rangle=1=|C_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\langle m|n\rangle$$

$$=|C_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}=|C_0|^2\exp(|\alpha|^2)$$

于是

$$C_0=\exp(-|\alpha|^2/2) \qquad (1.3.73)$$

将(1.3.73)式代入(1.3.72)式, 就得到相干态 $|\alpha\rangle$ 的表达式:

$$|\alpha\rangle=\exp(-|\alpha|^2/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{1.3.74}$$

注意到

$$|n\rangle=\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{1.3.75}$$

则相干态$|\alpha\rangle$也可以表示为

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle&=\exp(-|\alpha|^2/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle\\&=\exp(-|\alpha|^2/2)\exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle\end{aligned} \tag{1.3.76}$$

数学上还可以等价地把相干态表示为平移算符$D(\alpha)$作用于真空态$|0\rangle$上产生的态：

$$|\alpha\rangle=D(\alpha)|0\rangle \tag{1.3.77a}$$

其中

$$D(\alpha)=\exp(\alpha a^\dagger-\alpha^* a) \tag{1.3.77b}$$

现在来证明这一点. 利用算符关系式：

$$e^{A+B}=e^Ae^Be^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{1.3.78}$$

所以

$$\exp(\alpha a^\dagger-\alpha^* a)=\exp(-|\alpha|^2/2)\exp(\alpha a^\dagger)\exp(-\alpha^* a) \tag{1.3.79}$$

那么

$$\exp(\alpha a^\dagger-\alpha^* a)|0\rangle=\exp(-|\alpha|^2/2)\exp(\alpha a^\dagger)\exp(-\alpha^* a)|0\rangle \tag{1.3.80}$$

注意到等式：

$$\exp(-\alpha^* a)|0\rangle=|0\rangle-\alpha^* a|0\rangle+\cdots=|0\rangle \tag{1.3.81}$$

所以(1.3.80)式简化为

$$\exp(\alpha a^{+}-\alpha^{*}a)|0\rangle=\exp(-|\alpha|^{2}/2)\exp(\alpha a^{+})|0\rangle \tag{1.3.82}$$

它表明(1.3.76)和(1.3.77)式是完全等价的.

2. 相干态的性质

首先我们来证明相干态不具备正交性. 应用(1.3.74)式,我们有

$$\begin{aligned}\langle\beta|\alpha\rangle&=\exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^{2}+|\beta|^{2})\right]\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^{*n}\alpha^{m}}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\langle n|m\rangle\\&=\exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^{2}+|\beta|^{2})\right]\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\beta^{*})^{n}/n!\\&=\exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^{2}+|\beta|^{2})+\alpha\beta^{*}\right]\end{aligned} \tag{1.3.83}$$

显然,当 $\alpha=\beta$ 时,有

$$\langle\alpha|\alpha\rangle=1$$

但当 $\alpha\neq\beta$ 时,有

$$\begin{aligned}|\langle\beta|\alpha\rangle|^{2}&=\exp[-(|\alpha|^{2}+|\beta|^{2})+\alpha\beta^{*}+\alpha^{*}\beta]\\&=\exp[-|\alpha-\beta|^{2}]\neq0\end{aligned} \tag{1.3.84}$$

由此可见,对应于不同本征值 α 和 β 的两个相干态并不具有正交性. 然而,当 $|\alpha-\beta|\gg1$ 时, $|\langle\beta|\alpha\rangle|^{2}\to0$,所以随着 $|\alpha-\beta|$ 的增加,它们趋于正交. 相干态虽然不具有正交性,然而它却具有完备性,因而有广泛的应用. 我们把由相干态构成的集称为超完备集. 下面来证明相干态的完备性.

由于 α 是复数,所以完备性关系应表为

$$\int\frac{1}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|d^{2}\alpha=I \tag{1.3.85}$$

这里 I 为单位算符,积分遍及整个复平面. 若 $\alpha=x+iy=re^{i\theta}$,则

$d^2\alpha = dxdy = rdrd\theta$，为证明(1.3.85)式，我们应用(1.3.74)式及其复共轭，得

$$\int \frac{1}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|n\rangle\langle m|\frac{1}{\pi\sqrt{n!m!}}\int \exp(-|\alpha|^2)\alpha^{*m}\alpha^n d^2\alpha$$

若转化到极坐标系以后，则有

$$\int \frac{1}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|n\rangle\langle m|\frac{1}{\pi\sqrt{n!m!}}$$

$$\int \exp(-r^2)r^{m+n+1}dr\int d\theta e^{i(n-m)\theta}$$

所以

$$\int \frac{1}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\frac{1}{n!}\int d\xi \exp(-\xi)\xi^n$$

其中已作变换 $\xi = r^2$. 我们知道右边的积分等于 $n!$，所以上式化为

$$\int \frac{1}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = I \qquad (1.3.86)$$

这样，我们就证明了相干态满足完备性关系.

现在我们再来证明相干态是最小不确定态，从而是描述光子波动性的最确定性态. 在量子力学中，我们知道谐振子的坐标算符 q 和动量算符 p 与粒子算符 a, a^+ 有确定关系：

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^+) \qquad (1.3.87a)$$

$$p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a - a^+) \qquad (1.3.87b)$$

且 q，p 满足对易关系：

$$[q, p] = i\hbar \qquad (1.3.88)$$

这样，单模光场的哈密顿量[(1.3.53)式]就对应质量为1、频率为 ω 的谐振子的哈密顿算符：

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2) \tag{1.3.89}$$

所以算符 p,q 是坐标表象中描述光场的正则动量和坐标算符.

由 a,a^+ 和 p,q 之间的关系(1.3.87)式,容易得到光场处于单模相干态$|\alpha\rangle$时 p,q,p^2和 q^2的期望值:

$$\langle q\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\langle\alpha|(a+a^+)|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\alpha+\alpha^*) \tag{1.3.90a}$$

$$\langle p\rangle=i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\langle\alpha|(a^+-a)|\alpha\rangle=i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\alpha^*-\alpha) \tag{1.3.90b}$$

$$\begin{aligned}\langle q^2\rangle&=\frac{\hbar}{2\omega}\langle\alpha|a^2+a^{+2}+aa^++a^+a|\alpha\rangle\\&=\frac{\hbar}{2\omega}(\alpha^2+\alpha^{*2}+2\alpha\alpha^*+1)\end{aligned} \tag{1.3.90c}$$

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle&=-\frac{\hbar\omega}{2}\langle\alpha|a^2+a^{+2}-aa^+-a^+a|\alpha\rangle\\&=-\frac{\hbar\omega}{2}(\alpha^2+\alpha^{*2}-2\alpha\alpha^*-1)\end{aligned} \tag{1.3.90d}$$

其中已应用了 $a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$及其复共轭式.由上式可知,正则坐标和动量的均方涨落为

$$(\Delta q)^2=\langle q^2\rangle-\langle q\rangle^2=\frac{\hbar}{2\omega} \tag{1.3.91a}$$

$$(\Delta p)^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2=\hbar\omega/2 \tag{1.3.91b}$$

所以

$$\Delta p\Delta q=\hbar/2 \tag{1.3.92}$$

这就是海森伯关于粒子坐标和动量不确定关系 $\Delta p\Delta q\geqslant\hbar/2$所允许的最小不确定值,这说明用相干态描述的光场,能够确定一个小的波包,它揭示出光的波动形态.

为了更清楚地了解光场的正则动量和坐标算符 p,q 的物理

意义，再引进厄米算符 X_1，X_2满足

$$X_1=\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}q, \qquad X_2=\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}p \tag{1.3.93}$$

由(1.3.87)式可知，X_1，X_2与 a，a^+之间的关系为

$$X_1=\frac{1}{2}(a+a^+) \tag{1.3.94}$$

$$X_2=\frac{1}{2i}(a-a^+) \tag{1.3.95}$$

将(1.3.94)、(1.3.95)式代入单模电场算符 $E(\boldsymbol{r},t)$的表达式(1.3.60)式中，则得到

$$E(\boldsymbol{r},t)=-\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}[X_1\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)+X_2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \tag{1.3.96}$$

可见，X_1和 X_2分别是电场算符 $E(\boldsymbol{r},t)$中两个相位正交的振幅算符。这说明算符 q，p 分别与电场算符的两个相位正交的振幅算符成正比。

由算符 q，p 间的对易关系(1.3.88)式可知，X_1，X_2满足

$$[X_1,X_2]=i/2 \tag{1.3.97}$$

因此，厄米算符 X_1和 X_2满足的海森伯不确定关系为

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2\geqslant 1/16 \tag{1.3.98}$$

若光场处于相干态$|\alpha\rangle$，利用(1.3.90)和(1.3.91)式，容易得到 X_1，X_2的涨落为

$$(\Delta X_1)^2=1/4 \tag{1.3.99a}$$

$$(\Delta X_2)^2=1/4 \tag{1.3.99b}$$

因此有

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2=1/16 \tag{1.3.100}$$

可见，相干态是光场振幅算符 X_1和 X_2的最小不确定态，并且 X_1、X_2的量子涨落相同，而且与相干态本征值无关. 这说明，光场的振幅算符对任何相干态的量子涨落都相同. 由(1.3.76)式可知，真空态($\alpha=0$)是相干态的特例，因此光场振幅的量子涨落实质上是由于真空场的起伏所致，而在通过平移算符 $D(\alpha)$将真空态演化成相干态的过程中，光场振幅的量子涨落保持不变. 光场振幅在相干态的相空间(α 平面上)的起伏如图1.3.2所示.

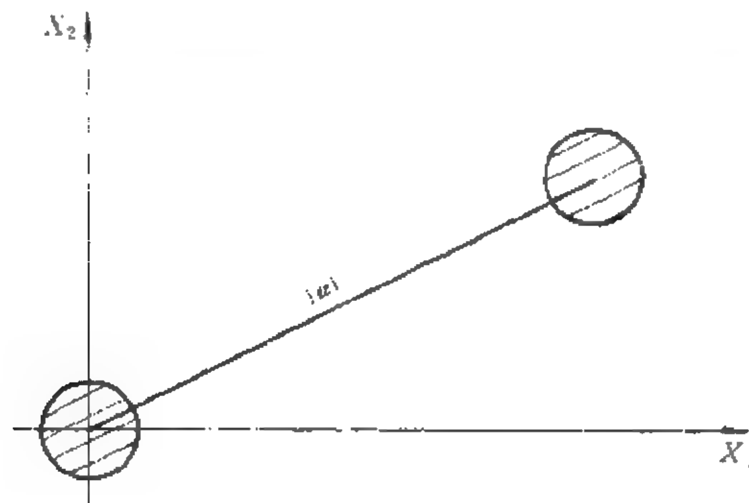


图 1.3.2　光场振幅在相干态的相空间的起伏

应该指出的是，由相干态描述的光场，其光子数则有很大的不确定性. 下面我们来考察相干态情况下的光子数涨落. 由于

$$\langle\alpha|N|\alpha\rangle=\exp(-|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}n=|\alpha|^2 \quad (1.3.101)$$

$$\langle\alpha|N^2|\alpha\rangle=\exp(-|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2|\alpha|^{2n}}{n!}=|\alpha|^4+|\alpha|^2$$

(1.3.102)

因此，光子数的均方涨落为

$$\Delta n=|\alpha| \quad (1.3.103)$$

由此可见，在$|\alpha|$很大时，光子数的均方涨落很大，因而用相干态描述的光场，其光子数有很大的不确定度. 此外，(1.3.101)式还表明$|\alpha|^2$是相干光场的平均光子数，它反映光场的强度.

由(1.3.71)和(1.3.73)式可知，由相干态$|\alpha\rangle$描述的光场处于粒子数态$|n\rangle$的概率为

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2)\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \qquad (1.3.104)$$

它表示光场对所有粒子数态$|n\rangle$的概率分布呈现形如(1.3.104)式右边的泊松分布形式.

与描述多模光场的粒子数态$|\{n_l\}\rangle$相似，多模光场的相干态可表示为

$$\begin{aligned}|\{\alpha_l\}\rangle &= |\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle\cdots|\alpha_l\rangle\cdots \\ &= |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l,\cdots\rangle \end{aligned} \qquad (1.3.105)$$

它表示光场第一模处在相干态$|\alpha_1\rangle$，第二模处在$|\alpha_2\rangle$，…，第l模处在$|\alpha_l\rangle$，…. 借助于(1.3.74)式，可将(1.3.105)式在粒子数态矢集$\{|\{n_l\}\rangle\}$中展开成

$$\begin{aligned}|\{\alpha_l\}\rangle = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_l}\cdots\exp\{-(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_l|^2 \\ +\cdots)/2\}\frac{\alpha_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{\alpha_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\cdots\frac{\alpha_l^{n_l}}{\sqrt{n_l!}}\cdots|\{n_l\}\rangle\end{aligned} \qquad (1.3.106)$$

三、相位算符和相位态

在辐射场的经典理论中，可以把电场写为一实振幅和相位因子的乘积：

$$E = E_0\{\exp[-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \varphi)] + \exp[i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \varphi)]\}$$

(1.3.107)

其中$\boldsymbol{k}$为波矢，$\boldsymbol{r}$为空间坐标，φ为波动相位角.

量子理论中，描述单模场的算符则可相应地表述为

$$E=i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\{a\exp[-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\varphi)]$$

$$+a^{+}\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\varphi)]\} \tag{1.3.108}$$

如果把场算符也分解为振幅算符和相位算符的乘积，则(1.3.108)式与(1.3.107)式有相似的形式. 考虑到相位算符应与经典相位有相应的意义，它也应是可观测量，因而它也应是厄米算符. 如果我们定义相位算符具有指数形式 $\exp(i\varphi)$，且满足关系式：

$$a=(N+1)^{1/2}\exp(i\varphi) \tag{1.3.109a}$$

$$a^{+}=\exp(-i\varphi)(N+1)^{1/2} \tag{1.3.109b}$$

其中 $N=a^{+}a$，于是

$$\exp(i\varphi)=(N+1)^{-1/2}a \tag{1.3.110a}$$

$$\exp(-i\varphi)=a^{+}(N+1)^{-1/2} \tag{1.3.110b}$$

显然

$$\exp(i\varphi)\exp(-i\varphi)=1 \tag{1.3.111a}$$

$$\exp(-i\varphi)\exp(i\varphi)=a^{+}(N+1)^{-1}a\neq 1 \tag{1.3.111b}$$

把上述指数相位算符作用在粒子数态 $|n\rangle$ 上，则有

$$\exp(i\varphi)|n\rangle=(N+1)^{-1/2}\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\begin{cases}0 & n=0\\ |n-1\rangle & n\neq 0\end{cases} \tag{1.3.112a}$$

$$\exp(-i\varphi)|n\rangle=a^{+}(n+1)^{-1/2}|n\rangle=|n+1\rangle \tag{1.3.112b}$$

可见指数算符不为零的矩阵元是

$$\langle n-1|\exp(i\varphi)|n\rangle=1 \tag{1.3.113a}$$

$$\langle n+1|\exp(-i\varphi)|n\rangle=1 \tag{1.3.113b}$$

它们并不满足关系式：

$$\langle i|A|j\rangle=\langle j|A|i\rangle^* \qquad (1.3.114)$$

所以，$\exp(i\varphi)$和$\exp(-i\varphi)$不是厄米算符，因此它们不能作为相位算符，然而可以借助这两个算符来定义另一对算符，即

$$\cos\varphi=[\exp(i\varphi)+\exp(-i\varphi)]/2 \qquad (1.3.115a)$$

$$\sin\varphi=[\exp(i\varphi)-\exp(-i\varphi)]/2i \qquad (1.3.115b)$$

它们满足关系式：

$$\langle n|\cos\varphi|n-1\rangle=\langle n-1|\cos\varphi|n\rangle=1/2 \qquad (1.3.116a)$$

$$\langle n|\sin\varphi|n-1\rangle=-\langle n-1|\sin\varphi|n\rangle=-i/2 \qquad (1.3.116b)$$

于是，$\cos\varphi$和$\sin\varphi$是厄米算符. 所以可以采用它们作为表示电磁场相位特性的相位算符.

利用(1.3.109)和(1.3.115)式，容易得知，粒子数算符N与相位算符$\cos\varphi$、$\sin\varphi$分别满足对易关系：

$$[N,\cos\varphi]=-i\sin\varphi \qquad (1.3.117)$$

$$[N,\sin\varphi]=i\cos\varphi \qquad (1.3.118)$$

这表明光场的粒子数和相位数值不能同时测定，它们的不确定度满足海森伯不确定关系：

$$\Delta n\Delta\cos\varphi\geqslant\frac{1}{2}|\langle\sin\varphi\rangle| \qquad (1.3.119)$$

$$\Delta n\Delta\sin\varphi\geqslant\frac{1}{2}|\langle\cos\varphi\rangle| \qquad (1.3.120)$$

式中$\Delta\cos\varphi$和$\Delta\sin\varphi$期望值的均方涨落分别定义为

$$(\Delta\cos\varphi)^2=\langle\cos^2\varphi\rangle-\langle\cos\varphi\rangle^2$$

$$(\Delta\sin\varphi)^2=\langle\sin^2\varphi\rangle-\langle\sin\varphi\rangle^2$$

由于

$$[\cos\varphi,\sin\varphi]=-\{a^{\dagger}(N+1)^{-1}a-1\}/(2i)\neq 0$$

(1.3.121)

故不可能构成 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 同时有确定值的态. 不过我们可以证明,在一定的极限条件下,$\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 有共同的本征态,我们称之为相位态,它的定义为

$$|\varphi\rangle=\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{s}\exp(in\varphi)|n\rangle \qquad (1.3.122)$$

其中 $s+1$ 为单模光场粒子数态矢集 $\{|n\rangle\}$ 张开的希尔伯特空间的维数,$s\to\infty$ 表征希尔伯特空间是无穷维的. 显然,$|\varphi\rangle$ 满足归一化条件:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle=1$$

而且不难得知

$$\cos\varphi|\varphi\rangle=\cos\varphi|\varphi\rangle+\frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1/2}\{\exp(is\varphi)|s+1\rangle$$

$$-\exp[i(s+1)\varphi]|s\rangle-\exp(-i\varphi)|0\rangle\} \qquad (1.3.123)$$

当 $s\to\infty$ 时,上式约化为

$$\cos\varphi|\varphi\rangle=\cos\varphi|\varphi\rangle \qquad (1.3.124)$$

同样可证明,当 $s\to\infty$ 时

$$\sin\varphi|\varphi\rangle=\sin\varphi|\varphi\rangle \qquad (1.3.125)$$

所以

$$\langle\varphi|\cos\varphi|\varphi\rangle=\cos\varphi[1-\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}]=\cos\varphi \qquad (1.3.126a)$$

$$\langle\varphi|\sin\varphi|\varphi\rangle=\sin\varphi[1-\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}]=\sin\varphi \qquad (1.3.126b)$$

可见态函数 $|\varphi\rangle$ 在 $s\to\infty$ 的极限下是相位算符 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 的共同本征态,它是描述光场相位特性的相位态.

作为例子,下面来考虑由相干态描述的光场的相位特性. 利用 (1.3.110) 和 (1.3.115) 式,可得

$$\langle\alpha|\cos\varphi|\alpha\rangle=\langle\alpha|e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}|\alpha\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\exp[-|\alpha|^2/2]\sum_n\frac{(\alpha^*)^n\alpha^{n+1}+(\alpha^*)^{n+1}\alpha^n}{[n!(n+1)!]^{1/2}}$$
$$=|\alpha|\cos\zeta\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{(n+1)!}\sqrt{n+1} \tag{1.3.127}$$

这里已设

$$\alpha=|\alpha|\exp(i\zeta) \tag{1.3.128}$$

ζ 为相干态本征值 α 的幅角. 可见，相位算符 $\cos\varphi$ 的期望值正比于 $\cos\zeta$.

如果我们只考虑相干态光场的平均光子数 $|\alpha|^2\gg1$ 的情形，此时相干态光场光子数的涨落(1.3.103)式满足

$$\frac{\Delta n}{|\alpha|^2}=|\alpha|^{-1}\ll1 \tag{1.3.129}$$

因此可作近似：

$$\sqrt{n+1}=\sqrt{|\alpha|^2+n+1-|\alpha|^2}\approx|\alpha|\sqrt{1+\frac{n-|\alpha|^2}{|\alpha|^2}}$$
$$\approx\left[1+\frac{n-|\alpha|^2}{2|\alpha|^2}-\frac{1}{8}\frac{(n-|\alpha|^2)^2}{|\alpha|^4}\right]|\alpha| \tag{1.3.130}$$

将上式代入(1.3.127)式，则

$$\langle\alpha|\cos\varphi|\alpha\rangle=\cos\zeta\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\left[1+\frac{n-|\alpha|^2}{2|\alpha|^2}-\frac{1}{8}\frac{(n-|\alpha|^2)^2}{|\alpha|^4}\right]\frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{(n+1)!}$$
$$=\cos\zeta[1-(8|\alpha|^2)^{-1}] \tag{1.3.131}$$

同样可得

$$\langle\alpha|\sin\varphi|\alpha\rangle=\sin\zeta \tag{1.3.132}$$

$$\langle\alpha|\cos^2\varphi|\alpha\rangle=\cos^2\zeta-\cos2\zeta/(4|\alpha|^2) \tag{1.3.133}$$

于是相位算符的涨落

$$(\Delta\cos\varphi)^2=\langle\alpha|\cos^2\varphi|\alpha\rangle-(\langle\alpha|\cos\varphi|\alpha\rangle)^2=\frac{1}{4|\alpha|^2}\sin^2\zeta \tag{1.3.134}$$

从(1.3.129)、(1.3.132)和(1.3.134)式可以发现，在$|\alpha|^2\gg1$时，光场的粒子数算符 N 和相位算符 $\cos\varphi$ 的不确定关系(1.3.119)式变为

$$\Delta n\Delta\cos\varphi=|\langle\alpha|\sin\varphi|\alpha\rangle|\frac{1}{2} \tag{1.3.135}$$

这表明，在光场平均光子数很大的情形下，相干态也是相位算符和粒子数算符的最小不确定态.

值得指出的是，上面引入的相位算符 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 彼此不对易[(1.3.121)式]，因此相位这个物理量在这里由两个厄米算符 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 来间接描述，而不能给出与经典相位 φ 直接对应的相位算符 φ. 下面我们介绍由 Pegg 和 Barnett 引入的相位态和相位算符，它能更直接地描述相位这个物理量.

考虑到相位态可以表示为粒子数态的叠加态，定义一个正交完备的光场相位态为

$$|\theta_m\rangle=(s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{s}\exp(in\theta_m)|n\rangle \tag{1.3.136}$$

其中 θ_m 的值为

$$\theta_m=\theta_0+2\pi m/(s+1)\qquad(m=0,1,2,\cdots,s) \tag{1.3.137}$$

这里 θ_0为一参考相位. 可见新的相位态$|\theta_m\rangle$是$(s+1)$个粒子数态$|n\rangle$的叠加态，也就是说，相位态$|\theta_m\rangle$由粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$张开的$(s+1)$维希尔伯特空间表示，每个粒子数态具有的相位权重为$\exp(in\theta_m)$. 于是，相位算符可表示为

$$\Phi_\theta=\sum_{m=0}^{s}\theta_m|\theta_m\rangle\langle\theta_m| \tag{1.3.138}$$

显然，它是厄米算符，而且由定义式(1.3.136)和(1.3.138)式可知，它满足本征值方程：

$$\Phi_\theta|\theta_m\rangle=\theta_m|\theta_m\rangle \tag{1.3.139}$$

可见由(1.3.138)式定义的算符 Φ_θ 是具有本征态 $|\theta_m\rangle$、且本征值为相位 θ_m 的厄米相位算符. 虽然相位本征态矢 $|\theta_m\rangle$ 是由有限的 $(s+1)$ 维希尔伯特空间定义，但最后 s 将趋于 ∞，所以相位本征态矢集 $\{|\theta_m\rangle\}$ 和粒子数态矢集 $\{|n\rangle\}$ 以及相干态矢集 $\{|\alpha\rangle\}$ 一样，也可构成一组描述光场的完备基，任何描述光场的态矢(如相干态 $|\alpha\rangle$)均可以在这一本征基中展开.

下面我们再来看看粒子数算符 N 和相位算符 Φ_θ 的对易关系. 由(1.3.136)式可将算符 $|\theta_m\rangle\langle\theta_m|$ 表示为

$$|\theta_m\rangle\langle\theta_m|=(s+1)^{-1}\sum_{n,n'}\exp[i(n'-n)\theta_m]|n'\rangle\langle n| \tag{1.3.140}$$

把上式代入(1.3.138)式，并利用(1.3.137)式，则相位算符 Φ_θ 可表示为

$$\Phi_\theta=\theta_0+\frac{s\pi}{s+1}+\frac{2\pi}{s+1}\sum_{n\neq n'}\frac{\exp[i(n'-n)\theta_0]|n'\rangle\langle n|}{\exp\left[i(n'-n)\dfrac{2\pi}{s+1}\right]-1} \tag{1.3.141}$$

这样相位算符 Φ_θ 就由 $(s+1)$ 维的粒子数态 $\{|n\rangle\}$ 表示. 同样地，粒子数算符 N 也可表示为

$$N=\sum_{n=0}^{s}n|n\rangle\langle n| \tag{1.3.142}$$

利用(1.3.141)和(1.3.142)式，可得相位算符 Φ_θ 和粒子数算符 N 的对易关系：

$$[\Phi_\theta, N] = \frac{2\pi}{s+1}\sum_{n\neq n'}\frac{(n-n')\exp[i(n'-n)\theta_0]}{\exp\left[i(n'-n)\frac{2\pi}{s+1}\right]-1}|n'\rangle\langle n| \tag{1.3.143}$$

显然

$$\langle n|[\Phi_\theta, N]|n\rangle = 0 \tag{1.3.144a}$$

$$\langle n'|[\Phi_\theta, N]|n\rangle = \frac{2\pi(n-n')\exp[i(n'-n)\theta_0]}{(s+1)\left\{\exp\left[i(n'-n)\frac{2\pi}{s+1}\right]-1\right\}} \quad (n\neq n') \tag{1.3.144b}$$

(1.3.144b)式的形式比较复杂，下面对它进行化简. 注意到实际物理系统的激发是由于受到有限时间内有限能量源的作用所造成的，因此可以认为，描述物理系统的态是由真空态$|0\rangle$受到有限的激发而演化的. 因而如果描述物理系统的态用粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$展开时，其本征能量一定有一个上限$n_{max}\hbar\omega$，相应的本征态矢记为$|n_{max}\rangle$，此时物理系统处在$|n_{max}\rangle$的概率趋于零. 因此，用粒子数态描述物理系统时，其态矢应写为

$$|\Psi\rangle_P = \sum_{n=0}^{n_{max}} C_n|n\rangle \qquad (n=0,1,2,\cdots,n_{max}) \tag{1.3.145}$$

其中下标 P 表示态矢是描述具有有限激发的物理系统的态. 因此可以选择$s\gg n, n'$，这时(1.3.144b)式简化为

$$\langle n'|[\Phi_\theta, N]|n\rangle \approx \frac{2\pi(n-n')\exp[i(n'-n)\theta_0]}{(s+1)\left\{\frac{2\pi}{s+1}i(n'-n)+1-1\right\}} = i\exp[i(n'-n)\theta_0]$$

考虑上式和(1.3.144a)式，则

$$\langle n'|[\Phi_\theta, N]|n\rangle \approx i(1-\delta_{nn'})\exp[i(n'-n)\theta_0] \tag{1.3.146}$$

由于n和n'都应是有限值，所以上式在$s\to\infty$时成为精确的等式. 因而，由(1.3.143)式知，描述物理系统的相位算符Φ_θ和粒子数算

符 N 的对易关系满足

$$[\Phi_\theta, N]_P = i\sum_{n',n} |n'\rangle\langle n|(1-\delta_{nn'})\exp[i(n'-n)\theta_0]$$
$$= -i + i\sum_{n'}\exp(in'\theta_0)|n'\rangle\sum_{n}\exp(-in\theta_0)\langle n| \qquad (1.3.147)$$

利用(1.3.136)式，则上式简化为

$$[\Phi_\theta, N]_P = -i[1-(s+1)|\theta_0\rangle\langle\theta_0|] \qquad (1.3.148)$$

对于态矢 $|\Psi\rangle_P$，上式的期望值为

$${}_P\langle\Psi|[\Phi_\theta, N]|\Psi\rangle_P = -i[1-(s+1)|{}_P\langle\Psi|\theta_0\rangle|^2] \qquad (1.3.149)$$

其中 $|{}_P\langle\Psi|\theta_0\rangle|^2$ 是系统在态矢 $|\Psi\rangle_P$ 中相位为 θ_0 的概率. 作变换

$$|{}_P\langle\Psi|\theta_0\rangle|^2 = 2\pi P(\theta_0)/(s+1) \qquad (1.3.150)$$

这里 $P(\theta_0)$ 为概率密度，$(s+1)/2\pi$ 则表征系统的态密度. 于是，在极限情况下，即 $s\to\infty$ 时，(1.3.149)式表示为

$${}_P\langle\Psi|[\Phi_\theta, N]|\Psi\rangle_P = -i[1-2\pi P(\theta_0)] \qquad (1.3.151)$$

这种情况下，对于一个物理系统而言，当测量其相位和粒子数时，它们的不确定度满足

$$\Delta N\Delta\Phi \geqslant \frac{1}{2}|1-2\pi P(\theta_0)| \qquad (1.3.152)$$

(1.3.152)式表明，粒子数-相位不确定关系依赖于参考相位 θ_0，也就是说依赖于相位本征值范围的选择. 因此物理上总可以选择适当的取值范围，使得 $P(\theta_0)\ll 1$. 这样，(1.3.152)式可简化为

$$\Delta N\Delta\Phi \geqslant 1/2 \qquad (1.3.153)$$

这就是粒子数-相位的海森伯不确定关系.

现在再将上述描述单模光场的相位态(1.3.136)式和相位算符(1.3.138)式推广到描述多模光场的情形. 对于由哈密顿量(1.3.37)式描述的多模光场,其相位本征态矢可表示为

$$
\begin{aligned}
|\{\theta_{m_l}\}\rangle &= |\theta_{m_1}\rangle|\theta_{m_2}\rangle\cdots|\theta_{m_l}\rangle\cdots \\
&= (s_1+1)^{-1/2}(s_2+1)^{-1/2}\cdots(s_l+1)^{-1/2}\cdots\sum_{m_1=0}^{s_1}\sum_{m_2=0}^{s_2}\cdots\sum_{m_l=0}^{s_l}\cdots \\
&\quad\times\exp\{i[n_1\theta_{m_1}+n_2\theta_{m_2}+\cdots+n_l\theta_{m_l}+\cdots]\}|\{n_l\}\rangle
\end{aligned}
\tag{1.3.154}
$$

其中 θ_{m_l}定义为

$$
\theta_{m_l}=\theta_0+2\pi m_l/(s_l+1)\quad(m=0,1,2,\cdots,s_l) \tag{1.3.155}
$$

相应地,多模光场的相位算符定义为

$$
\Phi_\theta=\sum_{m_1=0}^{s_1}\sum_{m_2=0}^{s_2}\cdots\sum_{m_l=0}^{s_l}\cdots\theta_{m_1}\theta_{m_2}\cdots\theta_{m_l}\cdots|\{\theta_{m_l}\}\rangle\langle\{\theta_{m_l}\}| \tag{1.3.156}
$$

这样就得到了描述多模光场的相位态(1.3.154)式和相位算符(1.3.156)式.

下面以单模相干光场在非线性均匀介质中的传播为例,来讨论如何利用相位算符和相位态描述光场的相位性质.

描述单模光场在非线性均匀介质[例如克尔(Kerr)介质]中传播时的哈密顿量可以有二次非线性量子谐振子的形式,它可表示为

$$
H=\hbar\omega a^+a+\hbar\chi a^{+2}a^2/2 \tag{1.3.157}
$$

这里 a^+,a 仍分别为光子数的产生和湮没算符,χ 是与介质性质有关的参数,它反映光场与介质的相互作用强度.

假设初始时光场处在相干态$|\alpha\rangle$. 一般说来在 t 时刻,光场的态矢可利用粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$展开为

$$
|\Psi(t)\rangle=\sum_n C_n(t)|n\rangle \tag{1.3.158}
$$

将其代入薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle=H|\Psi(t)\rangle \tag{1.3.159}$$

得到

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_n C_n(t)|n\rangle&=\hbar(\omega a^+a+\chi a^{+2}a^2/2)\sum_n C_n(t)|n\rangle\\&=\hbar\sum_n C_n(t)[n\omega+\chi n(n-1)/2]|n\rangle\end{aligned} \tag{1.3.160}$$

对上式左乘态矢$\langle m|$，并利用$\langle m|n\rangle=\delta_{mn}$，可得

$$i\frac{d}{dt}c_n(t)=[n\omega+\chi n(n-1)/2]C_n(t) \tag{1.3.161}$$

(1.3.161)式的解为

$$C_n(t)=C_n(0)\exp\{-i[n\omega+\chi n(n-1)/2]t\} \tag{1.3.162}$$

其中$C_n(0)$为待定常数. 将(1.3.162)式代入(1.3.158)式，则

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_n C_n(0)\exp\{-i[n\omega+\chi n(n-1)/2]t\}|n\rangle \tag{1.3.163}$$

利用初始条件：

$$|\Psi(0)\rangle=|\alpha\rangle=\sum_n\exp(-|\alpha|^2/2)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{1.3.164}$$

立即可以得到

$$C_n(0)=\exp(-|\alpha|^2/2)\alpha^n/\sqrt{n!} \tag{1.3.165}$$

因此，t时刻光场的态矢为

$$|\Psi(t)\rangle=\exp(-|\alpha|^2/2)$$

$$\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\{-i[n\omega+\chi n(n-1)/2]t\}|n\rangle$$

(1.3.166)

由于光场的相位态矢集$\{|\theta_m\rangle\}$也是一完备集，因此也可将$|\Psi(t)\rangle$按光场的相位本征态矢集展开成

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_m \langle\theta_m|\Psi(t)\rangle|\theta_m\rangle \qquad (1.3.167)$$

其中

$$\begin{aligned}\langle\theta_m|\Psi(t)\rangle&=(s+1)^{-1}\sum_{n',n}\exp(-in'\theta_m)\exp(-|\alpha|^2/2)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\\&\quad\times\exp\{-i[n\omega+\chi n(n-1)/2]t\}\langle n'|n\rangle\\&=(s+1)^{-1}\exp(-\bar{n}/2)\sum_n\frac{\bar{n}^{\frac{n}{2}}}{n!}\\&\quad\times\exp\{i[n\zeta-n\theta_m-n\omega t-\chi n(n-1)t/2]\}\end{aligned}$$

(1.3.168)

这里已令$\alpha=\sqrt{\bar{n}}\,e^{i\zeta}$，$\bar{n}$为光场的平均光子数，$\zeta$是$\alpha$的相位角.

注意到光场光子数呈泊松分布[(1.3.104)式]，因此光场的光子数分布P_n[(1.3.104)式]在$n=\bar{n}$时有极大值，并且在强场情况下，即当$\bar{n}\gg1$时，光场的光子数涨落Δn满足

$$\Delta n/\bar{n}=\bar{n}^{-1/2}\ll1 \qquad (1.3.169)$$

这就是说，在$n\gg1$时，相干光场的光子主要分布在$\bar{n}-\bar{n}^{1/2}$—$\bar{n}+\bar{n}^{1/2}$这一极窄的区域，因此可将$\ln P_n$在$n=\bar{n}$附近作泰勒展开，并只保留到$n-\bar{n}$的二次幂项

$$\ln P_n\approx\ln P_n|_{n=\bar{n}}+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2(\ln P_n)}{\partial n^2}\right]_{n=\bar{n}}(n-\bar{n})^2 \qquad (1.3.170)$$

其中已略去等于零的一次幂项.将(1.3.104)式代入上式，并利用斯特林公式

$$\ln N! = N\ln N - N \tag{1.3.171}$$

可得

$$\ln P_n \approx \ln[\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n!] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\frac{\bar{n}}{n!}\right)^n}{\partial n^2}\right](n-\bar{n})^2$$

$$= -\bar{n} + \bar{n}\ln\bar{n} - \ln n! + \bar{n} - (n-\bar{n})^2 = -(n-\bar{n})^2/(2\bar{n})$$

所以

$$P_n \approx A\exp[-(n-\bar{n})^2/(2\bar{n})]$$

对上式归一化以后可得

$$\int_0^\infty P_n dn = A\int_{-\infty}^\infty \exp[-(n-\bar{n})^2]d(n-\bar{n}) = A\sqrt{2\pi\bar{n}} = 1$$

即

$$A = 1/\sqrt{2\pi\bar{n}}$$

于是在 $\bar{n}\gg 1$ 时，P_n 化为

$$P_n \approx (2\pi\bar{n})^{-1/2}\exp[-(n-\bar{n})^2/(2\bar{n})] \tag{1.3.172}$$

上式右边即为典型的高斯分布形式. 所以，在强相干态光场下，光场光子数可由泊松分布转化为高斯分布：

$$\exp(-\bar{n}/2)\frac{\bar{n}^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} \approx (2\pi\bar{n})^{-1/4}\exp[-(n-\bar{n})^2/(4\bar{n})] \tag{1.3.173}$$

利用上式，则(1.3.168)式可转化为

$$\langle\theta_m|\Psi(t)\rangle \approx (s+1)^{-1}(2\pi\bar{n})^{-1/4}\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{4\bar{n}}+\frac{i\chi t}{2}\right)}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\left(\zeta-\theta_m+\frac{\chi t}{2}-\bar{n}\chi t-\omega t\right)^2}{4\left(\frac{1}{4\bar{n}}+\frac{i\chi t}{2}\right)}\right\}$$

$$\times\exp\left[i n\left(\zeta-\omega t-\theta_m+\frac{1}{2}\chi t-\frac{1}{2}\bar{n}\chi t\right)\right]$$

(1.3.174)

于是光场相位概率分布函数在连续谱极限下，即取 $s\to\infty$ 时，θ_m 由分立变量过渡为连续变量 θ，从而有

$$P(\theta,t)=|\langle\theta|\Psi(t)\rangle|^2$$
$$\approx\frac{2\pi}{s+1}(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp[-(\theta-\bar{\theta})^2/(2\sigma^2)]$$

(1.3.175)

其中

$$\bar{\theta}=\zeta-\omega t-\chi t(\bar{n}-1/2)$$

$$\sigma^2=\left[\frac{1}{4\bar{n}}+\bar{n}\chi^2t^2\right]$$

因此在 $\bar{n}\gg1$时，对 $P(\theta,t)$进行积分运算时，虽然自变量 θ 的取值范围为 θ_0—$\theta_0+2\pi$，但由于 $P(\theta,t)$呈高斯分布，所以将积分限拓展为$-\infty$—∞是合理的，即有

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta\approx\int_{-\infty}^{\infty}P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta=1$$

这里$(s+1)/(2\pi)$为态密度.

利用(1.3.175)式，还可求得光场相位函数随时间的演化规律.由于

$$\langle\Phi\rangle=\int\theta P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta=\zeta-\omega t-\chi t(n-1/2) \qquad (1.3.176)$$

$$\langle\Phi^2\rangle=\int\theta^2P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta=\langle\Phi\rangle^2+\chi^2t^2\bar{n}+(4\bar{n})^{-1} \qquad (1.3.177)$$

所以光场相位的涨落为

$$(\Delta\Phi)^2=\langle\Phi^2\rangle-\langle\Phi\rangle^2=(4\bar{n})^{-1}+\bar{n}\chi^2t^2 \qquad (1.3.178)$$

如果在哈密顿量(1.3.157)式中令 $\chi=0$，即不考虑光场与介质的

相互作用，这时(1.3.176)和(1.3.178)式简化为

$$\langle\Phi\rangle=\zeta-\omega t \tag{1.3.179}$$

$$(\Delta\Phi)^2=(4\bar{n})^{-1} \tag{1.3.180}$$

(1.3.179)式表明，光场的相位以速度 ω 随时间变化. 但 $\bar{n}\gg1$时，其相位涨落$(\Delta\Phi)^2\rightarrow0$，这说明在强相干态光场中，其相位可精确测定. 利用(1.3.103)式，可得相干态光场中，粒子数-相位不确定关系：

$$\Delta N\Delta\Phi=1/2 \tag{1.3.181}$$

这正是(1.3.153)式所确定的最小不确定关系. 可见，在 $\bar{n}\gg1$时，相干态也是粒子数-相位的最小不确定态.

下面我们讨论 $\chi\neq0$时的情形，即考虑非均匀介质对光场的作用. 由(1.3.178)式可以发现，光场在非均匀介质中传播时，随着时间的演化，相位的涨落将不断增大. 这时再来看看 t 时刻光场的光子数分布，由(1.3.166)式可知

$$P_n(t)=|\langle n|\Psi(t)\rangle|^2=\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n! \tag{1.3.182}$$

上式与(1.3.104)式完全一致，可见光场在介质中传播时，其光子数分布不随时间演化，仍保持其泊松分布性质，因此光子数涨落满足(1.3.103)式. 在这种情况下，粒子数-相位不确定关系为

$$(\Delta N)^2(\Delta\Phi)^2=1/4+\bar{n}\chi^2t^2>1/4 \tag{1.3.183}$$

这说明，随着时间的演化，由于光场与介质的相互作用，初始时的相干态光场不再保持为相干态光场.

四、光场的混沌态

前面我们讨论了描述光场的粒子数态、相干态和相位态的形式及其性质，这些态矢均由系统的量子性质完全确定，所以它们是描述光场的纯态. 由于粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$、相干态矢集$\{|\alpha\rangle\}$以及相位态矢集$\{|\theta_m\rangle\}$具有完备性或超完备性，因而任一处于纯态的

单模光场都可以用$\{|n\rangle\}$,$\{|\alpha\rangle\}$或$\{|\theta_m\rangle\}$的线性叠加态矢来描述.对于一处于混沌态的光场,由于我们知道光场的信息并不完全,因而不能由量子理论完全地确定光场所处状态的态矢,所以不能像描述纯态光场那样,采用态矢来描述处于混沌态的光场,但是我们可以采用密度算符来描述处于混沌态的光场.

按照密度算符理论,描述一处于混沌态的光场的密度算符定义为

$$\rho=\sum_i P_{\psi_i}|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{1.3.184}$$

其中$|\psi_i\rangle$为归一化的光场纯态态矢,P_{ψ_i}是光场处于纯态$|\psi_i\rangle$的概率,它是具有经典统计性质的量.

显然,处于纯态(如粒子数态$|n\rangle$、相干态$|\alpha\rangle$)的光场的密度算符可以看成是(1.3.184)式的特例.例如,若光场处于粒子数态$|n\rangle$,那么密度算符简化为

$$\rho=|n\rangle\langle n| \tag{1.3.185}$$

同样地,若光场处于相干态$|\alpha\rangle$,它的密度算符表示为

$$\rho=|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{1.3.186}$$

对于处于纯态的光场,用密度算符描述它的状态和用态矢描述具有相同的结果.

如果一光场处于混沌态,这时必须采用密度算符(1.3.184)式来描述.下面,我们以单模热光场为例,来具体说明如何用密度算符描述处于混沌态的光场.

单模热光场可由一处于热平衡状态的单模腔体产生.在这种情形下,腔体辐射的光子处于粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$的概率满足经典玻耳兹曼分布规律,即光场处于粒子数态$|n\rangle$的概率为

$$P_n=\frac{\exp(-E_n\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-E_n\beta)}=\frac{\exp(-n\hbar\omega\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\hbar\beta\omega)}$$

$$=[1-\exp(-\hbar\omega\beta)]\exp(-n\hbar\omega\beta) \tag{1.3.187}$$

式中

$$\beta=(k_B T)^{-1} \tag{1.3.188}$$

T 为腔体的温度，k_B 为玻耳兹曼常量，ω 为单模腔体辐射的光子的频率. 将(1.3.187)式代入(1.3.184)式，即得单模热光场的密度算符 ρ：

$$\rho=\sum_n[1-\exp(-\hbar\omega\beta)]\exp(-n\hbar\omega\beta)|n\rangle\langle n| \tag{1.3.189}$$

利用(1.1.68)和(1.3.189)式，可得光场的平均光子数为

$$\langle N\rangle=\mathrm{Tr}(\rho a^+a)=[1-\exp(-\hbar\omega\beta)]\sum_n n\exp(-n\hbar\omega\beta)$$

$$=[\exp(\hbar\omega\beta)-1]^{-1} \tag{1.3.190}$$

上式表明，单模热光场的平均光子数由腔体的温度 T 决定. 利用上式，还可将光子数分布的概率 P_n 用平均光子数 $\langle N\rangle$ 表示为

$$P_n=\frac{1}{1+\langle N\rangle}\left(\frac{\langle N\rangle}{1+\langle N\rangle}\right)^n \tag{1.3.191}$$

此外由上式和(1.1.68)及(1.3.189)式，容易求得单模热光场的光子数涨落为

$$(\Delta N)^2=\langle N^2\rangle-\langle N\rangle^2=2\langle N\rangle^2-\langle N\rangle^2=\langle N\rangle^2 \tag{1.3.192}$$

即

$$\Delta N=\langle N\rangle \tag{1.3.193}$$

比较(1.3.193)和(1.3.103)式可以发现，热光场和相干光场的光子数涨落是不一样的. 因此热光场具有与相干光场不同的量子起伏特性.

下面来讨论处于热平衡状态的多模腔体辐射的多模热光场的

情况.多模热光场的每个模的密度算符由(1.3.189)或(1.3.191)式表示,那么描述多模热光场的密度算符可写为

$$\rho=\prod_l \rho_l=\prod_l \sum_{n_l} P_{n_l}|n_l\rangle\langle n_l|=\sum_{\{n_l\}} P_{\{n_l\}}|\{n_l\}\rangle\langle\{n_l\}| \tag{1.3.194}$$

式中

$$P_{\{n_l\}}=\prod_l \langle N_l\rangle^{n_l}/[1+\langle N_l\rangle]^{n_l+1}$$

$$\sum_{\{n_l\}}=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots \tag{1.3.195}$$

这里$\langle N_l\rangle$是光场第l模的平均光子数,它满足(1.3.190)式.多模热光场的密度算符也可写成

$$\rho=\sum_{\{n_l\}}|\{n_l\}\rangle\langle\{n_l\}|\prod_l \frac{\langle N_l\rangle^{n_l}}{[1+\langle N_l\rangle]^{n_l+1}} \tag{1.3.196}$$

这时,不难证明光场的平均光子数为

$$\langle N\rangle=\sum_l \langle N_l\rangle \tag{1.3.197}$$

参 考 文 献

[1] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, Wiley, 1973.

[2] M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb Jr. Laser Physics, Addison-Wesley, 1974.

[3] A. S. Davydov, Quantum Mechanics, Pergaman Press, 1976.

[4] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, Clarendon, 1983.

[5] P. L. Knight and L. Allen, Concepts of Quantum Optics, Pergaman Press, 1983.

[6] D. P. Craig, Molecular Quantum Electrodynamics An Introduction to Radiation Molecule Interactions, Academic, 1984.

[7] M. Schubert and B. Wilhelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics, Wiley, 1986.

[8] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Photons and Atoms · Introduction to Quantum Electrodynamics, Wiley, 1989.

[9] 彭金生,共振荧光与超荧光,科学出版社,1993.
[10] L. Susskind and J. Glogower, *Physics*, **1**,49,1964.
[11] P. Carruthers and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.*, **40**, 441, 1968.
[12] D. P. Pegg and S. M. Barnett, *Europhys. Lett.*, **6**, 483, 1988.
[13] S. M. Barnett and D. T. Pegg, *J. Mod. Opt.*, **36**, 7, 1989.
[14] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys, Rev.*, **A39**, 1665, 1989.
[15] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys, Rev.*, **A43**, 2579, 1991.
[16] C. C. Gerry, *Opt. Commun.*, **75**, 168, 1990.
[17] R. Tanas and Ts. Gantsog, *Phys. Rev.*, **A45**, 5031, 1992.
[18] 彭金生、李高翔,*Phys. Rev.*, **A45**, 3289, 1992.
[19] 彭金生、李高翔、周鹏,*Phys. Rev.*, **A46**, 1516, 1992.
[20] 李高翔、彭金生,物理学报,**41**, 766,1992.
[21] 李高翔、彭金生,光学学报,**13**, 120, 1993.

第四章　狄克(Dicke)模式与 Jaynes-Cummings(J-C)模型

研究量子化的辐射场与物质相互作用的规律及其效应是量子光学的基本内容. 理论上如何描述光场与物质的相互作用呢?本章中我们来介绍描述原子(单个或多个)与光场(单模或多模)相互作用的理论模型. 首先介绍现代文献中常用的狄克模式,它是描述原子与多模辐射场相互作用的典型模型;接着我们利用狄克模式来研究受激原子的自发发射现象;最后介绍描述单模光场与一个二能级原子的相互作用模型——Jaynes-Cummings(以下简称为 J-C)模型,是描述光场与原子相互作用的最简单的理论模型.

第一节　原子与辐射场相互作用的狄克模式

假设原子仅有一个处于中心位势 $V(r)$ 中且质量为 m、电荷为 e 的电子(如氢原子),电子的动量为 p. 如果这个原子与由矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 描述的辐射场作用,那么描述系统的哈密顿量可写为

$$H=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}/c)^2+V(r)+H_F=H_A+H_F+H_I \tag{1.4.1}$$

其中描述原子的哈密顿量为 $H_A=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(r)$,描述自由场的哈密顿量为 $H_F=\sum\limits_{k_j}\hbar\omega_k a_k^+ a_{k_j}$,而描述原子与场相互作用的哈密顿量 H_I 为

$$H_I=-\frac{e}{2mc}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p})+\frac{1}{2m}(eA/c)^2 \tag{1.4.2}$$

上式第二项含 e^2，与前一项相比非常小，而且它表征场的不同辐射振子之间通过电子与场的耦合而发生的相互作用，这种相互作用导致双光子跃迁过程，作为近似可略去这一相对微弱的项．于是

$$H_1 = -\frac{e}{2mc}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}) \tag{1.4.3}$$

由于算符

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k_j} \lambda_{k_j}(a_{k_j} e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}} + a^{+}_{k_j} e^{-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}}) \tag{1.4.4}$$

含有坐标算符 $\boldsymbol{r}$，所以 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{p}] \neq 0$．但是对于原子范围来说，一般情况下，$r$ 可取为玻尔半径范围 5.3×10^{-11} 米以内，可见光的波长为 10^{-6} 米，故 $k = 2\pi/\lambda = 2\pi \times 10^{6}$/米，所以 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} \approx 3.5\times 10^{-4} \ll 1$，作为近似可取 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \approx e^0 = 1$，从而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \approx \boldsymbol{A}(0)$，这相当于在处理原子与场相互作用时，略去原子的线度．通常称这种近似为偶极近似．在偶极近似下，

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{p}] = 0 \tag{1.4.5}$$

从而原子-场相互作用哈密顿量简化为

$$H_1 = -\frac{e}{mc}\boldsymbol{A}(0) \cdot \boldsymbol{p} \tag{1.4.6}$$

此时

$$\boldsymbol{A}(0) = \sum_{k_j} \boldsymbol{\lambda}_{k_j}(a^{+}_{k_j} + a_{k_j}) \tag{1.4.7a}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \left(\frac{2\pi \hbar c^2}{V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{k_j} \tag{1.4.7b}$$

下面再讨论如何把(1.4.6)式中电子的动量算符 $\boldsymbol{p}$ 用原子赝自旋算符的形式表示出来．我们知道，在薛定谔绘景中，原子系统的能量本征值方程为

$$H_A|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{1.4.8}$$

其中 E_n 是相应能量本征态 $|n\rangle$ 的本征值，$\{|n\rangle\}$ 构成一组完备基矢. 因此原子的哈密顿算符可以表示为

$$H_A = \sum_{n} E_n |n\rangle\langle n| \tag{1.4.9}$$

如果引进一组广义的原子算符：

$$\sigma_{nm} = |n\rangle\langle m| \tag{1.4.10}$$

那么(1.4.9)式转化为

$$H_A = \sum_{n} E_n \sigma_{nn} \tag{1.4.11}$$

而且任何描述原子行为的算符(如原子的偶极矩、核外电子的动量 $\boldsymbol{p}$ 以及位置 $\boldsymbol{r}$ 等)可一般地表示为

$$G = \sum_{n} \langle n|G|m\rangle \sigma_{nm} \tag{1.4.12}$$

显然，原子算符 σ_{nm} 满足对易关系：

$$[\sigma_{ij}, \sigma_{kl}] = \delta_{jk}\sigma_{il} - \delta_{il}\sigma_{kj} \tag{1.4.13}$$

对于二能级原子，此时只有 $|+\rangle$(或 $|2\rangle$)和 $|-\rangle$(或 $|1\rangle$)态，显然原子算符 σ_{nm} 具有如下形式：

$$\sigma_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4.14}$$

它们除遵循对易关系(1.4.13)式以外，还满足

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \tag{1.4.15}$$

式中 I 为单位矩阵. 如果引进算符 S_z, S_+, S_-，它们为

$$S_z = (\sigma_{22} - \sigma_{11})/2 \tag{1.4.16a}$$

$$S_+=\sigma_{21} \tag{1.4.16b}$$

$$S_-=\sigma_{12} \tag{1.4.16c}$$

这就是描述二能级原子的赝自旋算符. 利用(1.4.14)和(1.4.16)式可得 S_z, S_+, S_- 间遵循的对易关系:

$$\begin{aligned}&[S_z, S_\pm]=\pm S_\pm, [S_+, S_-]=2S_z\\&[S_+, S_-]_+=S_+S_-+S_-S_+=I\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

由(1.4.11)及(1.4.16)式, 可将二能级原子的哈密顿算符表示为

$$H_A=E_-\sigma_{11}+E_+\sigma_{22}=\hbar\omega_0(\sigma_{22}-\sigma_{11})/2=\hbar\omega_0 S_z \tag{1.4.18}$$

其中已取

$$E_++E_-=0, \quad \hbar\omega_0=E_+-E_-$$

下面, 我们再来看看如何利用原子算符描述原子核外电子的动量. 这里, 仅以二能级原子为例. 按(1.4.12)式, 二能级原子核外电子的动量算符可写为

$$\boldsymbol{p}=\langle +|\boldsymbol{p}|-\rangle S_++\langle -|\boldsymbol{p}|+\rangle S_- \tag{1.4.19}$$

再注意到海森伯绘景中

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}=\frac{1}{i\hbar}[\boldsymbol{r}, H_A]=\frac{1}{i\hbar}(\boldsymbol{r}H_A-H_A\boldsymbol{r})=\boldsymbol{p}/m \tag{1.4.20}$$

我们有

$$\langle +|\boldsymbol{p}|-\rangle=\frac{im}{\hbar}(E_+-E_-)\langle +|\boldsymbol{r}|-\rangle=\frac{im\omega_0}{\hbar e}\langle +|e\boldsymbol{r}|-\rangle \tag{1.4.21a}$$

$$\langle -|\boldsymbol{p}|+\rangle=-\frac{im\omega_0}{\hbar e}\langle -|e\boldsymbol{r}|+\rangle \tag{1.4.21b}$$

显然 $\langle +|e\boldsymbol{r}|-\rangle$ 为原子的偶极矩阵元. 一般说来, 它为复矢量. 如果令其满足

$$\langle + | er | - \rangle = iD \tag{1.4.22}$$

$\boldsymbol{D}$ 为实矢量，则由(1.4.19)，(1.4.21)和(1.4.22)式得知，原子核外电子的动量算符由原子赝自旋算符表示的形式是

$$\boldsymbol{p} = -\frac{m\omega_0}{e}\boldsymbol{D}(S_+ + S_-) \tag{1.4.23}$$

这样，一个二能级原子与辐射场的相互作用哈密顿量可写为

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{e}{mc}\sum_k \boldsymbol{\lambda}_k(a_k^+ + a_k)\left(-\frac{m\omega_0\boldsymbol{D}}{e}\right)(S_+ + S_-) \\ &= \sum_k \varepsilon_k(a_k^+ + a_k)(S_+ + S_-) \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

为简单起见，其中已用 k 取代 kj，而且耦合常数

$$\varepsilon_k = \left(\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}}\omega_0\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_{k_j} \quad (j=1,2) \tag{1.4.25}$$

从而，二能级原子与辐射场相互作用系统总的哈密顿量为

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \hbar\omega_0 S_z + \sum_k \varepsilon_k(a_k^+ + a_k)(S_+ + S_-) \tag{1.4.26}$$

上式表明，辐射场的能量由波矢为 $\boldsymbol{k}$、频率为 ω_k 的无穷多模式的光子叠加而成，裸原子的能量由原子赝自旋算符的 z 分量确定，原子与场的相互作用哈密顿量可表示为

$$V = \sum_k \varepsilon_k(a_k^+ S_- + a_k S_+ + a_k^+ S_+ + a_k S_-) \tag{1.4.27}$$

式中第一项反映原子由上态 $|+\rangle$ 跃迁到下态 $|-\rangle$，同时产生一个光子的相互作用过程；第二项表征原子由下态跃迁到上态同时吸收一个光子的相互作用过程；第三项对应原子跃迁到上态并发射一个光子的过程；第四项则描述原子跃迁到下态同时吸收一个光子的相互作用过程.

显然，(1.4.27)式的前两项对应的跃迁过程导致系统的能量改变为

$$\Delta E_1 = \hbar(\omega_k - \omega_0) \tag{1.4.28}$$

在近共振情况下，即光场频率与原子本征跃迁频率满足 $\omega_k \approx \omega_0$ 时，系统的能量变化 $\Delta E_1 \approx 0$，即保持系统能量守恒. 根据能量-时间不确定关系：

$$\Delta E_1 \cdot \Delta \tau_1 \geqslant \hbar \tag{1.4.29}$$

可知，当 $\Delta E_1 \to 0$ 时，$\Delta \tau_1 \to \infty$. 所以跃迁过程能产生稳定的实光子.

但是，(1.4.27)式中的后两项对应的跃迁过程导致系统能量变化为

$$\Delta E_2 = \hbar(\omega_k + \omega_0) \tag{1.4.30}$$

它是一个相当大的量，说明这种跃迁过程不保持系统能量守恒，同时根据能量-时间不确定关系：

$$\Delta E_2 \cdot \Delta \tau_2 \geqslant \hbar \tag{1.4.31}$$

可知，$\Delta \tau_2$ 很小. 这说明此过程产生的光子寿命很短，我们称它为虚光子. 如果在(1.4.26)或(1.4.27)式中略去不保持系统能量守恒的后两项，则称为旋波近似. 此时系统的哈密顿量成为

$$H_{\text{RWA}} = \hbar\omega_0 S_z + \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \sum_k \varepsilon_k (a_k S_+ + a_k^+ S_-) \tag{1.4.32}$$

旋波近似是量子光学中经常应用的近似，所以哈密顿量(1.4.32)式是经常应用的典型哈密顿量，它是由狄克最先引入的，所以也被称为描述原子与辐射场相互作用的狄克哈密顿量.

第二节　受激原子的自发发射

我们知道，处于激发态的原子，会自发地辐射光子而回到稳定的基态. 这样的发射过程，在经典理论范围内是无法加以解决的，下面我们从狄克哈密顿量(1.4.32)式出发，利用量子理论来讨论

受激原子的自发衰变问题.

由上一节知道,描述一个受激二能级原子与辐射场作用系统的狄克哈密顿量由(1.4.32)式描述.由于自发发射场的模式可能有无限多个,所以$\sum$是对无限多个可能的频率为ω_k、波矢为k的场模作和.假设$t=0$时刻,原子处于激发态$|+\rangle$,辐射场处于真空态,并且原子与场还没有发生相互作用.这样原子-场相互作用系统在初始时刻的态矢可表为

$$|\Psi(0)\rangle=|+,\{0_k\}\rangle \tag{1.4.33}$$

随着时间的增加,原子与场发生相互作用,那么原子的行为将如何演化呢?

根据算符的海森伯运动方程,可以求解原子算符S_z的时间依赖关系:

$$\frac{d}{dt}S_z=-\frac{i}{\hbar}[S_z,H_{\mathrm{RWA}}]=-i\sum_k\frac{\varepsilon_k}{\hbar}(a_kS_+-a_k^{\dagger}S_-) \tag{1.4.34}$$

这里已应用对易关系(1.4.17)式.为求解$S_z(t)$,需要得知a_kS_+,$a_k^{\dagger}S_-$的时间依赖关系.由于

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a_kS_+=&-\frac{i}{\hbar}[a_kS_+,H_{\mathrm{RWA}}]\\&=-i(\omega_0-\omega_k)a_kS_+-i\varepsilon_k(S_z+1/2)/\hbar\\&\quad-2\frac{i}{\hbar}\sum_{k'}\varepsilon_{k'}S_za_{k'}^{\dagger}a_k\end{aligned} \tag{1.4.35}$$

因为已设$t=0$时刻场处在真空态,于是在计算上式的期望值时,可略去$a_{k'}^{\dagger}a_k$项,即略去二阶小量项,这意味着忽略发射光子反作用于原子的效应.由此将上式简化为

$$\frac{d}{dt}a_kS_+=-i(\omega_0-\omega_k)a_kS_+-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_k(S_z+1/2) \tag{1.4.36}$$

同理有

$$\frac{d}{dt}a_k^\dagger S_- = i(\omega_0-\omega_k)a_k^\dagger S_- + \frac{i}{\hbar}\varepsilon_k(S_z+1/2) \quad (1.4.37)$$

它们的解可表示为

$$a_kS_+(t) = -i\frac{\varepsilon_k}{\hbar}\exp[-i(\omega_0-\omega_k)t]\int_0^t \exp[i(\omega_0-\omega_k)t']$$
$$\times[S_z(t')+1/2]dt' + a_kS_+(0)\exp[-i(\omega_0-\omega_k)t]$$
$$(1.4.38)$$

$$a_k^\dagger S_-(t) = i\frac{\varepsilon_k}{\hbar}\exp[i(\omega_0-\omega_k)t]\int_0^t \exp[-i(\omega_0-\omega_k)t']$$
$$\times[S_z(t')+1/2]dt' + a_k^\dagger S_-(0)\exp[i(\omega_0-\omega_k)t]$$
$$(1.4.39)$$

把上述两式代入(1.4.34)式，并对态$|\Psi(0)\rangle=|+,\{0_k\}\rangle$作平均，则得

$$\frac{d}{dt}\langle S_z(t)\rangle = -\frac{2}{\hbar^2}\sum_k \varepsilon_k^2\int_0^t \cos[(\omega_0-\omega_k)(t-t')]$$
$$\times[\langle S_z(t')\rangle+1/2]dt' \quad (1.4.40)$$

上式表明原子算符S_z在t时刻的值，与S_z在0到t之间的值有关．考虑到原子的衰变时间远大于ω_0^{-1}，所以在(1.4.40)式的积分中可近似取$\langle S_z(t')\rangle\approx\langle S_z(t)\rangle$，这种近似称为马尔可夫(Markoff)近似．在物理上它意味着S_z的现时值与本身的历史无关．于是有

$$\frac{d}{dt}\langle S_z(t)\rangle = -[\langle S_z(t)\rangle+1/2]\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_k \varepsilon_k^2\delta(\omega_k-\omega_0)$$
$$(1.4.41)$$

其中已取

$$\pi\delta(x) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \cos x\tau d\tau \quad (1.4.42)$$

在(1.4.41)式中令

$$\Gamma=\frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_k \varepsilon_k^2\delta(\omega_k-\omega_0) \tag{1.4.43}$$

则(1.4.41)式变为

$$\frac{d}{dt}\langle S_z(t)\rangle=-\Gamma[\langle S_z(t)\rangle+1/2] \tag{1.4.44}$$

方程(1.4.44)式给出了原子算符 S_z 的期望值随时间变化所遵循的规律，它的积分给出

$$\langle S_z(t)\rangle=-1/2+[\langle S_z(0)\rangle+1/2]\exp(-\Gamma t) \tag{1.4.45}$$

所以，随着时间 t 的增加，原子算符 S_z 的期望值将成指数地衰减，衰变寿命

$$\tau=\Gamma^{-1} \tag{1.4.46}$$

图1.4.1标明了此种衰变过程. 根据能量-时间不确定关系，可以得知对应的自发发射线宽 Γ. 因为

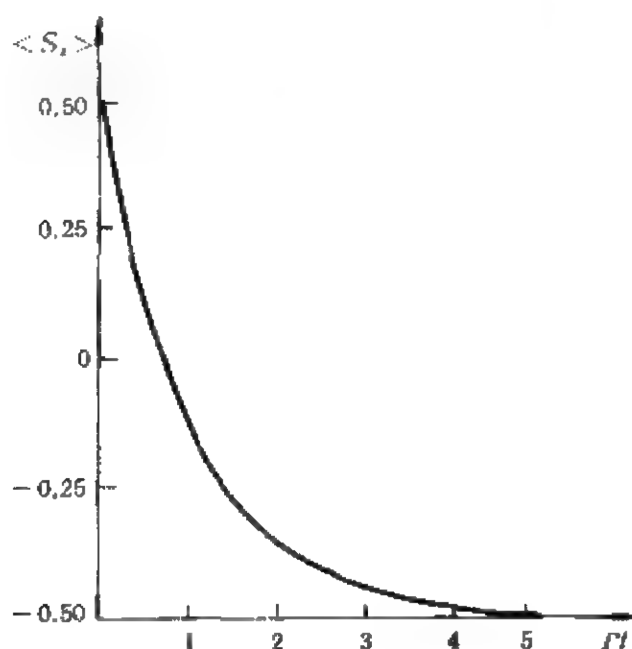


图 1.4.1　初始处于激发态的二能级原子的自发衰变图

$$\Delta E\cdot\Delta t=\hbar\,\Delta\omega\cdot\tau\approx\hbar$$

所以

$$\Delta\omega\approx\tau^{-1}=\Gamma \tag{1.4.47}$$

(1.4.43)式也表明,自发发射的光子的频率 ω_k 接近于 ω_0. 从物理上讲,自发发射的根源是由于真空起伏,是它促进了原子自身辐射光子的作用. 在初始条件 $\langle S_z(0)\rangle=1/2$ 的情况下,由(1.4.45)式可知,原子算符 S_z 的期望值随时间而演化的规律是

$$\langle S_z(t)\rangle=e^{-\Gamma t}-1/2 \tag{1.4.48}$$

这说明在 $t=0$ 时刻处于上态的原子,当 $t\to\infty$ 时, $\langle S_z(t)\rangle=-1/2$,即原子自发地衰变到下态.

现在讨论原子算符的横向分量 S_+ 和 S_- 的时间演化规律. $S_+(t)$ 满足的运动方程为

$$\frac{d}{dt}S_+(t)=i\omega_0S_+-\frac{2i}{\hbar}\sum_k\varepsilon_ka_k^+S_z \tag{1.4.49}$$

其中 $a_k^+S_z$ 随时间的演化遵循

$$\frac{d}{dt}a_k^+S_z=i\omega_ka_k^+S_z+\frac{i}{2\hbar}\varepsilon_kS_+ \tag{1.4.50}$$

式中已应用了 $S_zS_+=\frac{1}{2}S_+$. 对上式进行形式积分得

$$a_k^+S_z(t)=\frac{i\varepsilon_k}{2\hbar}\exp(i\omega_kt)\int_0^t\exp(-i\omega_kt')S_+(t')dt'$$
$$+a_k^+S_z(0)\exp(i\omega_kt) \tag{1.4.51}$$

上式中的 $S_+(t')$ 也应通过解其运动方程而求得,但此时原子与场之间的相互作用哈密顿量 V 与 H_0 相比很弱,因此可作近似,用

$$H_0=\hbar\omega_0S_z+\sum_k\hbar\omega_ka_k^+a_k \tag{1.4.52}$$

取代 H_{RWA}[(1.4.32)式],则 $S_+(t')$ 满足运动方程:

$$\frac{d}{dt}S_+(t')=-\frac{i}{\hbar}[S_+(t'),H_0]=i\omega_0S_+(t') \quad (1.4.53)$$

其解为

$$S_+(t')=S_+(t)\exp[i\omega_0(t'-t)] \quad (1.4.54)$$

将上式代入(1.4.51)式,得

$$a_k^+S_z(t)=\frac{i}{2\hbar}\epsilon_kS_+\int_0^t\exp[-i(\omega_k-\omega_0)\tau]d\tau+a_k^+S_z(0)\exp(i\omega_kt)$$

$$=\frac{\epsilon_k}{2\hbar}S_+(t)\left[P\left(\frac{1}{\omega_k-\omega_0}\right)+i\pi\delta(\omega_k-\omega_0)\right]+a_k^+S_z(0)\exp(i\omega_kt)$$

(1.4.55)

其中 $P\left(\frac{1}{\omega_k-\omega_0}\right)$ 称为主部函数.将(1.4.55)式代入(1.4.49)式,并对初始态 $|\Psi(0)\rangle$ 作量子平均,则得

$$\frac{d}{dt}\langle S_+(t)\rangle=i\omega_0\langle S_+(t)\rangle-(i\Omega+\Gamma/2)\langle S_+(t)\rangle \quad (1.4.56)$$

其中

$$\Omega=\frac{1}{\hbar^2}\sum_k\epsilon_k^2P\left(\frac{1}{\omega_k-\omega_0}\right) \quad (1.4.57)$$

Γ 由(1.4.43)式表示.方程(1.5.56)式的解为

$$\langle S_+(t)\rangle=\langle S_+(0)\rangle\exp[i(\omega_0-\Omega)t]\exp(-\Gamma t/2)$$

(1.4.58)

可以看出原子算符的横向分量(或称横向极化)以速率 $\Gamma/2$ 随时间衰变.且横向分量的谐振频率不再是 ω_0,而发生了 Ω 的漂移,这就是说,二能级原子的能级由于真空辐射场的作用发生了漂移,通常称为兰姆位移.由于这种漂移的存在,使得能级有漂移量的不确定度,因而辐射的谱线有一定的展宽.

第三节 J-C 模型

从上面的讨论可以看出，由狄克哈密顿量(1.4.32)式描述的二能级原子与多模辐射场相互作用系统，其随时间变化的规律不易精确求出. 下面我们介绍一种更为简单且易于求解的模型，即 J-C 模型. 它是由 Jaynes 和 Cummings 在讨论微波激射器(Maser)时提出的，由单个二能级原子(或分子)与一单模量子化的光场组成的相互作用系统的理想模型. 它是描述原子与光场相互作用的一种理想模型. 由于对它只需作旋波近似就可精确求解，因此不仅在量子光学中，而且在激光物理、核磁共振和量子场论等许多问题中都常被采用.

由(1.4.32)式可得 J-C 模型在旋波近似下的哈密顿量为

$$H=\omega_0 S_z+\omega a^+ a+\varepsilon(a^+ S_- + aS_+) \qquad (\hbar=1) \quad (1.4.59)$$

这里 a^+，a 分别为频率为 ω 的单模光场的产生算符和湮没算符. S_z 和 $S_\pm$ 是描述本征跃迁频率为 ω_0的二能级原子行为的赝自旋算符，ε 为原子-光场耦合常数，它反映原子与光场相互作用的强度. 而且为简单起见，这里取自然单位 $\hbar=1$. 显然，上式右边的第一项对应裸原子的能量，第二项对应光场的能量，第三项表征光场与原子的相互作用能 V：

$$V=\varepsilon(a^+ S_- + aS_+) \qquad (1.4.60)$$

这种相互作用过程体现为在原子跃迁时伴随发射和吸收光子的过程，把(1.4.59)式分解为

$$H=H_0+V \qquad (1.4.61)$$

其中 H_0为裸原子与光场无耦合情况的能量算符：

$$H_0=\omega_0+\omega a^+ a \qquad (1.4.62)$$

由(1.4.60)和(1.4.62)式容易看出，H_0和 V 之间满足

$$[H_0, V]=0 \tag{1.4.63}$$

因此 H_0和 V 之间可以随意交换顺序.

当原子和光场之间没有耦合时,我们有完备的基矢集,它是辐射场的粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$和原子能量本征态矢$\{|+\rangle,|-\rangle\}$(或$|2\rangle$,$|1\rangle\}$的直积. 利用此完备基矢集可以把原子-光场耦合系统的任意态矢展开. 我们看到

$$H_0|\pm,n\rangle=(\omega_0 S_z+\omega a^\dagger a)|\pm,n\rangle=(\omega n\pm\omega_0/2)|\pm,n\rangle \tag{1.4.64}$$

式中$|\pm,n\rangle$描述辐射场具有 n 个光子而且原子处在本征能态$|\pm\rangle$. 显然,对应于本征态矢$|\pm,n\rangle$,H_0有本征值$(\omega n\pm\omega_0/2)$. 因此,H_0在此表象中是对角化的. 而且还可看到,当 $\omega_0=\omega$ 时,H_0的能级图如图1.4.2(a)所示,除基态$|-,0\rangle$是单层以外,其它能级均为双层简并. 可是,当 $\Delta\omega=\omega-\omega_0\neq0$时,如图1.4.2(b)所示,基态能级$|-,0\rangle$仍为单层,其它各能级则为相距 $\Delta\omega$ 的双层能级,此时简并被解除. 然而,由(1.4.60)式可以看出,$|\pm,n\rangle$不是相互作用哈密顿量 V 的本征态. 但因为 H_0与 V 对易,我们可以通过选择 H_0的本征态矢的线性组合而找到两者都对角化的表象.

为此,先把 H[(1.4.61)式]在基矢集$\{|\pm,n\rangle\}$构成的表象中的矩阵表示写出来,然后再对其进行对角化. 由矩阵元$\langle\pm,n|H|\pm,n'\rangle$ $(n,n'=0,1,2\cdots)$可知,在每一个矩阵元不为零的子空间$\{|-,n+1\rangle,|+,n\rangle\}$中,$H$ 的矩阵表示为

$$H=\begin{bmatrix}\omega n+\omega_0/2 & \varepsilon\sqrt{n+1}\\ \varepsilon\sqrt{n+1} & \omega(n+1)-\omega_0/2\end{bmatrix} \tag{1.4.65}$$

其本征矢可由$|-,n+1\rangle$和$|+,n\rangle$线性叠加为

$$\begin{aligned}|u_{n+1}\rangle&=\sin\theta_{n+1}|-,n+1\rangle+\cos\theta_{n+1}|+,n\rangle\\&=\sin\theta_{n+1}|n+1\rangle\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\cos\theta_{n+1}|n\rangle\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.4.66}$$

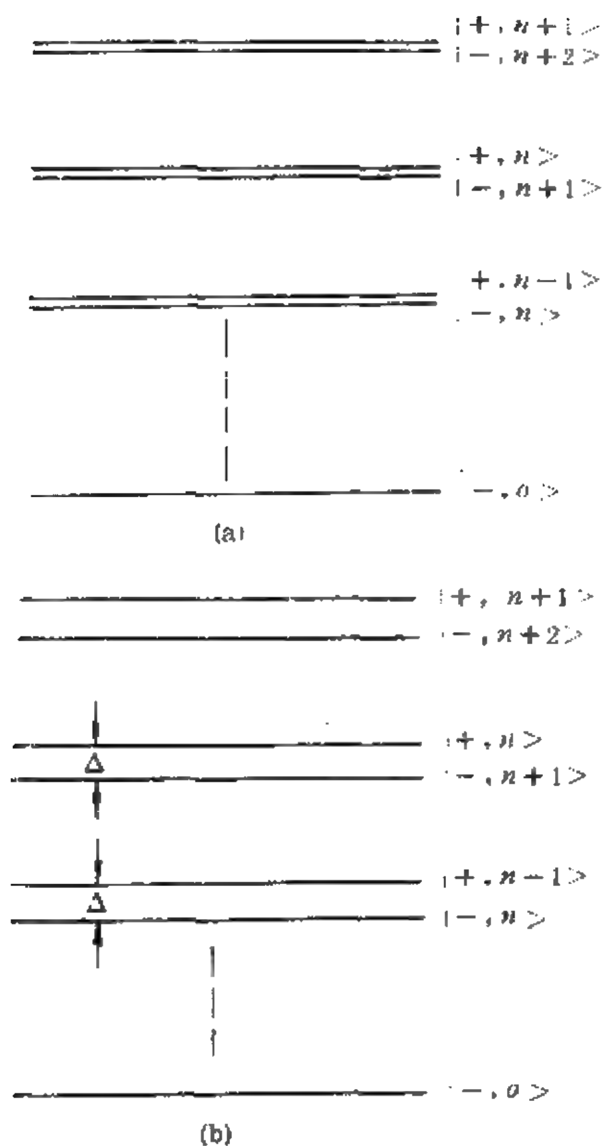


图 1.4.2　H_0的本征能谱

(a) $\omega=\omega_0$的共振情况下的能谱　(b) $\omega\neq\omega_0$的非共振情况下的能谱

其归一化条件是 θ_{n+1}满足

$$\sin^2\theta_{n+1}+\cos^2\theta_{n+1}=1 \tag{1.4.67}$$

由本征值方程

$$H|u_{n+1}\rangle=E_{n+1}|u_{n+1}\rangle \tag{1.4.68}$$

可得

$$\begin{vmatrix} \omega n+\omega_0/2-E_{n+1} & \varepsilon\sqrt{n+1} \\ \sqrt{n+1} & \omega(n+1)-\omega_0/2-E_{n+1} \end{vmatrix}=0$$

(1.4.69)

其解为
$$E_{n+1}^{\pm}=\omega(n+1/2)\pm\Delta_{n+1} \tag{1.4.70}$$

其中
$$\Delta_{n+1}=\sqrt{\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)^2+\varepsilon^2(n+1)} \tag{1.4.71}$$

与能量本征值 $E_{n+1}^{\pm}$ 相应的本征态是

$$|u_{n+1}^{\pm}\rangle=\cos\theta_{n+1}|+,n\rangle\pm\sin\theta_{n+1}|-,n+1\rangle \tag{1.4.72}$$

这里 θ_{n+1} 满足

$$\mathrm{tg}\theta_{n+1}=\frac{\dfrac{\omega_0-\omega}{2}+\Delta_{n+1}}{\varepsilon\sqrt{n+1}} \tag{1.4.73}$$

对于基态，H 的本征能量是

$$E_0=-\omega_0/2 \tag{1.4.74}$$

与之相应的本征态矢为

$$|u_0\rangle=|-,0\rangle \tag{1.4.75}$$

这样我们就完全确定了哈密顿量 H 的本征能量和本征态矢，从而实现了将 H 对角化.

显然，由(1.4.70)和(1.4.71)式可知，在共振情况($\omega=\omega_0$)下，系统的能量如图1.4.3所示. 从图1.4.3可以看出，原来 H_0 中能量的简并因原子-光场的相互作用被解除. 我们把此时由裸原子加相互作用构成的原子系统称为“修饰原子”，以区别未加相互作用场以前的原子. 修饰原子的本征值由(1.4.70)和(1.4.74)式给出，本征态由(1.4.72)式所示. 由(1.4.71)式可知，激发态中被拉开的能级间距 Δ_{n+1} 与原子-光场耦合常数 ε 有关，而且随着光子数 n 的增

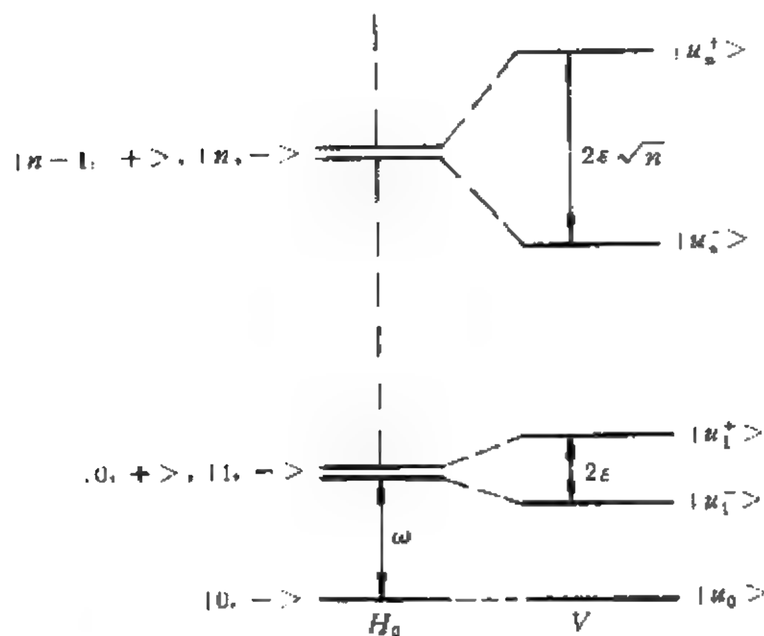


图 1.4.5 共振情况下($\omega=\omega_0$)，且 n 很大时，H_0+V 的本征能谱

加而增加. 由(1.4.72)式得系统的第一激发态为

$$|u_1^-\rangle=\cos\theta_1|-,1\rangle-\sin\theta_1|+,0\rangle \tag{1.4.76}$$

它的能量为

$$E_1^-=\omega/2-\Delta_1 \tag{1.4.77}$$

一般情况下有 $E_0<E_1^-$，即

$$-\omega_0/2<\omega/2-\Delta_1$$

亦即

$$\omega+\omega_0>2\Delta_1 \tag{1.4.78}$$

因而

$$(\omega+\omega_0)^2>(\omega-\omega_0)^2+4\epsilon^2 \tag{1.4.79}$$

即耦合常数的值满足

$$\varepsilon^2 < \omega\omega_0. \tag{1.4.80}$$

此时原子-辐射场耦合系统的基态能仍为 E_0，基态仍为 $|-,0\rangle$. 但是，如果裸原子与场的耦合极强，即 ε 很大，且 ω_0 很小，以致于方程(1.4.80)式不成立，那么第一激发态 $|u_1^-\rangle$ 将成为耦合系统的新基态，新基态能 E_1^- 将小于真空态 $|-,0\rangle$ 的能量. 而且在 n 大于1，而 ε 又非常大的情况下，甚至还可能出现 E_n^- 小于真空态能量 E_0 的情况. 可见，在强光场和强耦合的条件下，基态能具有不稳定性. 现代的理论研究表明，这种旧基态能的不稳定性，是形成某些新辐射相位跃迁的原因.

参 考 文 献

[1] L. Allen and J. H. Eberly, Optical Resonance and Two-level Atoms, Wiley, 1975.

[2] H. Haken, Light, Vol. 1, North-Holland, 1981.

[3] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, Clarendon, 1983.

[4] P. Meystre and M. Sargent III, Elements of Quantum Optics, Springer-Verlag, 1990.

[5] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Photons and Atoms — Introduction to Quantum Electrodynamics, Wiley, 1989.

[6] C. Leonardi, F. Persico and G. Vetri, Dicke model and theory of driven and spontaneous emission, La Rivista de Nuovo Cimento, 1986.

[7] 郭光灿，量子光学，高等教育出版社，1990.

[8] 彭金生，共振荧光与超荧光，科学出版社，1993.

[9] R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **93**, 99, 1954.

[10] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE.*, **51**, 89, 1963.

[11] P. W. Milonni, *Phys. Rep.*, **25**, 1, 1976.

[12] P. L. Knight and O. W. Milonni, *Phys. Rep.*, **66**, 21, 1980.

[13] M. Hillery, *Phys. Rev.*, **A24**, 933, 1981.

[14] R. R. Puri, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**, 444, 1985.

[15] 彭金生，李高翔，物理学报，**41**，1590，1992.

第五章 小系统与库耦合行为的量子理论

在量子光学中经常需要讨论小系统(如一个二能级原子,一个量子谐振子等等)由于受到周围环境(通常称之为库,如辐射场、腔壁原子等)的作用所引起的效应.由于小系统与库的作用具有随机性,因此本章我们介绍随机过程的基本理论.首先介绍描述经典布朗运动的朗之万方程和福克尔-普朗克方程;接着以量子谐振子和二能级原子为例,讨论如何用量子理论处理小系统与库的耦合行为;最后简单介绍描述量子系统的特征函数和准概率分布函数,它们在利用量子理论处理小系统与库耦合行为时起着重要的作用.

第一节 经典朗之万方程和福克尔-普朗克方程

布朗运动是最简单而又最典型的随机运动,它也可作为经典小系统与库耦合的例子.物质粒子(称为布朗粒子,可看作为小系统 S)沉浸在液体中,液体(称之为库 R)由许多比布朗粒子小得多的微粒组成.物质粒子在液体中不断受到小液体微粒的碰撞而随机地运动.那么粒子的速度 V 将如何随时间变化呢?由于系统 S(粒子)与库 R 的相互作用(即粒子经受大量小液体微粒的不断碰撞)是随机过程,所以速度 V 是一随机变量.描述粒子速度 $V(t)$随时间的演化行为,通常可以采用两种方式,一种是应用朗之万方程来描述;另一种则是应用福克尔-普朗克方程来描述.两种理论的处理方式不同,但对同一物理问题所给出的结论是等价的.下面来介绍这两种方程.

一、朗之万方程

在讨论粒子 S 受库 R 中微粒的随机碰撞而运动时，应注意其速度 $V(t)$受两个方面的影响. 一方面是正比于粒子本身速度 V 的摩擦力：

$$F_k = -\gamma_0 V \tag{1.5.1}$$

式中 γ_0是比例常数，它对应系统的耗散系数. 另一方面是碰撞(冲击)的随机力，对于一维运动而言可以写为

$$F_0(t) = \psi \sum_{j=1}^{2} \delta(t - t_j)\epsilon_j \tag{1.5.2}$$

这里 $\epsilon_j(j=1,2)$表示一维运动有两个可能的方向，ψ 对应冲击的强度. 由于这种随机力各向均匀，所以求平均时应为零，即

$$\langle F_r(t) \rangle = 0 \tag{1.5.3}$$

如果讨论不同时刻随机力 $F_0(t)$之间的关联，则应有

$$\langle F_0(t) F_0(t') \rangle = c\delta(t - t') \tag{1.5.4}$$

也就是说随机力在不同时刻之间无关联，常数 c 正比于 ψ^2，可见它是每次冲击强度的度量，对应着系统的涨落. 所以质量为 m 的粒子 S 的运动方程按经典运动规律应写为

$$m \frac{dV}{dt} = -\gamma_0 V + F_0(t) \tag{1.5.5}$$

这样可得系统随机运动的朗之万方程为

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma V + F(t) \tag{1.5.6}$$

式中

$$\gamma = \gamma_0 / m, \qquad F = F_0 / m$$

方程(1.5.6)式描述了受阻尼力和随机力作用的粒子随时间的运

动规律. 其中随机力 $F(t)$具有性质

$$\langle F(t)\rangle = 0 \tag{1.5.7}$$

$$\langle F(t)F(t')\rangle = Q\delta(t-t') \tag{1.5.8}$$

式中 Q 为涨落强度的度量.

如果粒子在初始时刻具有确定的速度 V_0，那么方程(1.5.6)式的解可以写为

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} F(t')dt' \tag{1.5.9}$$

对上式作平均，则

$$\langle V(t)\rangle = V_0 e^{-\gamma t} \tag{1.5.10}$$

(1.5.10)式表明，t 时刻粒子的平均速度按指数规律衰减. 进一步，利用(1.5.7)和(1.5.8)式可得速度的关联函数为

$$\langle V(t_1)V(t_2)\rangle = V_0^2\exp[-\gamma(t_1+t_2)] + \int_0^{t_1} dt_1'\int_0^{t_2} dt_2'\exp$$
$$\times[-\gamma(t_1+t_2-t_1'-t_2')]Q\delta(t_1'-t_2') \tag{1.5.11}$$

为计算上式中的双重积分，我们先计算 t_2'的积分. 显然只有当 $t_1'=t_2'$时积分才不为零. 假设 $t_2\leqslant t_1$(如图1.5.1所示)，在这种情况下，t_1'的取值范围就是$0\to t_2$. 如果 $t_1\leqslant t_2$，那么 t_1'的积分区间就是$0\to t_1$. 这就是说，对于(1.5.11)式中的双重积分运算而言，如果先对自变量 t_2'进行积分运算，那么在计算 t_1'的积分时，其积分上限就是取 t_1 和 t_2中较小值，即 $\min(t_1, t_2)$. 于是(1.5.11)式化为

$$\langle V(t_1)V(t_2)\rangle = V_0^2\exp[-\gamma(t_1+t_2)]$$
$$+Q\int_0^{\min(t_1,t_2)}\exp[-\gamma(t_1+t_2-2t_1')]dt_1'$$
$$= V_0^2\exp[-\gamma(t_1+t_2)] + \frac{Q}{2\gamma}\{\exp[-\gamma|t_1-t_2|]$$
$$-\exp[-\gamma(t_1+t_2)]\} \tag{1.5.12}$$

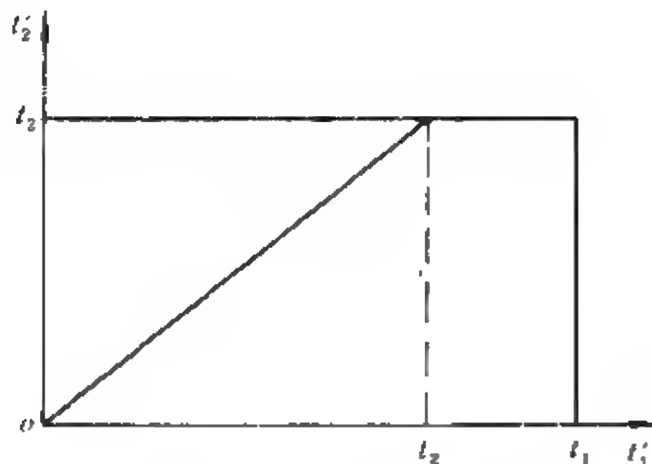


图 1.5.1 (1.5.12)式的积分区域

如果在比 γ^{-1}长得多的时间范围内考察粒子的运动，即 $\gamma t_1 \gg 1, \gamma t_2 \gg 1$，在这种情况下，速度的关联函数仅依赖于时间间隔 $|t_1 - t_2|$，而与粒子的初始速度 V_0无关，即

$$\langle V(t_1)V(t_2)\rangle = \frac{Q}{2\gamma}\exp[-\gamma|t_1 - t_2|] \qquad (1.5.13)$$

上式不仅给出了速度平方值，而且还显示出速度的关联按指数规律的方式消失（如图1.5.2所示）. 由(1.5.13)式可知，在稳态或平衡态情况下（即 $t_1, t_2 \gg 1$时），布朗粒子的平均动能为

$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}m\langle V^2(t)\rangle = \frac{mQ}{4\gamma} \qquad (1.5.14)$$

根据统计力学的基本定律，在库中处于热平衡状态的布朗粒子的平均动能为

$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}k_B T \qquad (1.5.15)$$

式中 k_B 为玻尔兹曼常量，T 为热库的温度. 利用(1.5.14)和(1.5.15)式，可得到反映涨落强度的量 Q 的表达式：

$$Q = 2\gamma k_B T/m \qquad (1.5.16)$$

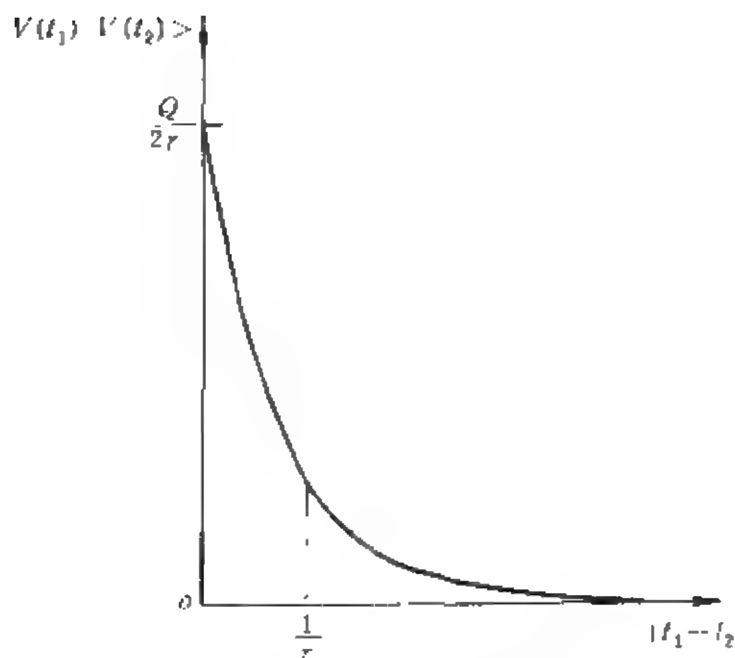


图 1.5.2 速度关联函数$\langle V(t_1)V(t_2)\rangle$与时间间隔$|t_1-t_2|$的关系

由于γ描述的是液体(库)对粒子(系统)耗散的强弱，它是一个不具有随机性质的确定量，因此可以通过上式来确定涨落强度Q这一反映随机力强度的量.(1.5.16)式即为简单的耗散-涨落关系式.

朗之万方程(1.5.6)式还可推广到系统具有多个随机变量的情形.设系统有一组随机变量$x=\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\}$，其朗之万方程为

$$\frac{d}{dt}x_i=\sum_k M_{ik}(x)x_k-\Gamma_i(t) \tag{1.5.17}$$

式中M_{ik}可以描述阻尼或更一般的耗散过程，以及外加力的作用.$\Gamma_i(t)$是随机力，与(1.5.7)，(1.5.8)式相似，它们具有如下性质：

$$\begin{aligned}&\langle\Gamma_i(t)\rangle=0\\&\langle\Gamma_i(t_1)\Gamma_j(t_2)\rangle=G_{ij}\delta(t_1-t_2)\end{aligned} \tag{1.5.18}$$

二、福克尔-普朗克方程

除了采用朗之万方程来描述布朗运动之外，还可以应用福克尔-普朗克方程来处理随机运动的问题.

福克尔-普朗克方程的基本思想是：设想有大量相同的实验系统，每个实验系统中都有一布朗粒子在液体中运动，在时刻 t 同时测量各个实验系统中布朗粒子的速度. 由测量结果可得知在速度 V—$V+dV$ 范围内的粒子数目 $N(V)dV$. 如果用速度概率分布函数 $P(V,t)$来代替 $N(V)$，则 $P(V,t)$应正比于 $N(V)$，且应是归一化的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(V,t)dV=1 \qquad (1.5.19)$$

所以，$P(V,t)dV$ 表征 t 时刻粒子处于 V—$V+dV$ 之间的概率. 如果找到了粒子的速度概率分布函数 $P(V,t)$随时间的演化规律，就可得知系统(粒子)的速度 $V(t)$随时间的演化规律. 由统计物理理论可严格证明，布朗粒子的速度概率分布函数 $P(V,t)$的时间演化遵从福克尔-普朗克方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(V,t)=\left[\frac{\partial}{\partial V}\gamma V+\frac{Q}{2}\frac{\partial^2}{\partial V^2}\right]P(V,t) \qquad (1.5.20)$$

下面我们来简要推导福克尔-普朗克方程(1.5.20)式. 设在 $t=t_0$时刻速度为 V_0的粒子，由于随机碰撞力的作用，到时刻 t 时，它具有速度为 V 的概率分布是 $P(V,t;V_0,t_0)$. 如果只讨论平稳的过程，即讨论分布函数具有时间平移不变性的情况，那么 t_0可取任意值. 令 $t_0=0$，则 t 表征时间差，于是概率分布函数 $P(V,t;V_0,t_0)$仅依赖于时间差 t，这样它可表示为 $P(V,t;V_0)$. 为导出 $P(V,t;V_0)$所遵循的运动方程，先讨论在0—$t+\Delta t$ 时间间隔内，粒子由速度 V_0散射到速度为 V 的概率 $P(V,t+\Delta t;V_0)$，它可以看作为在 t 时间间隔内粒子散射到中间速度 V_1，然后再经过Δt时间而散射到速度为 V 的两步过程，所以粒子最后散射到速度为 V 的概率

$P(V,t+\Delta t;V_0)$是上述两过程概率函数的乘积并对所有中间速度V_1求积分. 即

$$P(V,t+\Delta t;V_0)=\int dV_1 P(V,\Delta t;V_1)P(V_1,t;V_0)$$

(1.5.21)

粒子速度概率分布函数 $P(V,t+\Delta t;V_0)$的大小既依赖于时间参量,又依赖于速度参量. 现在分别考虑这两个参变量的变化对于速度概率分布的影响. 先讨论时间间隔微小变化的情况,即讨论$\Delta t\to 0$的极限情况,此时 $P(V,t+\Delta t;V_0)$可按Δt的幂级数展开而只精确到一级近似,那么

$$P(V,t+\Delta t;V_0)\approx P(V,t;V_0)+\frac{\partial}{\partial t}P(V,t;V_0)\Delta t$$

(1.5.22)

所以有

$$\frac{\partial}{\partial t}P(V,t;V_0)=\frac{P(V,t+\Delta t;V_0)-P(V,t;V_0)}{\Delta t} \qquad (1.5.23)$$

下面再来看看速度参量变化的情况,若令 $\Delta V=V-V_1$,即 $P(V,\Delta t;V_1)=P(V,\Delta t;V-\Delta V)$;$P(V_1,t;V_0)=P(V-\Delta V,t;V_0)$. 这样,对于(1.5.21)式右边的被积函数可以按速度参变量ΔV 的幂级数展开,且作代换 $V_1=V-\Delta V$,则有

$$P(V,\Delta t,V-\Delta V)P(V-\Delta V,t;V_0)=P(V+\Delta V-\Delta V,\Delta t;$$

$$V-\Delta V)P(V-\Delta V,t;V_0)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\Delta V)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial V^n}[P(V+\Delta V,\Delta t;V)P(V,t;V_0)]$$

将(1.5.21)式和上式一并代入(1.5.23)式,有

$$\frac{\partial}{\partial t}P(V,t;V_0)=\frac{1}{\Delta t}\left\{\int dV_1 P(V,\Delta t;V_1)P(V_1,t;V_0)-P(V,t;\right.$$

$V_0)\Big\} = \frac{1}{\Delta t}\Big\{\int d(\Delta V)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\Delta V)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial V^n}[P(V+\Delta V,\Delta t;V)P(V,t;$

$V_0)] - P(V,t;V_0)\Big\}$

由于上式右边求和式中 $n=0$的项与右边第二项相消，所以上式可化为

$$\frac{\partial}{\partial t}P(V,t;V_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial V^n}[M_n P(V,t;V_0)] \qquad (1.5.24)$$

式中 M_n 称为 n 阶矩，它表示为

$$M_n = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta V)(\Delta V)^n P(V+\Delta V,\Delta t;V) = \frac{\langle(\Delta V)^n\rangle}{\Delta t}$$

$$(1.5.25)$$

由于Δt足够小时，$\langle(\Delta V)^n\rangle$比 Δt 更快趋于零，所以保留前两项已足够精确，这样由速度概率分布函数 $P(V,t;V_0)$随时间演化的一般形式(1.5.24)式可得速度概率分布所遵循的福克尔-普朗克方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}P(V,t) = -\frac{\partial}{\partial V}(M_1 P) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial V^2}(M_2 P) \qquad (1.5.26)$$

现在借助于矩的定义(1.5.25)式来推导布朗运动(1.5.6)式所对应的一阶矩 M_1和二阶矩 M_2，由朗之万方程(1.5.6)式可给出很小时间范围Δt内的形式解：

$$\Delta V(t) = -\gamma\int_t^{t+\Delta t}dt'V(t') + \int_t^{t+\Delta t}dt'F(t') \qquad (1.5.27)$$

由于在Δt很小的范围内(例如小于特征时间$1/\gamma$)，速度 $V(t)$的变化很小，因此有

$$M_1 = \frac{\langle(\Delta V)\rangle}{\Delta t} = -\gamma\langle V(t)\rangle + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}dt'\langle F(t')\rangle$$
$$= -\gamma\langle V(t)\rangle = -\gamma V(t) \qquad (1.5.28)$$

同样地，二阶矩 M_2为

$$M_2=\frac{\langle(\Delta V)^2\rangle}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\{\gamma^2\langle V^2\rangle(\Delta t)^2-2\gamma\int_t^{t+\Delta t}dt'\int_t^{t+\Delta t}dt''\langle V(t')$$

$$\times F(t'')\rangle+\int_t^{t+\Delta t}dt'\int_t^{t+\Delta t}dt''\langle F(t')F(t'')\rangle\} \qquad (1.5.29)$$

上式右边第一项与$(\Delta t)^2$成正比，所以考虑$\Delta t\to 0$时，显然为零.右边第二项被积函数中的$\langle V(t')F(t'')\rangle$仅在$t'=t''$时刻不为零，但此关联函数的积分显然为零.右边第三项由(1.5.9)式可知其值为Q.所以(1.5.29)式的结果可表示为

$$M_2=Q \qquad (1.5.30)$$

把(1.5.28)和(1.5.30)式代入方程(1.5.24)式，即得描述布朗粒子随机运动速度分布函数$P(V,t)$所满足的福克尔-普朗克方程(1.5.20)式.

我们知道，如果求解出方程(1.5.20)式，即可依据

$$\langle V^n\rangle=\int V^nP(V,t)dV \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (1.5.31)$$

得到任意时刻t描述布朗运动的速度V的n阶矩$\langle V^n\rangle$(如速度V、动能$mV^2/2$的平均值).因此下面我们来讨论福克尔-普朗克方程的解.一般说来，福克尔-普朗克方程的解比较复杂，它依据不同的初始条件和边界条件而定.但其稳态解$\left(\frac{\partial P(V,t)}{\partial t}=0\right)$比较简单，现讨论如下.由于$\frac{\partial P(V,t)}{\partial t}=0$，福克尔-普朗克方程(1.5.20)式右边也为零，即

$$\frac{\partial}{\partial V}[\gamma VP(V)+\frac{Q}{2}\frac{\partial}{\partial V}P(V)]=0$$

所以有

$$\gamma VP(V)+\frac{Q}{2}\frac{\partial}{\partial V}P(V)=C \qquad (1.5.32)$$

式中C为待定常数.此外速度概率分布函数应当是归一化的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(V)dV = 1 \qquad (1.5.33)$$

待定常数 C 是不难依据边界条件来确定的，考虑到速率概率分布是在有限范围内，应有边界条件：

$$P(V)|_{V=\pm\infty} = 0 \qquad (1.5.34)$$

因而待定常数 $C=0$，代入(1.5.32)式，则有

$$\frac{Q}{2}\frac{\partial}{\partial V}P(V) = -\gamma V P(V)$$

积分上式即得

$$P(V) = k\exp(-\gamma V^2/Q) \qquad (1.5.35)$$

利用归一化条件(1.5.33)式，可得 $k=(\gamma/\pi Q)^{1/2}$，所以福克尔-普朗克方程(1.5.20)式的稳态解为

$$P(V) = (\gamma/\pi Q)^{1/2}\exp(-\gamma V^2/Q) \qquad (1.5.36)$$

下面介绍福克尔-普朗克方程(1.5.20)式在初始条件为 $P(V,t_0)=\delta(V-V_0)$ 时的瞬态解. 首先对福克尔-普朗克方程(1.5.20)式进行傅里叶变换. 引入特征函数：

$$\Phi(s,t) = \int dV P(V,t)e^{isV} \qquad (1.5.37)$$

其逆变换为

$$P(V,t) = \frac{1}{2\pi}\int ds\Phi(s,t)e^{-isV} \qquad (1.5.38)$$

对上式以 t 为自变量求偏导，得

$$\frac{\partial P(V,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int ds\,\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial t}e^{-isV} \qquad (1.5.39)$$

再以 V 为自变量对(1.5.38)式求二次偏导数，得

$$\frac{\partial^2 P(V,t)}{\partial V^2}=\frac{1}{2\pi}\int ds\Phi(s,t)\frac{\partial^2}{\partial V^2}e^{-isV}=-\frac{1}{2\pi}\int ds\Phi(s,t)s^2e^{-isV}$$

(1.5.40)

若以 s 为自变量对(1.5.37)式求偏导,则有

$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi(s,t)=i\int dVP(V,t)Ve^{isV}$$

将上式作傅里叶逆变换,得到

$$VP(V,t)=-\frac{i}{2\pi}\int ds\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s}e^{-isV} \tag{1.5.41}$$

再将上式以 V 为自变量求偏导数,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial V}[VP(V,t)]&=-\frac{i}{2\pi}\int ds\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s}(-is)e^{-isV}\\&=-\frac{1}{2\pi}\int dss\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s}e^{-isV}\end{aligned} \tag{1.5.42}$$

把方程(1.5.39),(1.5.40)和(1.5.42)式代入方程(1.5.20)式,我们得到

$$\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial t}=-\gamma s\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s}-\frac{Q}{2}s^2\Phi(s,t) \tag{1.5.43}$$

由微分方程理论我们知道,方程(1.5.43)式的解可以利用特征方程法求解,上式可写为

$$\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial t}+\gamma s\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s}=-\frac{Q}{2}s^2\Phi(s,t)$$

它的特征方程为

$$\frac{dt}{1}=\frac{ds}{\gamma s}=\frac{d\Phi(s,t)}{-\frac{Q}{2}s^2\Phi(s,t)} \tag{1.5.44}$$

对上式的第一个等式进行积分,得到参量平面(s,t)上的一条特征曲线,即由

$$\frac{dt}{1}=\frac{ds}{\gamma s} \tag{1.5.45}$$

积分后有

$$\gamma t=\ln s-\ln C$$

即

$$s=C\exp[\gamma(t-t_0)]$$

于是，不定常数 C 满足

$$C=s\exp[-\gamma(t-t_0)] \tag{1.5.46}$$

现在再来对(1.5.44)式的第二个等式积分，也就是求解方程

$$\frac{ds}{\gamma s}=\frac{d\Phi}{-\frac{Q}{2}s^2\Phi}$$

对上式积分，得

$$\ln\Phi-\ln\Omega=-Qs^2/(4\gamma)$$

所以

$$\Phi=\Omega\exp[-Qs^2/(4\gamma)] \tag{1.5.47}$$

这里参量 Ω 沿不同特征曲线应有不同值，所以它应是 C 的隐函数，因而也是 s 和 t 的函数[见(1.5.46)式]，这样

$$\Phi(s,t)=\Omega\{s\exp[-\gamma(t-t_0)]\}\exp\left\{-\frac{Q}{4\gamma}s^2\right\} \tag{1.5.48}$$

由初始条件

$$P(V,t_0)=\delta(V-V_0) \tag{1.5.49}$$

可从(1.5.37)式得知

$$\Phi(s,t_0)=\exp(isV_0) \tag{1.5.50}$$

此时，由(1.5.48)式给出

$$\exp(isV_0)=\Omega(s)\exp\left(-\frac{Q}{4\gamma}s^2\right)$$

所以参量 Ω 与 s 的关系式为

$$\Omega(s)=\exp\left(isV_0+\frac{Q}{4\gamma}s^2\right) \tag{1.5.51}$$

将(1.5.51)式代入(1.5.48)式，并注意到(1.5.51)式中的 s 应由 $s\exp[-\gamma(t-t_0)]$ 取代，于是即得 $\Phi(s,t)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\Phi(s,t)=&\exp\left\{iV_0s\exp[-\gamma(t-t_0)]+\frac{Q}{4\gamma}s^2\exp[-2\gamma(t-t_0)]\right\}\\&\times\exp\left(-\frac{Q}{4\gamma}s^2\right)\\=&\exp\left\{-\frac{Q}{4\gamma}s^2[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]\right.\\&\left.+isV_0\exp[-\gamma(t-t_0)]\right\}\end{aligned} \tag{1.5.52}$$

再将上式代入(1.5.38)式，就能得知福克尔-普朗克方程(1.5.20)式的瞬态解 $P(V,t)$ 为

$$\begin{aligned}P(V,t)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ds\exp\left\{-\frac{Q}{4\gamma}s^2[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]\right.\\&\left.+isV_0\exp[-\gamma(t-t_0)]-isV\right\}\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ds\exp\left\{-\frac{Q}{4\gamma}s^2[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]\right.\\&\left.-is[V-V_0\exp[-\gamma(t-t_0)]]\right\}\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ds\exp\left\{-\frac{Q}{4\gamma}[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]\right.\\&\left.\times\left[s+\frac{i2\gamma[V-V_0e^{-\gamma(t-t_0)}]}{Q(1-e^{-2\gamma(t-t_0)})}\right]^2\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{\gamma[V-V_0e^{-\gamma(t-t_0)}]^2}{Q[1-e^{-2\gamma(t-t_0)}]}\right\}\end{aligned} \tag{1.5.53}$$

应用积分等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

于是(1.5.53)式化为

$$P(V,t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi Q\{1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]\}}}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\gamma[V-V_0\exp[-\gamma(t-t_0)]]^2}{Q[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]}\right\} \qquad (1.5.54)$$

这样我们就得到了初始条件为(1.5.49)式时,福克尔-普朗克方程(1.5.20)式的瞬态解,它给出了概率分布函数 $P(V,t)$ 随时间的演化. 显然概率分布函数 $P(V,t)$ 是归一化的,这是因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(V,t)dV = \left\{\frac{\pi Q[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]}{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\gamma[V-V_0\exp[-\gamma(t-t_0)]]^2}{Q[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]}\right\} dV$$
$$= \left\{\frac{\pi Q[1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]]}{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi Q\{1-\exp[-2\gamma(t-t_0)]\}}{\gamma}}$$
$$= 1$$

当 $t\to\infty$ 时,(1.5.54)式简化为

$$P(V,t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi Q}} \exp\left[-\frac{\gamma V^2}{Q}\right] \qquad (1.5.55)$$

这即是(1.5.35)式. 这说明,当 $t\to\infty$ 时,概率分布函数 $P(V)$ 处于稳态分布,它表明布朗粒子与库达到了热平衡状态.

利用福克尔-普朗克方程的瞬态解(1.5.54)式和(1.5.32)式,就可方便地求出 V 的 n 阶矩 $\langle V^n\rangle$. 但是,有时求平均值

$$C(\xi,t) = \langle e^{i\xi V}\rangle = \int dV e^{i\xi V} P(V,t) \qquad (1.5.56)$$

比直接求(1.5.31)式更容易,式中 ξ 是实参数. 而且,因为

$$\langle V^n\rangle=\frac{\partial^n}{\partial(i\xi)^n}C(\xi,t)\Big|_{\xi=0}\qquad(n=0,1,2\cdots)\quad(1.5.57)$$

显然，对于不同的 n，$\langle V^n\rangle$ 都可以由 $C(\xi,t)$ 求得. 通常把 $C(\xi,t)$ 称为 V 的生成函数或特征函数.

与朗之万方程一样，我们也可把描述一个随机变量的福克尔-普朗克方程(1.5.26)式推广到系统具有多个随机变量的情形. 与朗之万方程(1.5.17)式或(1.5.18)式相应的福克尔-普朗克方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}[B_i(x)P]+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 Q_{ij}(x)P}{\partial x_i\partial x_j}\quad(1.5.58)$$

其中

$$B_i(x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\langle\Delta x_i(t)\rangle\qquad(1.5.59)$$

$$Q_{ij}(x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\langle\Delta x_i(t)\Delta x_j(t)\rangle\qquad(1.5.60)$$

可以证明 Q_{ij} 与(1.5.18)式中的 G_{ij} 相等，即

$$Q_{ij}=G_{ij}\qquad(1.5.61)$$

第二节　量子谐振子和二能级原子满足的主方程

从上面的讨论看到，对于经典的小系统与库耦合体系，利用福克尔-普朗克方程根据一定的初始条件求解出概率分布函数 $P(V,t)$，就可以利用(1.5.31)式得知小系统的随机物理量的平均值，从而得知小系统随时间的演化规律. 那么对于与库耦合的量子系统，能否找到一个与福克尔-普朗克方程(1.5.20)或(1.5.26)式性质相似的方程呢?

我们知道，在量子力学中，对两个彼此有耦合的系统 A 和 B，如果我们只关心系统 A 中物理量 M 的期望值，那么对于系统 A，我们可以采用约化密度算符 ρ_A

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB} \tag{1.5.62}$$

来描述.这里 ρ_{AB} 为耦合系统的密度算符,Tr_B 表示对系统 B 求迹.这样,系统中物理量 M 的期望值为

$$\langle M \rangle = \mathrm{Tr}_A \rho_A M \tag{1.5.63}$$

比较(1.5.63)式与(1.5.31)式可以发现,ρ_A 与经典理论中的 $P(V,t)$ 有着相同的作用.因此对于与库耦合的量子小系统,只要求解出描述小系统的约化密度算符随时间的演化,就可得到物理量 M 的期望值随时间演化的规律.下面我们通过具体讨论量子谐振子与辐射场的耦合系统以及二能级原子与辐射场的耦合系统这两个典型的量子小系统与库耦合的体系,来说明如何运用量子统计理论来处理小系统与库耦合的行为.

一、量子谐振子满足的主方程

设小系统 S 为一量子谐振子,热库 R 为辐射场,描述量子谐振子与辐射场耦合体系的哈密顿量可写为

$$H = H_R + H_S + H_{RS} \tag{1.5.64}$$

这里

$$H_S = \hbar \omega a^{+} a \tag{1.5.65}$$

$$H_R = \sum_k \hbar \omega_k a_k^{+} a_k \tag{1.5.66}$$

$$H_{RS} = \hbar \sum_k (\epsilon_k a_k^{+} a + h.c.) \tag{1.5.67}$$

分别表征谐振子、辐射场以及它们之间相互作用的哈密顿量.由第一章第四节的密度算符理论可知,在相互作用绘景中,耦合体系的密度算符 $\rho^I(t)$ 满足方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho^I(t) = [H_{RS}^I(t), \rho^I(t)] \tag{1.5.68}$$

式中

$$H_{RS}^{I}(t)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}(H_R+H_S)(t-t_0)\right]$$
$$\times H_{RS}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(H_R+H_S)(t-t_0)\right] \quad (1.5.69)$$

由于我们关心的是小系统 S 的行为，所以采用它的约化密度算符：

$$R(t)=\mathrm{Tr}_R\rho^I(t) \quad (1.5.70)$$

来描述. 如果我们求出 $R(t)$，就可得知小系统 S 的全部信息. 假设小系统 S 与库 R 的耦合是从 $t=0$时刻开始的，所以整个系统的初始条件就是

$$\rho^I(0)=R(0)\Gamma(0) \quad (1.5.71)$$

其中 $\Gamma(0)$为初始时刻热库 R 的密度算符. 由于初始时刻辐射场与量子谐振子还未发生相互作用，通常可以认为它是处于热平衡状态. 依据(1.3.189)和(1.3.194)式，初始值 $\Gamma(0)$应为

$$\Gamma(0)=\frac{\exp(-H_R/k_BT)}{\mathrm{Tr}_R[\exp(-H_R/k_BT)]} \quad (1.5.72)$$

现在来讨论运动方程(1.5.68)式的解. 对(1.5.68)式形式积分，给出

$$\rho^I(t)=\frac{1}{i\hbar}\rho^I(0)+\frac{1}{i\hbar}\int_0^t[H_{RS}^I(t'),\rho^I(t')]dt' \quad (1.5.73)$$

把(1.5.73)式再迭代回方程(1.5.68)式，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^I(t)=\frac{1}{i\hbar}[H_{RS}^I(t),\rho^I(0)]$$
$$+\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int_0^t[H_{RS}^I(t),[H_{RS}^I(t'),\rho^I(t')]]dt' \quad (1.5.74)$$

应用(1.5.70)式，于是由上式得约化密度矩阵 $R(t)$满足方程

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t}=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t\mathrm{Tr}_R[H_{RS}^I(t),[H_{RS}^I(t'),\rho^I(t')]]dt'$$

$$(1.5.75)$$

其中已考虑到初始时刻小系统与热库间无相互作用，故

$$\mathrm{Tr}_R[H^I_{RS}(t),\rho^I(0)]=0 \tag{1.5.76}$$

方程(1.5.75)式就是描述小系统与热库耦合行为的主方程.如果令库R很大，因而小系统S的状态在与库耦合随时间变化时，库本身的变化很小，以致于可以忽略库本身的变化.故作为近似，令

$$\rho^I(t)=R(t)\Gamma(0) \tag{1.5.77}$$

是合理的.这样可把主方程写为

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t}=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t \mathrm{Tr}_R[H^I_{RS}(t),[H^I_{RS}(t'),R(t')\Gamma(0)]]dt'$$

若令被积函数中显著不为零的部分是t'接近t处，所以作为近似，又可在积分中用$R(t)$取代$R(t')$.这种近似称为马尔可夫(Markov)近似.作了这种近似后，我们便得到广义主方程：

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t}=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t \mathrm{Tr}_R[H^I_{RS}(t),[H^I_{RS}(t'),R(t)\Gamma(0)]]dt' \tag{1.5.78}$$

注意到在推导方程(1.5.78)式时并没有涉及到小系统与库耦合体系哈密顿量的具体形式，因此方程(1.5.78)式可以作为我们处理许多具体的量子小系统与库耦合行为的出发点.

现在再回过来讨论量子谐振子系统的主方程.依据(1.5.65)—(1.5.67)式和(1.5.69)式可知，在相互作用绘景中，耦合体系的相互作用哈密顿量为

$$H^I_{RS}(t)=\hbar\{a^+\sum_k \varepsilon_k a_k \exp[-i(\omega_k-\omega_0)t]+h.c.\} \tag{1.5.79}$$

其中已应用了关系式：

$$\exp(\chi a^+a)a\exp(-\chi a^+a)=ae^{-\chi} \tag{1.5.80}$$

$$\exp(\chi a^{+} a) a^{+} \exp(-\chi a^{+} a) = a^{+} e^{-\chi} \tag{1.5.81}$$

把(1.5.79)式代入方程(1.5.78)式中，可知右边积分中的对易关系应为

$$\begin{aligned}
[H_{RS}^{I}(t),[H_{RS}^{I}(t'),R(t)\Gamma(0)]] = \{ & H_{RS}^{I}(t) H_{RS}^{I}(t') R(t)\Gamma(0) \\
& - H_{RS}^{I}(t) R(t)\Gamma(0) H_{RS}^{I}(t') - H_{RS}^{I}(t') R(t)\Gamma(0) H_{RS}^{I}(t) \\
& + R(t)\Gamma(0) H_{RS}^{I}(t') H_{RS}^{I}(t) \}
\end{aligned} \tag{1.5.82}$$

于是上式右边第一项可写为

$$\begin{aligned}
H_{RS}^{I}(t) H_{RS}^{I}(t') R(t)\Gamma(0) = \hbar^2 \{ & a^{+} \sum_k a_k \varepsilon_k \exp[-i(\omega_k - \omega_0)t] \\
& + h.c. \} \times \{ a^{+} \sum_k \varepsilon_k a_k \exp[-i(\omega_k - \omega_0)t'] + h.c. \} \\
& \times R(t)\Gamma(0) \\
= \hbar^2 a a^{+} & \sum_k \varepsilon_k^2 a_k^{+} a_k R(t)\Gamma(0) \exp[-i(\omega_k - \omega_0)(t - t')] \\
& + \hbar^2 a^{+} a \sum_k \varepsilon_k^2 a_k a_k^{+} R(t)\Gamma(0) \exp[i(\omega_k - \omega_0)(t - t')] \\
& + \hbar^2 a^{+2} \sum_k \varepsilon_k^2 a_k^2 R(t)\Gamma(0) \exp[-i(\omega_k - \omega_0)(t + t')] \\
& + \hbar^2 a^2 \sum_k \varepsilon_k^2 a_k^{+2} R(t)\Gamma(0) \exp[i(\omega_k - \omega_0)(t + t')]
\end{aligned} \tag{1.5.83}$$

因为将上式对库的本征态求迹以后，第三、第四项等于零. 第一项求迹运算时，由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_R a a^{+} a_k^{+} a_k R(t)\Gamma(0) &= \sum_{n_k} a a^{+} R(t) \langle n_k | a_k^{+} a_k \Gamma(0) | n_k \rangle \\
&= \sum_{n_k} a a^{+} R(t) \langle n_k \left| a_k^{+} a_k \frac{\exp(-H_R/k_B T)}{\mathrm{Tr}_R[\exp(-H_R/k_B T)]} \right| n_k \rangle \\
&= a a^{+} R(t) \bar{n}_k
\end{aligned} \tag{1.5.84}$$

其中已应用了(1.5.72)式，并且应用了辐射场处于热平衡态时的光子数期望值：

$$\bar{n}_k=[\exp(\hbar\omega_k/k_BT)-1]^{-1} \tag{1.5.85}$$

在计算(1.5.83)式右边第二项的迹的时候，只要应用等式 $a_ka_k^+=a_k^+a_k+1$，进行与(1.5.84)式类似的运算即可. 把所得结果及(1.5.84)式代入方程(1.5.78)式，再注意到

$$\int_0^t\sum_k aa^+R(t)\bar{n}_k\varepsilon_k^2\exp[i(\omega_0-\omega_k)(t-t')]dt'=aa^+\bar{n}_0\gamma_hR(t) \tag{1.5.86}$$

这里

$$\gamma_h=2\pi\sum_k|\varepsilon_k|^2\delta(\omega_k-\omega_0) \tag{1.5.87}$$

$$\bar{n}_0=[\exp(\hbar\omega_0/k_BT)-1]^{-1}\quad(\text{当 }\omega_k=\omega_0\text{ 时},\bar{n}_k=\bar{n}_0) \tag{1.5.88}$$

最后我们即得描述与辐射场耦合的量子谐振子的主方程为

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t}=\frac{\gamma_h}{2}\{[a,R(t)a^+]+[aR(t),a^+]\}+\gamma_h\bar{n}_0[a,[R(t),a^+]] \tag{1.5.89}$$

它也称为量子阻尼谐振子方程.

为求解量子谐振子方程(1.5.89)式，可以采用不同的方法. 如果我们选用粒子数态 $|n\rangle$ 表示，耦合体系的约化密度矩阵元为 $\langle n|R(t)|m\rangle$，这时量子谐振子方程可以写为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle n|R(t)|m\rangle&=\frac{\gamma_h}{2}\{\langle n|[a,R(t)a^+]|m\rangle+\langle n|[aR(t),a^+]|m\rangle\}\\&\quad+\gamma_h\bar{n}_0\langle n|[a,[R(t),a^+]]|m\rangle\\&=\frac{\gamma_h}{2}\{\langle n|aR(t)a^+|m\rangle-\langle n|R(t)a^+a|m\rangle-\langle n|aR(t)a^+|m\rangle\\&\quad-\langle n|a^+aR(t)|m\rangle\}\end{aligned}$$

$$-\gamma_h\bar{n}_0\{\langle n|aR(t)a^+|m\rangle-\langle n|aa^+R(t)|m\rangle+\langle n|a^+R(t)a|m\rangle$$

$$-\langle n|R(t)a^+a|m\rangle\}$$

$$=\frac{\gamma_h}{2}\{2\sqrt{(n+1)(m+1)}\langle n+1|R(t)|m+1\rangle-2m\langle n|R(t)|m\rangle\}$$

$$+\gamma_h\bar{n}_0\{\sqrt{(n+1)(m+1)}\langle n+1|R(t)|m+1\rangle-(n+1)\langle n|R(t)|$$

$$m\rangle-m\langle n|R(t)|m\rangle+\sqrt{nm}\langle n-1|R(t)|m-1\rangle\} \qquad (1.5.90)$$

对角矩阵元 $P_n=\langle n|R(t)|n\rangle$ 表征系统处于 $|n\rangle$ 态的布居数，它也对应系统处于 $|n\rangle$ 态的概率. 由(1.5.90)式知，对角元 P_n 满足的方程为

$$\frac{d}{dt}P_n(t)=\gamma_h[(n+1)P_{n+1}-nP_n]+\gamma_h\bar{n}_0[(n+1)P_{n+1}$$

$$-(n+1)P_n-nP_n+nP_{n-1}]$$

$$=\gamma_h(\bar{n}_0+1)(n+1)P_{n+1}-\gamma_h[\bar{n}_0(n+1)$$

$$+n(\bar{n}_0+1)]P_n+n\bar{n}_0\gamma_hP_{n-1} \qquad (1.5.91)$$

它也是阻尼谐振子的粒子布居数满足的一步过程方程. 方程的解依据具体的物理条件而定. 如果我们讨论热平衡时的情况. 由于热平衡时，粒子布居数不随时间而变化，因而(1.5.91)式的左边为零. 即

$$\frac{dP_n}{dt}=0 \qquad (1.5.92)$$

根据这个条件可以确定 P_n 的具体表示. 因为当(1.5.92)式成立时，对于 $n=0$，方程(1.5.91)式给出

$$0=-\gamma_h\bar{n}_0P_0+\gamma_h(\bar{n}_0+1)P_1$$

所以有

$$P_1=\frac{\bar{n}_0}{\bar{n}_0+1}P_0 \qquad (1.5.93)$$

对于 $n=1$，方程(1.5.91)和(1.5.92)式给出

$$-\gamma_h(\bar{n}_0+1+2\bar{n}_0)P_1+\gamma_h(\bar{n}_0+1)2P_2+\gamma_h\bar{n}_0P_0=0$$

故得

$$P_2=\frac{\bar{n}_0^2}{(\bar{n}_0+1)^2}P_0 \tag{1.5.94}$$

逐次运算可得

$$P_n=\frac{\bar{n}_0^n}{(\bar{n}_0+1)^n}P_0 \tag{1.5.95}$$

由归一化条件 $\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$，可得

$$P_0=\frac{1}{\bar{n}_0+1} \tag{1.5.96}$$

因此，量子谐振子的粒子布居数概率分布为

$$P_n=\frac{\bar{n}_0^n}{(\bar{n}_0+1)^{n+1}} \tag{1.5.97}$$

这样在热平衡条件下，与辐射场耦合的量子谐振子的约化密度算符为

$$R=\sum_n P_n|n\rangle\langle n|=\sum_n \frac{\bar{n}_0^n}{(\bar{n}_0+1)^{n+1}}|n\rangle\langle n| \tag{1.5.98}$$

显然，上式与描述单模热光场的密度算符(1.3.191)式完全相同.

下面，把密度算符 $R(t)$(1.5.98)式变换到相干态矢集$\{|\alpha\rangle\}$的对角化表象. 在相干态的对角化表象中，密度算符可表示为

$$R=\int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha \tag{1.5.99}$$

注意到相干态$|\beta\rangle$的表示式：

$$|\beta\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right)\sum_m \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle \tag{1.5.100}$$

那么，由(1.5.99)式描述的密度算符 $R(t)$ 在相干态 $|\beta\rangle$ 的期望值为

$$\langle\beta|R|\beta\rangle=\sum_{n}\frac{\bar{n}_0^n}{(\bar{n}_0+1)^{n+1}}\sum_{m,k}\frac{\beta^{*m}\beta^k}{\sqrt{m!k!}}\langle m|n\rangle\langle n|k\rangle\exp(-|\beta|^2)$$

$$=\sum_{n}\frac{\bar{n}_0^n}{(\bar{n}_0+1)^{n+1}}\exp(-|\beta|^2)\frac{|\beta|^{2n}}{n!}$$

$$=\frac{1}{\bar{n}_0+1}\sum_{n}\left(\frac{\bar{n}_0|\beta|^2}{\bar{n}_0+1}\right)^n\frac{1}{n!}\exp(-|\beta|^2)$$

$$=\frac{1}{\bar{n}_0+1}\exp\left(-\frac{|\beta|^2}{\bar{n}_0+1}\right) \tag{1.5.101}$$

而由(1.5.99)式可得密度算符 R 在相干态矢集$\{|\beta\rangle\}$中的密度矩阵元为

$$\langle\beta|R|\beta\rangle=\int P(\alpha)\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle d^2\alpha$$

$$=\int d^2\alpha\exp(-|\beta-\alpha|^2)P(\alpha) \tag{1.5.102}$$

这里利用了(1.3.83)式. 比较(1.5.102)和(1.5.101)式，即得 $P(\alpha)$满足

$$\frac{1}{\bar{n}_0+1}\exp\left(-\frac{|\beta|^2}{\bar{n}_0+1}\right)=\int d^2\alpha\exp(-|\beta-\alpha|^2)P(\alpha) \tag{1.5.103}$$

如果令 $\alpha=x+iy$，则 $P(\alpha)$的傅里叶变换定义为

$$C(k_x,k_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}P(\alpha)\exp[-i(k_xx+k_yy)]dxdy \tag{1.5.104}$$

其相应的傅里叶逆变换为

$$P(\alpha)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}C(k_x,k_y)\exp[i(k_xx+k_yy)]dk_xdk_y \tag{1.5.105}$$

那么(1.5.103)式右端的积分就可以看作为高斯函数 $\exp(-|\alpha|^2)$

和 $P(\alpha)$的卷积. 注意到函数 $\exp(-\lambda|\alpha|^2)=\exp[-\lambda(x^2+y^2)]$的傅里叶变换为

$$C_1(k_x,k_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\exp[-\lambda|\alpha|^2)\exp[-i(k_x x+k_y y)]dxdy$$

$$=\frac{\pi}{\lambda}\exp\left[-\frac{1}{4\lambda}(k_x^2+k_y^2)\right] \tag{1.5.106}$$

因此对(1.5.103)式作傅里叶变换得到

$$C(k_x,k_y)=\pi\exp\left[-\frac{1}{4}\bar{n}_0(k_x^2+k_y^2)\right] \tag{1.5.107}$$

再按(1.5.105)式对上式作傅里叶逆变换,即得

$$P(\alpha)=\frac{1}{\pi\bar{n}_0}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}_0}\right) \tag{1.5.108}$$

故在相干态矢集$\{|\alpha\rangle\}$的对角化表象中,热平衡时的量子谐振子的约化密度算符 R 为

$$R(\alpha)=\frac{1}{\pi\bar{n}_0}\int d^2\alpha\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}_0}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{1.5.109}$$

上式表明,粒子布居数概率分布 $P(\alpha)$[(1.5.108)式]与 P_n[(1.5.97)式]一样,服从高斯分布规律. 可见,密度算符(1.5.98)和(1.5.109)式描述的是具有高斯统计特性的量子谐振子的热随机运动. 在这种情况下,量子谐振子布居数的概率分布(1.5.97)和(1.5.109)式可看作为大量的具有无规相位的单模电磁场叠加的统计分布,因而具有高斯分布特性.

如果量子谐振子不是处于无规相位分布的随机运动,而是处于一确定的相干态$|\alpha\rangle$,那么在这种情况下,我们将发现谐振子布居数分布具有完全不同的统计特性. 设系统处于相干态$|\alpha_0\rangle$,故描述系统的密度算符为

$$R(\alpha)=|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0| \tag{1.5.110}$$

利用(1.5.99)式把它在相干态矢集的对角化表象中展开,则有

$$|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0| = \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha \qquad (1.5.111)$$

为使上式两边相等，显然 $P(\alpha)$ 须满足

$$P(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0) \qquad (1.5.112)$$

上式表明，在相干态表象中，$P(\alpha)$ 为一 δ 函数. 而在粒子数表象中，(1.5.110)式表为

$$R(\alpha_0) = \sum_n \frac{|\alpha_0|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha_0|^2)|n\rangle\langle n| \qquad (1.5.113)$$

所以粒子布居数的概率分布为

$$P_n = \frac{|\alpha_0|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha_0|^2) \qquad (1.5.114)$$

可见此时粒子布居数的概率分布(1.5.114)与(1.5.97)式完全不同，它不具有高斯分布特性，而具有泊松分布特征，它描述的是处于完全相干态的量子系统的统计行为，而高斯分布(1.5.97)和(1.5.108)式则是描述处于完全混沌态的量子系统的统计行为.

二、描述与库场作用的二能级原子的主方程

量子光学中经常遇到的另一种量子小系统与库耦合的体系就是单个二能级原子与库场作用的系统，现在我们来推导与库耦合的单个二能级原子的主方程.

在旋波近似下，二能级原子在库场作用下的哈密顿量由(1.4.32)式可写为

$$H = H_R + H_A + V_{A\text{-}R} \qquad (1.5.115)$$

式中

$$H_R = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k \qquad (1.5.116a)$$

$$H_A = \omega_0 S_z \qquad (1.5.116b)$$

$$H_{A\text{-}R}=\sum_k g_k(a_k S_+ + a_k^\dagger S_-) \qquad (1.5.116c)$$

在相互作用绘景中，原子-库场的相互作用哈密顿量变为

$$V^{I}_{A\text{-}R}=\sum_k g_k\{a_k S_+\exp[i(\omega_0-\omega_k)t]+a_k^\dagger S_-\exp[-i(\omega_0-\omega_k)t]\}$$

$$(1.5.117)$$

将(1.5.117)式代入(1.5.78)式，重复与(1.5.82)—(1.5.89)式相似的推导，可得相互作用绘景中库场阻尼下的二能级原子所满足的主方程为

$$\frac{d}{dt}R=(\Gamma/2)[2\bar{n}_0 S_+ R S_- +2(\bar{n}_0+1)S_- R S_+ -\bar{n}_0 R S_- S_+$$
$$-(\bar{n}_0+1)R S_+ S_- -\bar{n}_0 S_- S_+ R-(\bar{n}_0+1)S_+ S_- R]$$

$$(1.5.118)$$

式中已令

$$\Gamma=2\pi\sum_k g_k^2\delta(\omega_k-\omega_0) \qquad (1.5.119)$$

显然它即是真空场作用下二能级原子的自发发射速率.从(1.5.118)式出发即可讨论库场对二能级原子行为的影响.下面我们来讨论库场作用下,二能级原子的粒子布居差随时间的演化.

注意到在相互作用绘景中,原子的粒子布居差算符 S_z 遵循

$$S_z^I=S_z^S=S_z \qquad (1.5.120)$$

利用(1.5.118)式及(1.4.17)式容易得到

$$\frac{d}{dt}\langle S_z\rangle=-\Gamma[(2\bar{n}_0+1)\langle S_z\rangle+1/2] \qquad (1.5.121)$$

如果在与库场耦合之前,原子处在激发态 $|+\rangle$,即 $\langle S_z\rangle=1/2$,则满足上式的解为

$$\langle S_z(t)\rangle=\{(\bar{n}_0+1)\exp[-(2\bar{n}_0+1)\Gamma t]-1/2\}/(2\bar{n}_0+1)$$

$$(1.5.122)$$

显然，当 $\bar{n}_0=0$，上式即是(1.4.48)式. 这就是说，初始时处在激发态的二能级原子在真空起伏的影响下将以速率 Γ 衰变到基态. 但当库场的平均光子数 $\bar{n}_0\neq0$时，从上式看到，二能级原子以速率 $(2\bar{n}_0+1)\Gamma$ 衰变. 在 $t\to\infty$时，即稳态时，(1.5.122)式变为

$$\langle S_z(\infty)\rangle=-1/2(2\bar{n}_0+1) \qquad (1.5.123)$$

这就是说，随着库场平均光子数的增大，原子的衰变速率变快，但原子并不会完全衰变到基态.

第三节　量子谐振子的特征函数与准概率分布函数

从前面的讨论可以看到，对于经典布朗运动，一旦求解出布朗粒子的速度概率分布函数 $P(V,t)$，就可以依据其特征函数 $C(\xi,t)$[(1.5.56)式]，并利用(1.5.57)式方便地求出布朗粒子的任意阶矩. 那么对于与库耦合的量子谐振子系统，是否也可以定义一个特征函数呢？虽然描述量子谐振子的密度算符 R 和经典概率分布函数有着相似的性质，但是从(1.5.89)式可以看出，密度算符 R 是算符 a 和 $a^{\dagger}$ 的函数，并且描述量子谐振子的某些物理量具有 a 的 m 次幂和 $a^{\dagger}$ 的 n 次幂的乘积有 $(n+m)!/(n!m!)$ 种排列顺序[如 $a^m(a^{\dagger})^n$，$(a^{\dagger})^n a^m$，$a^{\dagger}a^m(a^{\dagger})^{n-1}$，$(a^{\dagger})^l a^k$，$(a^{\dagger})^{n-l}a^{m-k}$等]. 由于 a 和 $a^{\dagger}$ 不对易，这使得在定义量子谐振子的特征函数时需考虑算符 a，$a^{\dagger}$ 的不同顺序.

通常情况下，在由算符 a 和 $a^{\dagger}$ 描述的量子谐振子系统中，对于由 a 的 m 次幂和 $a^{\dagger}$ 的 n 次幂的乘积所表征的物理量，我们最感兴趣的是如下的三种排列顺序：

(1) 正规排列顺序：对于由 a 的 m 次幂和 $a^{\dagger}$ 的 n 次幂的乘积构成的算符，如果所有的湮没算符 a 均在产生算符 $a^{\dagger}$ 的右边，即形如 $(a^{\dagger})^n a^m$，那么我们就称算符处于正规排列顺序.

(2) 反正规排列顺序：相反地，如果所有的湮没算符 a 均在产

生算符 $a^\dagger$ 的左边，即形如 $a^m(a^\dagger)^n$，就称 a 的 m 次幂和 $a^\dagger$ 的 n 次幂的乘积算符处于反正规排列顺序.

(3) 对称排列顺序：a 的 m 次幂和 $a^\dagger$ 的 n 次幂的乘积算符的对称排列就是对其 $(n+m)!/(n!m!)$ 种不同顺序的乘积求平均. 通常用 $\{(a^\dagger)^n a^m\}$ 来标记处于对称排列顺序的乘积算符，例如：

$$\{a^\dagger a\}=\frac{1}{2}(aa^\dagger+a^\dagger a)$$

$$\{a^\dagger a^2\}=\frac{1}{3}(a^\dagger a^2+aa^\dagger a+a^2a^\dagger)$$

$$\{(a^\dagger)^2a^2\}=\frac{1}{6}[(a^\dagger)^2a^2+a^\dagger aa^\dagger a+a^\dagger a^2a^\dagger$$
$$+a(a^\dagger)^2a+aa^\dagger aa^\dagger+a^2(a^\dagger)^2]$$

下面，分别对处于这三种排列顺序的算符、它们的矩的生成函数以及密度算符的相应表示作一简单介绍. 我们将看到，在相干态的对角化表象中计算这三种排列顺序任意算符的矩时，三种排列顺序的算符均唯一地与 C 数函数相对应.

一、正规排列顺序

首先假设任一给定的算符 $A(a,a^\dagger)$ 可以按正规排列顺序展开成

$$A=\sum_{n,m=0}^{\infty}C_{nm}(a^\dagger)^n a^m \tag{1.5.124}$$

考虑到相干态矢集 $\{|\alpha\rangle\}$ 具有超完备性，更进一步与(1.5.99)式相似，假设密度算符 ρ 可以用相干态矢集 $\{|\alpha\rangle\}$ 的对角元表示为

$$\rho=\int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{1.5.125}$$

这里 $P(\alpha)$ 是 C 数函数，通常称它是密度算符的 P 表示. 由于

$$\langle\alpha|(a^\dagger)^n a^m|\alpha\rangle=(\alpha^*)^n\alpha^m \tag{1.5.126}$$

所以处于正规排列顺序的算符 A[(1.5.124)式]在 P 表示中的期望值为

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\rho A=\int d^2\alpha P(\alpha)\langle\alpha|A|\alpha\rangle$$
$$=\int d^2\alpha P(\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}C_{nm}(\alpha^*)^n\alpha^m$$
$$=\int d^2\alpha P(\alpha)A_N(\alpha,\alpha^*) \quad (1.5.127)$$

其中

$$A_N(\alpha,\alpha^*)=\langle\alpha|A|\alpha\rangle=\sum_{n,m=0}^{\infty}C_{nm}(\alpha^*)^n\alpha^m \quad (1.5.128)$$

这样,在密度算符的 P 表示中计算正规排列顺序的算符 $A(a,a^\dagger)$ 的期望值时,就可以用一个 C 数函数 $A(\alpha,\alpha^*)$ 来替代算符 $A(a,a^\dagger)$.

注意到

$$(a^\dagger)^n a^m=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial(i\eta\zeta^*)^n\partial(i\eta\zeta)^m}\exp(i\eta\zeta^* a^\dagger)\exp(i\eta\zeta a)|_{\eta=0}$$

$$(1.5.129)$$

因此,如果求出处于正规排列顺序的算符 $\exp(i\eta\zeta^* a^\dagger)\exp(i\eta\zeta a)$ 的期望值,就可得出任意的 $(a^\dagger)^n a^m$ 的期望值.利用(1.5.127)式可得与(1.5.56)式相似的特征函数

$$\chi_N(\zeta)=\mathrm{Tr}[\rho\exp(i\eta\zeta^* a^\dagger)\exp(i\eta\zeta a)]$$
$$=\int d^2\alpha P(\alpha)\exp[i\eta(\zeta^*\alpha^*+\zeta\alpha)] \quad (1.5.130)$$

利用上式就可方便地求出处于正规排列顺序的谐振子算符的矩:

$$\langle(a^\dagger)^n a^m\rangle=\mathrm{Tr}\rho(a^\dagger)^n a^m=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial(i\eta\zeta^*)^n\partial(i\eta\zeta)^m}\chi_N(\zeta)|_{\eta=0}$$

$$(1.5.131)$$

显然,(1.5.130)式与(1.5.56)式具有相同的性质.注意到 $P(\alpha)$ 是

$\chi_N(\zeta)$的二维傅里叶变换,所以可以表示为

$$P(\alpha)=\left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^2\iint d^2\zeta\chi_N(\zeta)\exp[-i\eta(\zeta^*\alpha^*-\zeta\alpha)]$$

(1.5.132)

将上式代入(1.5.125)式,就给出了 P 表示中密度算符的表达式.

现在我们再来讨论一下特征函数 $\chi_N(\zeta)$的性质. 由(1.3.78)式知

$$\exp(i\eta\zeta^*a^+)\exp(i\eta\zeta a)=\exp[i\eta(\zeta^*a^++\zeta a)]\exp(\eta^2|\zeta|^2/2)$$

(1.5.133)

并且 $\exp[i\eta(\zeta^*a^++\zeta a)]$是幺正算符. 所以

$$|\chi_N(\zeta)|=\exp(\eta^2|\zeta|^2/2)|\mathrm{Tr}\{\rho\exp[i\eta(\zeta^*a^++\zeta a)]\}|$$

$$\leqslant\exp(\eta^2|\zeta|^2/2)$$

对于 $\rho=|n\rangle\langle n|$,$|n\rangle$是粒子数态,如果$|\zeta|\gg1$,那么

$$|\chi_N(\zeta)|\sim|\zeta|^{2n}$$

这表明 $\chi_N(\zeta)$可能发散. 所以并不是所有的密度矩阵都可以用 P 表示来描述,在这种情况下,$P(\alpha)$可能是比 δ 函数更加奇异的函数,因此通常将 $P(\alpha)$称为准概率分布函数. 但是尽管如此,P 表示仍能用来处理许多问题. 下面,我们利用密度算符的 P 表示来讨论量子阻尼谐振子的性质.

事实上,当方程(1.5.89)式两边的密度算符 $R(t)$用(1.5.125)式所示的ρ取代时,我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int P(\alpha,\alpha^*,t)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha=\frac{\gamma_h}{2}\int[2a|\alpha\rangle\langle\alpha|a^+-|\alpha\rangle\langle\alpha|a^+a$$
$$-a^+a|\alpha\rangle\langle\alpha|]P(\alpha,\alpha^*,t)d^2\alpha+\gamma_h\bar{n}_0[a^+|\alpha\rangle\langle\alpha|a+a|\alpha\rangle\langle\alpha|a^+$$
$$-a^+a|\alpha\rangle\langle\alpha|-|\alpha\rangle\langle\alpha|aa^+]P(\alpha,\alpha^*,t)d^2\alpha \qquad (1.5.134)$$

注意到

$$a^{\dagger}|\alpha\rangle\langle\alpha| = a^{\dagger}\exp(-\alpha^{*}\alpha)\exp(\alpha a^{\dagger})|0\rangle\langle 0|\exp(\alpha^{*}a)$$

而

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\exp(\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*}\alpha)=(a^{\dagger}-\alpha^{*})\exp[\alpha(a^{\dagger}-\alpha^{*})]$$

所以

$$\begin{aligned}a^{\dagger}|\alpha\rangle\langle\alpha| &= \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\alpha^{*}\right)\exp[\alpha(a^{\dagger}-\alpha^{*})]|0\rangle\langle 0|\exp(\alpha^{*}a)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\alpha^{*}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (1.5.135)\end{aligned}$$

同理有

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|a = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}+\alpha\right)|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (1.5.136)$$

应用(1.5.135)和(1.5.136)式以及$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$和$\langle\alpha|a^{\dagger}=\langle\alpha|\alpha^{*}$，方程(1.5.134)式转化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int P(\alpha,\alpha^{*},t)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^{2}\alpha &= \frac{\gamma_{h}}{2}\int\Big[2|\alpha|^{2}-\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}+\alpha\right)\alpha^{*}\\ &-\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\alpha^{*}\right)\alpha\Big]|\alpha\rangle\langle\alpha|P(\alpha,\alpha^{*},t)d^{2}\alpha+\gamma_{h}\bar{n}_{0}\Big[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\alpha^{*}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}+\alpha\right)\\ &+|\alpha|^{2}-\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\alpha^{*}\right)\alpha-\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}+\alpha\right)\alpha^{*}\Big]|\alpha\rangle\langle\alpha|P(\alpha,\alpha^{*},t)d^{2}\alpha\end{aligned}$$

$$(1.5.137)$$

这样，由上式我们找到了量子谐振子的准概率分布函数$P(\alpha,\alpha^{*},t)$满足的福克尔-普朗克方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(\alpha,\alpha^{*},t) &= -\frac{\gamma_{h}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}\alpha^{*}\right)P(\alpha,\alpha^{*},t)\\ &+\gamma_{h}\bar{n}_{0}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}P(\alpha,\alpha^{*},t) \qquad (1.5.138)\end{aligned}$$

方程的解依据不同的初始条件而定. 如果令量子谐振子在$t=0$时

刻处于相干态$|\alpha'\rangle$，那么其准概率分布条件为

$$P(\alpha,\alpha^*,t=0)=\delta(\alpha-\alpha')\delta(\alpha^*-\alpha'^*) \qquad (1.5.139)$$

与方程(1.5.20)式的解(1.5.54)式相似，(1.5.138)式的解为

$$P(\alpha,\alpha^*,t)=\frac{1}{\bar{n}_0[1-\exp(-\gamma_h t)]}\exp\left\{\frac{-\left[\alpha-\alpha'\exp\left(-\frac{\gamma_h}{2}t\right)\right]^2}{\bar{n}_0[1-\exp(-\gamma_h t)]}\right\} \qquad (1.5.140)$$

上式表明，与辐射场(库)相互作用的量子谐振子，在初始阶段由于处于确定的相干态，其概率分布具有形如(1.5.114)式所示的泊松统计分布特性.由于库的作用，随着时间的增加，量子谐振子的运动特性将发生变化.当$t\to\infty$时，(1.5.140)式表明，$P(\alpha,\alpha^*,t)$将趋于(1.5.108)式，具有高斯分布特性.这就是说，随着时间的演化，量子谐振子的运动已由相干态转化为混沌状态.

将(1.5.140)式代入(1.5.130)式，即得t时刻量子谐振子特征函数$\chi_N(\xi,t)$，利用(1.5.131)式就可求出处于正规排列的量子谐振子的任意矩$\langle(a^\dagger)^n a^m\rangle$.因此，对于一与库耦合的量子谐振子系统的行为，可首先推导出量子谐振子约化密度算符所满足的主方程，然后利用密度算符的P表示形式，导出与量子主方程等价的经典福克尔-普朗克方程，求解出准概率分布函数$P(\alpha,\alpha^*,t)$，就可以得到正规排列顺序的特征函数$\chi_N(\xi,t)$，从而能够方便地求出处于正规排列顺序的量子谐振子的任意阶矩.

二、反正规排列顺序

下面，我们来讨论密度算符P表示的准概率分布函数$P(\alpha)$的另一种表述形式.如果将密度算符ρ按反正规排列顺序展开成

$$\rho=\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho_{nm}a^m(a^\dagger)^n \qquad (1.5.141)$$

那么处于反正规排列顺序的算符$A(a,a^\dagger)$的期望值可表示为

$$
\mathrm{Tr}(\rho A)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{r,s=0}\rho_{nm}C_{rs}\mathrm{Tr}[a^m(a^\dagger)^n(a^\dagger)^r a^s] \tag{1.5.142}
$$

由于

$$
\mathrm{Tr}[a^m(a^\dagger)^n(a^\dagger)^r a^s]=\mathrm{Tr}[(a^\dagger)^{n+r}a^{m+s}] \tag{1.5.143}
$$

并注意到恒等式

$$
\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha=I \tag{1.5.144}
$$

因而(1.5.142)式化为

$$
\mathrm{Tr}\rho A=\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{r,s=0}^{\infty}\rho_{nm}C_{rs}(\alpha^*)^n\alpha^m(\alpha^*)^r\alpha^s \tag{1.5.145}
$$

与(1.5.127)式相比，立即可得

$$
P(\alpha)=\frac{1}{\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho_{nm}(\alpha^*)^n\alpha^m \tag{1.5.146}
$$

因而，按反正规排列顺序展开的密度算符 ρ 可以表示为

$$
\rho=\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho_{nm}(\alpha^*)^n\alpha^m|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{1.5.147}
$$

如果将算符 $A(a,a^\dagger)$ 按反正规排列顺序展开为

$$
A(a,a^\dagger)=\sum_{n,m=0}^{\infty}d_{nm}a^m(a^\dagger)^n \tag{1.5.148}
$$

依据(1.5.147)式，算符 $A(a,a^\dagger)$ 可以表示为

$$
\begin{aligned}
A(a,a^\dagger)&=\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\sum_{n,m=0}^{\infty}d_{nm}(\alpha^*)^n\alpha^m|\alpha\rangle\langle\alpha| \\
&=\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha A_a(\alpha,\alpha^*)|\alpha\rangle\langle\alpha|
\end{aligned} \tag{1.5.149}
$$

式中

$$
A_a(\alpha,\alpha^*)=\sum_{n,m}^{\infty}d_{nm}(\alpha^*)^n\alpha^m \tag{1.5.150}
$$

显然，与正规排列顺序相似，处于反正规排列顺序的算符 $A(a,$

$a^\dagger$)与 C 数函数 $A_a(\alpha,\alpha^*)$相对应.这时,$A(a,a^\dagger)$的期望值为

$$\mathrm{Tr}\rho A=\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha A_a(\alpha,\alpha^*)\mathrm{Tr}(\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|)$$
$$=\int d^2\alpha A_a(\alpha,\alpha^*)Q(\alpha) \qquad (1.5.151)$$

这里

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \qquad (1.5.152)$$

在这种情况下,如果在(1.5.151)式中令 $A(a,a^\dagger)=\exp(i\eta\zeta a)\exp(i\eta\zeta^* a^\dagger)$,即得反正规排列顺序的特征函数为

$$\chi_A(\zeta)=\mathrm{Tr}[\rho e^{i\eta\zeta a}\exp(i\eta\zeta^* a^\dagger)]$$
$$=\int d^2\alpha Q(\alpha)\exp[i\eta(\zeta^*\alpha^*+\zeta\alpha)] \qquad (1.5.153)$$

这是因为处于反正规排列顺序的任意阶矩均可依据上式给出:

$$\langle a^m(a^\dagger)^n\rangle=\mathrm{Tr}[\rho a^m(a^\dagger)^n]$$
$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial(i\eta\zeta^*)^n\partial(i\eta\zeta)^m}\chi_A(\zeta)|_{\eta=0} \qquad (1.5.154)$$

对(1.5.153)式作傅里叶逆变换,立即可得反正规排列顺序的准概率分布函数:

$$Q(\alpha)=\frac{\eta^2}{4\pi}\iint d^2\zeta\chi_A(\zeta)\exp[-i\eta(\zeta^*\alpha^*+\zeta\alpha)]$$
$$=\frac{\eta^2}{4\pi}\iint d^2\zeta\iint d^2\beta\frac{1}{\pi}\langle\beta|\rho|\beta\rangle$$
$$\times\exp[-i\eta\zeta^*(\alpha^*-\beta^*)]\exp[-i\eta\zeta(\alpha-\beta)]$$
$$=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \qquad (1.5.155)$$

通常将 $Q(\alpha)$称为密度算符的 Q 表示.显然,由(1.5.102)式可知,在 Q 表示中,稳态的量子谐振子的准概率分布函数为

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|R|\alpha\rangle=\frac{1}{\pi(\bar{n}_0+1)}\exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}_0+1}\right\} \qquad (1.5.156)$$

下面我们来考察一下反正规排列顺序特征函数 $\chi_A(\zeta)$ 的性质. 由于

$$\exp(i\eta\zeta a)\exp(i\eta\zeta^* a^+)=\exp[i\eta(\zeta^* a^+ +\zeta a)]\exp(-\eta^2|\zeta|^2/2)$$

所以

$$|\chi_A(\zeta)|\leqslant\exp(-\eta^2|\zeta|^2/2) \tag{1.5.157}$$

可见, 在 ζ 复平面中, 随着 $|\zeta|^2\to\infty$, $\chi_A(\zeta)$ 是平方可积函数, 它不出现发散情况, 它的二维傅里叶变换总是存在的, 因此谐振子的 Q 表示是良函数. 所以对于 P 表示不存在的谐振子系统, 可以采用 Q 表示来描述.

三、对称排列顺序

在讨论对称排列顺序的特征函数和准概率分布函数之前, 需要考察一下对称排列本身的性质. 注意到算符 $(\zeta_1 a+\zeta_2 a^+)^n$ 按对称排列顺序可表示为

$$(\zeta_1 a+\zeta_2 a^+)^n=\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}\zeta_1^{n-l}\zeta_2^{l}\{(a^+)^{n-l}a^l\} \tag{1.5.158}$$

式中的括号{ }表示产生算符 a^+ 的 $n-l$ 次幂与湮没算符 a 的 l 次幂的乘积处于对称排列顺序. 从而

$$\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^* a^+)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\eta\zeta a+i\eta\zeta^* a^+)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!(n-l)!}(i\eta\zeta^*)^{n-l}(i\eta\zeta)^l\{(a^+)^{n-l}a^l\}$$

令 $m=n-l$, 则上式化为

$$\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^* a^+)]=\sum_{l,m=0}^{\infty}\frac{1}{m!l!}(i\eta\zeta^*)^m(i\eta\zeta)^l\{(a^+)^m a^l\} \tag{1.5.159}$$

于是，一般说来，算符 $A(a,a^{+})$ 可展开成如下的对称排列形式：

$$A=\sum_{n,m}b_{nm}\{(a^{+})^{n}a^{m}\} \tag{1.5.160}$$

其期望值为

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\rho A=\sum_{n,m}b_{nm}\mathrm{Tr}\rho\{(a^{+})^{n}a^{m}\}=\sum_{n,m}b_{nm}\langle\{(a^{+})^{n}a^{m}\}\rangle \tag{1.5.161}$$

因此，一旦求出对称排列顺序的矩 $\langle\{(a^{+})^{n}a^{m}\}\rangle$，即可确定按对称排列顺序展开的任意算符 $A(a,a^{+})$ 的期望值.

由(1.5.159)式可知

$$\langle\{(a^{+})^{n}a^{m}\}\rangle=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial(i\eta\zeta^{*})^{n}\partial(i\eta\zeta)^{m}}\langle\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^{*}a^{+})]\rangle|_{\eta=0} \tag{1.5.162}$$

因此只需求出 $\langle\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^{*}a^{+})]\rangle$ 的期望值，就可得到任意阶矩 $\langle\{(a^{+})^{n}a^{m}\}\rangle$. 注意到在 P 表示中，$\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^{*}a^{+})]$ 的期望值为

$$\begin{aligned}\chi_{W}(\zeta)&=\mathrm{Tr}\{\rho\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^{*}a^{+})]\}\\&=\iint d^{2}\beta P(\beta)\langle\beta|\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^{*}a^{+})]|\beta\rangle\\&=\iint d^{2}\beta P(\beta)\exp(-\eta^{2}|\zeta|^{2})\langle\beta|\exp(i\eta\zeta^{*}a^{+})\exp(i\eta\zeta a)|\beta\rangle\\&=\iint d^{2}\beta P(\beta)\exp(-\eta^{2}|\zeta|^{2})\exp[i\eta(\zeta^{*}\beta^{*}+\zeta\beta)]\end{aligned} \tag{1.5.163}$$

显然，利用上式就可方便地求出对称排列的任意阶矩 $\langle\{(a^{+})^{n}a^{m}\}\rangle$，因此 $\chi_{W}(\zeta)$ 称为对称排列特征函数或 Wigner 特征函数.

像在正规排列顺序和反正规排列顺序的情况那样，我们也可以得到 $\chi_{W}(\zeta)$ 的傅里叶变换，即

$$W(\alpha)=\eta^2\frac{1}{\pi}\iint d^2\zeta\chi_W(\zeta)\exp[-i\eta(\zeta^*\alpha^*+\zeta\alpha)]$$

(1.5.164)

这就是相干态表象中对称排列顺序的 Wigner 分布函数. 将(1.5.163)式代入上式,则有

$$W(\alpha)=\eta^2\frac{1}{\pi}\iint d^2\beta P(\beta)\iint d^2\zeta\exp(-\eta^2|\zeta|^2)$$
$$\times\exp[i\eta\zeta^*(\beta^*-\alpha^*)]\exp[i\eta\zeta(\beta-\alpha)]$$

对 ζ 复平面积分,上式化为

$$W(\alpha)=2\iint d^2\beta P(\beta)\exp(-2|\beta-\alpha|^2) \qquad (1.5.165)$$

因此一旦知道谐振子的 P 表示的准概率分布函数 $P(\alpha)$,就可依据上式得到对称排列的 Wigner 分布函数. 例如,对于处于稳态的量子阻尼谐振子系统,将 P 表示中的准概率分布函数 $P(\alpha)$[(1.5.108)式]代入上式,即得其 Wigner 分布函数:

$$W(\alpha)=2\iint d^2\beta\frac{1}{\pi\bar{n}_c}\exp(-2|\beta-\alpha|^2)\exp\left[-\frac{|\beta|^2}{\bar{n}_c}\right]$$
$$=\frac{1}{\pi(\bar{n}_c+1/2)}\exp\left[\frac{-|\alpha|^2}{\bar{n}_c+1/2}\right] \qquad (1.5.166)$$

由于 $\exp[i\eta(\zeta a+\zeta^* a^+)]$ 是幺正算符,所以由(1.5.163)式可知

$$|\chi_W(\zeta)|\leqslant 1 \qquad (1.5.167)$$

可见,与 $\chi_A(\zeta)$ 一样,在 ζ 复平面上随着 $|\zeta|^2\to\infty$,$\chi_W(\zeta)$ 也是平方可积函数,它的二维傅里叶变换总是存在的,从而 Wigner 分布函数 $W(\alpha)$ 与 $Q(\alpha)$ 一样,也是良函数,因而也可以采用 Wigner 分布函数来描述 P 表示不存在的谐振子系统.

下面,我们在谐振子的坐标表象中来讨论 Wigner 分布函数的形式,这种形式对直接求动量 p 和坐标 q 的各阶矩特别合适. 由(1.3.87)式知,谐振子的坐标算符 q 和动量算符 p 与 a、a^+ 满足

$$q=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a^{\dagger}+a), \qquad a=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q+ip)$$

$$p=i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^{\dagger}-a), \qquad a^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q-ip)$$

$$(1.5.168)$$

如果定义两个实参数 λ 和 μ 满足

$$\lambda=\eta(\zeta+\zeta^{*})\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}, \qquad \mu=i\eta(\zeta-\zeta^{*})\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \tag{1.5.169}$$

那么将(1.5.168)和(1.5.169)式一并代入(1.5.163)式，则 $\chi_W(\zeta)$ 变成

$$\chi_W(\lambda,\mu)=\mathrm{Tr}[\rho(p,q)e^{i(\lambda q+\mu p)}] \tag{1.5.170}$$

因为动量 p 和坐标 q 满足熟知的关系：

$$[q,p]=i\hbar$$

所以

$$\begin{aligned}
e^{i(\lambda q+\mu p)}&=e^{i\lambda q}e^{i\mu p}\exp(i\hbar\lambda\mu/2)\\
&=e^{i\mu p/2}e^{-i\mu p/2}e^{i\lambda q}e^{i\mu p/2}e^{-i\mu p/2}e^{i\mu p}\exp(i\hbar\lambda\mu/2)\\
&=e^{i\mu p/2}\exp[i\lambda e^{-i\mu p/2}qe^{i\mu p/2}]e^{i\mu p/2}\exp(i\hbar\lambda\mu/2)
\end{aligned} \tag{1.5.171}$$

这里已利用了算符恒等式：

$$e^{\xi A}F(B)e^{-\xi A}=F(e^{\xi A}Be^{-\xi A}) \tag{1.5.172}$$

又因为

$$[q,F(P)]=i\hbar\frac{\partial F(p)}{\partial p} \tag{1.5.173}$$

所以

$$[q, e^{i\mu p/2}] = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}e^{i\mu p/2} = -\frac{\hbar\mu}{2}e^{i\mu p/2}$$

即

$$qe^{i\mu p/2} - e^{i\mu p/2}q = -\frac{\hbar\mu}{2}e^{i\mu p/2} \tag{1.5.174}$$

将上式两边左乘算符 $e^{-i\mu p/2}$，则

$$e^{-i\mu p/2}qe^{i\mu p/2} = q - \frac{\hbar\mu}{2} \tag{1.5.175}$$

将上式代入(1.5.171)式，则有

$$\begin{aligned} e^{i(\lambda q+\mu p)} &= e^{i\mu p/2}\exp[i\lambda(q-\hbar\mu/2)]e^{i\mu p/2}e^{i\lambda\mu\hbar/2} \\ &= e^{i\mu p/2}e^{i\lambda q}e^{i\mu p/2} \end{aligned} \tag{1.5.176}$$

从而，(1.5.170)式化为

$$\chi_W(\lambda,\mu) = \mathrm{Tr}[\rho(p,q)e^{i\mu p/2}e^{i\lambda p}e^{i\mu p/2}] \tag{1.5.177}$$

现在再来求上式在坐标表象中的迹. 在 q 表象中

$$q|q'\rangle = q'|q'\rangle, \qquad \langle q'|q''\rangle = \delta(q'-q'') \tag{1.5.178}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq'|q'\rangle\langle q'| = 1 \tag{1.5.179}$$

并且容易证明：

$$e^{i\mu p/2}|q'\rangle = |q'-\hbar\mu/2\rangle, \quad \langle q'|e^{i\mu p/2} = \langle q'+\hbar\mu/2| \tag{1.5.180}$$

因而可以把(1.5.177)式改写为

$$\begin{aligned} \chi_W(\lambda,\mu) &= \mathrm{Tr}[e^{i\mu p/2}\rho(p,q)e^{i\mu p/2}e^{i\lambda q}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq''\langle q''|e^{i\mu p/2}\rho(p,q)e^{i\mu p/2}e^{i\lambda q}|q''\rangle \end{aligned}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} dq'' e^{i\lambda q''}\langle q''+\hbar\mu/2|\rho(p,q)|q''-\hbar\mu/2\rangle$$

(1.5.181)

这就是坐标表象中谐振子的 Wigner 特征函数.

下面我们来求与特征函数 $\chi_W(\lambda,\mu)$ 相应的 Wigner 分布函数 $P(p',q')$. 由于

$$\iint d^2\alpha \frac{1}{\pi}W(\alpha)=\iint_{-\infty}^{\infty} dq'dp'P(p',q') \qquad (1.5.182)$$

而由(1.5.168)式可知参数

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q'+ip'), \quad \alpha^*=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q'-ip')$$

(1.5.183)

从而

$$P(p',q')=\frac{1}{2\pi\hbar}W(\alpha) \qquad (1.5.184)$$

将(1.5.183)式以及(1.5.169)式代入(1.5.164)式,则

$$\begin{aligned}
P(p',q')&=\frac{1}{4\pi^2}\iint d\lambda d\mu\chi_W(\lambda,\mu)e^{-i(\mu p'+\lambda q')}\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int dq''\iint d\lambda d\mu e^{i\lambda(q''-q')}e^{-i\mu p'}\\
&\quad\times\langle q''+\hbar\mu/2|\rho(p,q)|q''-\hbar\mu/2\rangle\\
&=\frac{1}{2\pi}\int dq''\int d\mu\delta(q'-q'')\\
&\quad\times\langle q''+\hbar\mu/2|\rho(p,q)|q''-\hbar\mu/2\rangle e^{-i\mu p'}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int d\mu\langle q'+\hbar\mu/2|\rho(p,q)|q'-\hbar\mu/2\rangle e^{-i\mu p'}
\end{aligned}$$

(1.5.185)

这就是坐标表象中的 Wigner 分布函数. 令

$$\hbar \mu = s \tag{1.5.186}$$

于是 $P(p',q')$ 简化为

$$P(p',q') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int ds \langle q'+s/2 | \rho(p,q) | q'-s/2 \rangle \exp(-p's/\hbar) \tag{1.5.187}$$

同样地，我们也可以将 $P(p',q')$ 在动量表象中表示出来. 利用完备性关系：

$$\int dp_1 |p_1\rangle\langle p_1| = 1 \tag{1.5.188}$$

则(1.5.187)式转化为

$$P(p',q') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int ds \int dp_1 \int dp_2 \langle q'+s/2 | p_1\rangle\langle p_1 | \rho(p,q) | p_2\rangle \times \langle p_2 | q'-s/2\rangle \exp(-ip's/\hbar) \tag{1.5.189}$$

注意到

$$\langle p_1 | q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(-ip_1q_1/\hbar) = \langle q_1 | p_1\rangle^* \tag{1.5.190}$$

因此上式化为

$$\begin{aligned}
P(p',q') &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int ds \int dp_1 \int dp_2 \langle p_1 | \rho(p,q) | p_2\rangle \\
&\quad \times \exp[-ip_1(q'+s/2)/\hbar] \times \exp[-ip_2(q'-s/2)/\hbar] \\
&\quad \times \exp(-ip's/\hbar) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int ds \int dp_1 \int dp_2 \langle p_1 | \rho(p,q) | p_2\rangle \\
&\quad \times \exp\left[-i\frac{s}{\hbar}\left(\frac{p_1+p_2}{2} - p'\right)\right] \exp[iq'(p_1-p_2)/\,] \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp_1 \int dp_2 \langle p_1 | \rho(p,q) | p_2\rangle \delta\left(\frac{p_1+p_2}{2} - p'\right.
\end{aligned}$$

$$\times\exp[iq'(p_1-p_2)/\hbar]$$

$$=\frac{1}{4\pi\hbar}\int dp_1\langle p_1|\rho(p,q)|2p'-p_1\rangle\exp[2iq'(p_1-p')/\hbar]$$

(1.5.191)

令：

$$p_1=p'+k/2 \tag{1.5.192}$$

则(1.5.191)式简化为

$$P(p',q')=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dk\langle p'+k/2|\rho(p,q)|p'-k/2\rangle\exp(ikq'/\hbar)$$

(1.5.193)

这就是动量表象中的 Wigner 分布函数.

参 考 文 献

[1] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, Wiley, 1973.

[2] H. Haken, Light, Vol. 1,2, North-Holland, 1981, 1985.

[3] N. G. Van Kampan, Stochastic Process in Physics and Chemistry, North-Holland, 1981.

[4] C. W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods, 2nd ed., Springer-Verlag, 1985.

[5] H. Risken, The Fokker-Planck Equation Methods of Solution and Application, 2nd ed., Springer-Verlag, 1989.

[6] G. S. Agarwal, Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and Their Relation to Other Approaches, Springer Tracts in Modern Physics, **Vol. 70**, Springer, 1974.

[7] C. Leonardi, F. Persico and G. Vetri, Dicke Model and Theory of Driven and Spontaneous Emission, La Rivista del Nuovo Cimento, 1986.

[8] 彭金生，共振荧光与超荧光，科学出版社，1993.

[9] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**, 709, 1930.

[10] R. J. Cook, *Phys. Rev.*, **A22**, 1078, 1980.

[11] P. D. Drummond, C. W. Gardiner, *J. Phys.* **A13**, 2553, 1980.

[12] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully and E. P. Wigner, *Phys. Rep.*, **106**, 122, 1984.
[13] K. Vogel and H. Risken, *Phys. Rev.*, **A39**, 4675, 1989.
[14] J. Bergou, L. Davidovich, M. Orszag, C. Benkert, M. Hillery and M. O. Scully, *Phys. Rev.*, **A40**, 5073, 1989.
[15] 李高翔、彭金生, *Phys. Lett.*, **A189**, 449(1994).
[16] 李高翔、彭金生, 物理学报, **44**, 708(1995).

第二篇
光场的量子特性

引　言

近代光学实验证实的光场的许多非经典效应和非经典特征表明，光场具有一些不同的量子特性，这些都只能在全量子理论范围以内加以精确解释. 在本篇中我们将集中讨论这方面的内容，重点论述光场与原子相互作用系统中，光场本身呈现的一些量子特性和量子效应，而对于原子系统的演化特性则留待下一篇中讨论.

第一章首先介绍光场的经典相干性概念，然后讨论相干性的量子理论，最后再介绍量子理论所揭示的一些非经典相干效应，如光子的反聚束效应等. 在第二章中，我们集中讨论光场的压缩态. 光场的压缩效应是近代量子光学中研究得较多的一种非经典效应，在这里我们首先较全面地介绍了光场的压缩态，然后着重讨论J-C模型中光场的一些压缩特性，以及光场振幅平方压缩和高阶压缩效应等内容. 共振荧光是当代量子光学研究的基本课题之一，它研究原子在共振激光场作用下所辐射的荧光的特征，它也是光场量子特性的一种重要表现. 在第三章中，我们在概述了共振荧光的一般特性以后，着重介绍修饰变换理论对二能级和三能级原子共振荧光的处理，最后介绍了应用密度矩阵理论处理的方法. 在第四章中，我们集中讨论当代量子光学研究的另一重要课题——超荧光. 超荧光是集合原子合作自发发射的量子特性的突出表现，这里对它作了专门的论述. 在介绍超荧光的准经典理论处理以后，着重论述超荧光的全量子理论，最后还简要介绍超荧光拍的量子理论. 第五章讨论光场的另一种非线性效应——光学双稳态，它也是近代量子光学研究较多的课题之一. 在概述了光场的双稳态特性及其产生机理之后，我们着重讨论了光学双稳态的量子理论. 本篇

的最后一章着眼于虚光场效应的论述.以往人们对光场量子特性的另一种体现——虚光场效应——讨论得比较少.但随着近代光学实验技术精度的提高,从理论上深入探讨虚光子过程对光场演化特性的影响显得十分重要.在这一章中,我们对虚光场效应作了专门的论述.首先讨论虚光场对中性原子基态能量的修正,然后论述在光与原子相互作用系统中,虚光子过程对光场的相位和频率以及光场压缩行为的影响.

第一章　光场的相干性

第一节　光场的经典相干性

我们知道，在两束光波的交叠处，如果出现光场强度重新分布的干涉条纹，我们就说这两束光是彼此相干的；反之，如果不出现干涉条纹，我们则说这两束光彼此不相干. 光的干涉实验表明，只有当两束光的频率相同，且相互间有稳定的相位差时，它们才能产生干涉. 对于同一束光，如果它的子波列之间彼此相干，我们则说这束光场为相干光场. 例如，由于激光的单色性好，所以它是较理想的相干光场，而由腔体辐射的热光场则由于它是由大量不同频率的光波组成，所以一般说来它不是相干光场. 在经典理论中，光场的相干性表现为光场的时间相干性和空间相干性，下面来分别讨论.

一、光场的时间相干性

迈克尔逊干涉仪是测量光场时间相干性的典型装置. 设来自一个点光源 σ（如图 2.1.1 所示）的一束光在迈克尔逊干涉仪中被分成两束，由于两束光的行程不同，它们之间经一小段光程差 $\Delta s=c\Delta t$（c 是光速）之后又重新会合. 实验表明，如果 Δs 很小，则在 D 平面上会形成干涉条纹. 如果 Δs 很大，则在两束光重合处不出现干涉条纹. 可以看出，这种干涉图样是由于在不同时刻从同一空间点（P 点）通过的两束光场的叠加而形成的，因此这种干涉是这两束光之间的时间相干性的表现. 一般说来，微观客体每次发光都有一定的延迟时间 τ_c，因此每次发射对应一定的光程 L_c：

$$L_c=c\tau_c \tag{2.1.1}$$

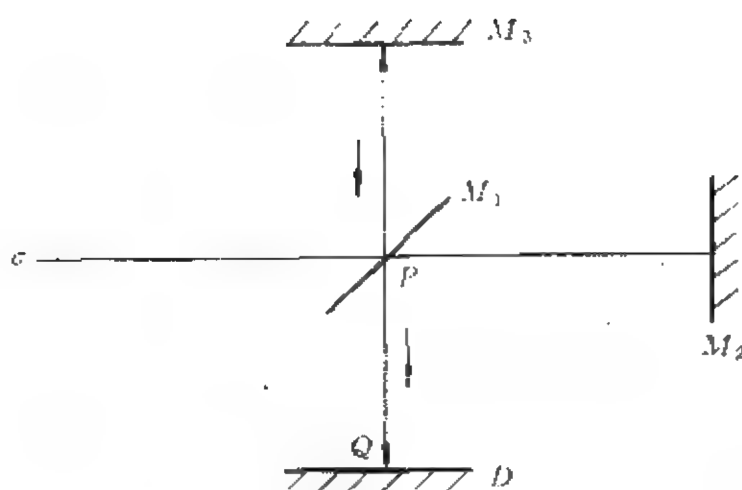


图 2.1.1 迈克尔逊干涉仪装置示意图

如果光程差 Δs 小于 L_c，则重新会合的两束光是属于微观客体发射的同一列光，因而它们有相同的频率和确定的相位差，从而出现干涉. 如果 Δs 大于 L_c，则重新会合的两束光是光源的不同次的发射光，因而相互不发生干涉. 故称 L_c 为相干长度，而相应传播延迟时间 τ_c 为光场的相干时间，它也满足

$$\tau_c = 1/\Delta\nu \tag{2.1.2}$$

式中 $\Delta\nu$ 是光场的频率宽度. 所以在同一空间点处不同光场叠加时，只有它们的时间间隔小于相干时间 τ_c 才会观察到干涉条纹.

二、光场的空间相干性

光场的空间相干性可由杨氏双缝实验展现出来，如图 2.1.2 所示. 其中光源具有边长为 Δa 的线度，它并不是严格的点光源. 这种光源由许多彼此不相干的点光源组成，它们经屏幕 S_1 上的两个彼此相距为 d 的针孔 P_1 和 P_2 形成两束光，这两束光再在屏幕 S_2 上的 P 处相叠. 实验结果表明，当两孔相距很近，即 d 较小时，在 P 点附近将形成干涉条纹. 由于光源中每一个点光源发射的光波经过点 P_1 和 P_2 后产生两列子波，在 P 处叠加产生干涉图样. 所以我们在 P 点附近观察到的干涉图样实际上是光源中许多不

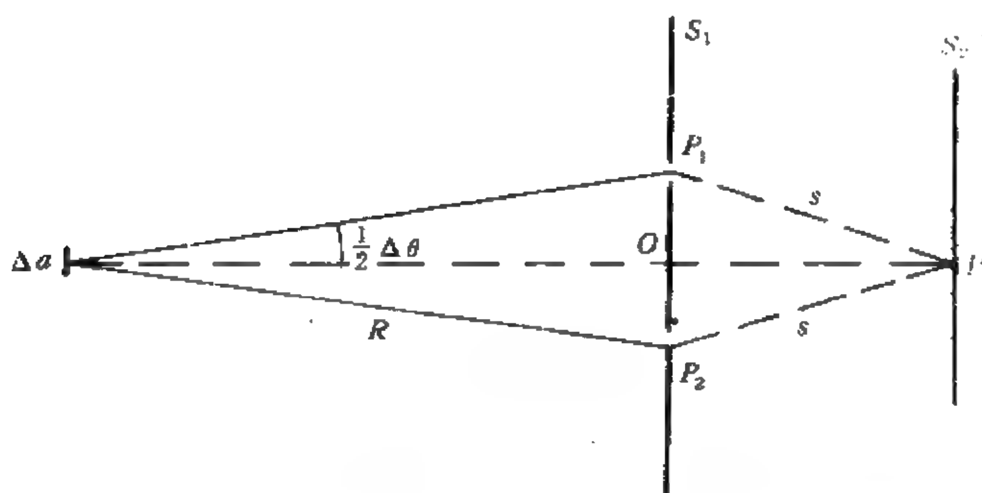


图 2.1.2 杨氏双缝干涉实验示意图

同点光源各套干涉条纹的非相干叠加. 对于给定的光源线度 Δa，如果两孔相距较大，即 d 较大时，在 P 点附近将不呈现干涉图样. 这也就是说，此时光源各点光源干涉图样在 P 点附近的非相干叠加不呈现明显的干涉图样. 可见，在 P 点附近呈现的相干性，反映了有实际线度 Δa 的光源发射的光，在它传播的多大空间范围提取的两个次波经 P_1 和 P_2 后还呈现出相干性，故这种相干性称为光场的空间相干性. 如果

$$\Delta\theta\Delta a<\lambda_0 \tag{2.1.3}$$

干涉条纹一般是可以观察到的，这里 $\Delta\theta$ 是光源中心对针孔 P_1，P_2 的张角，$\lambda_0=c/\nu_0$ 是光场的中心波长. 为了在 P 附近观察到干涉条纹，这两个针孔必须在围绕 O 点、大小为

$$\Delta A\sim(R\Delta\theta)^2\sim R^2\lambda_0^2/(\Delta a)^2=c^2R^2/(\nu_0^2S) \tag{2.1.4}$$

的范围之中，式中 $S=(\Delta a)^2$ 是光源的面积. 通常把 ΔA 称为在平面 S_1 上，围绕 O 点的相干面积. 这就是说，只有在平面 S_1 上，以 O 为心的面积小于相干面积的不同空间点的光场才是相干的.

相干面积和相干长度可以统一表示成相干体积 ΔV：

$$\Delta V=\Delta A\tau_c c=\frac{c}{\Delta\nu}\cdot\frac{c^2}{\nu_0^2}\cdot\frac{R^2}{S}=\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}\left(\frac{R}{\Delta a}\right)^2\lambda_0^2 \qquad (2.1.5)$$

式中 $\Delta\lambda=\Delta(c/\nu_0)=c\Delta\nu/\nu_0^2$. 相干体积是对光场的时间相干性和空间相干性的统一描述,它的意义是:在围绕着 O 点的体积 ΔV 内的任意两点的光场在 P 点附近的叠加都可发生干涉效应,也就是说,在 ΔV 内任意两点的光场都是完全相干或部分相干的.

如何从解析上描述任意两时空点的光场的相干程度呢?现在来讨论这一问题.理论上采用相关函数来表示这种相干度.下面我们先从杨氏双缝干涉实验出发来介绍光场的一阶相关函数.

三、一阶相关函数

如图 2.1.3 所示,在 t 时刻,平面 S_2 上某点 $P(\boldsymbol{r},t)$ 处的光场显然来自两个时空点 $P_1(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)$、$P_2(\boldsymbol{r}_2,t-t_2)$ 的叠加,故 $P(\boldsymbol{r},t)$ 处的光场振幅函数 $E(\boldsymbol{r},t)$ 为

$$E(\boldsymbol{r},t)=K_1E(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)+K_2E(\boldsymbol{r}_2,t-t_2) \qquad (2.1.6)$$

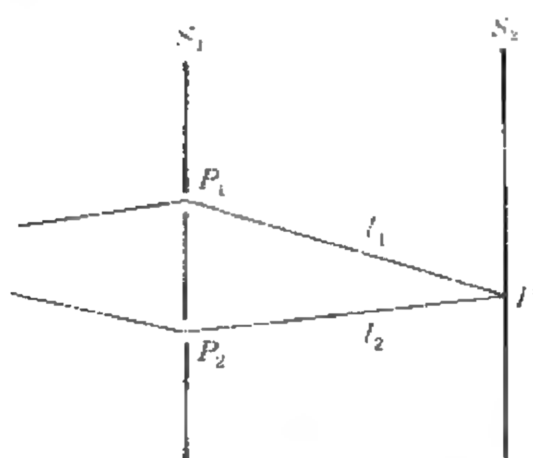


图 2.1.3 平面 S_2 上探测点 $P(\boldsymbol{r},t)$所处的相对位置

这里 $t_1=l_1/c$, $t_2=l_2/c$, 系数 K_1 和 K_2 分别是依赖于针孔大小以及几何布置的常数.

由于在光频范围内,光场的频率约为 10^{14}～10^{15}Hz,而最快的光子探测器的响应时间 T 约为 10^{-10}s,因此置于 P 点的光子探测器不能直接测量随时间迅变的场函数 $E(\boldsymbol{r},t)$,而只能测量 $P(\boldsymbol{r},t)$附近的场的强度 $E(\boldsymbol{r},t)E^*(\boldsymbol{r},t)$的平均值.事实上,由于光子探测器的响应时间 $T>10^{-10}$s,因此探测器测量的是在一个响应时间范围内 P 处场的平均强度.

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle=\langle E^*(\boldsymbol{r},t)E(\boldsymbol{r},t)\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T E^*(\boldsymbol{r},t)E(\boldsymbol{r},t)dt$$

(2.1.7)

将(2.1.6)式代入上式，即得 $P(\boldsymbol{r},t)$ 处的场强：

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle=|K_1|^2\langle I(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)\rangle+|K_2|^2\langle I(\boldsymbol{r}_2,t-t_2)\rangle$$
$$+2|K_1K_2|\mathrm{Re}\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t-t_2)\rangle$$

(2.1.8)

显然，上式中右边第一项是 S_1 屏上只有针孔 P_1 时，光场通过 P_1 到达 P 处的场强，即

$$\langle I_1(\boldsymbol{r},t)\rangle=|K_1|^2\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)\rangle$$
$$=|K_1|^2\langle I(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)\rangle$$

因而因子 K_1 满足

$$|K_1|=[\langle I_1(\boldsymbol{r},t)\rangle/\langle I(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)\rangle]^{1/2} \qquad (2.1.9)$$

同样地

$$|K_2|=[\langle I_2(\boldsymbol{r},t)\rangle/\langle I(\boldsymbol{r}_2,t-t_2)\rangle]^{1/2} \qquad (2.1.10)$$

这样，(2.1.8)式可变为

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle=\langle I_1(\boldsymbol{r},t)\rangle+\langle I_2(\boldsymbol{r},t)\rangle$$
$$+2\left[\frac{\langle I_1(\boldsymbol{r},t)\rangle\langle I_2(\boldsymbol{r},t)\rangle}{\langle I(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_2,t-t_2)\rangle}\right]^{1/2}$$
$$\times\mathrm{Re}\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t-t_1,t-t_2) \qquad (2.1.11)$$

式中已令

$$\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t-t_1,t-t_2)=\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t-t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t-t_2)\rangle$$

(2.2.12)

它代表不同时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 光场之间的关联，称之为互相关函数. 由(2.1.11)式可明显看出，互相关函数 $\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t-t_1,t-t_2)$ 反映了光场干涉条纹的亮度，即它描述了来自两个时空点的光场叠加时产生干涉的能力.

通常我们讨论的是平稳的、各态历经的光场，即在(2.1.7)式中对时间求平均时，与时间原点无关. 这就是说，(2.1.11)式的$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$，$\langle I_1(\boldsymbol{r},t)\rangle$，$\langle I_2(\boldsymbol{r},t)\rangle$与时间$t$无关，并且互相关函数仅仅依赖于时间差$\tau=t_1-t_2$. 因此(2.1.11)式可简化为

$$\langle I(\boldsymbol{r})\rangle=\langle I_1(\boldsymbol{r})\rangle+\langle I_2(\boldsymbol{r})\rangle+2\left[\frac{\langle I_1(\boldsymbol{r})\rangle\langle I_2(\boldsymbol{r})\rangle}{\langle I(\boldsymbol{r}_1)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_2)\rangle}\right]^{1/2}\mathrm{Re}\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau) \tag{2.1.13}$$

更方便地是引进归一化函数：

$$g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)=\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)/[\langle I(\boldsymbol{r}_1)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_2)\rangle]^{1/2} \tag{2.1.14}$$

它被称之为光场的一阶复相干度. 由于

$$\langle|E_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)+\lambda E_2(\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2\rangle\geqslant 0$$

式中λ为任意常数. 则对于平稳的、各态历经的光场而言，上式化为

$$\langle I(\boldsymbol{r}_1)\rangle+|\lambda|^2\langle I(\boldsymbol{r}_2)\rangle+\lambda\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)+\lambda^*\Gamma^{(1)*}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)\geqslant 0$$

如果在上式中令

$$\lambda=-\Gamma^{(1)*}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)/\langle I(\boldsymbol{r}_2)\rangle$$

则有

$$\langle I(\boldsymbol{r}_1)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_2)\rangle\geqslant|\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|^2 \tag{2.1.15}$$

这即是 Cauchy-Schwartz 不等式. 由(2.1.15)式可知一阶复相干度满足

$$|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|\leqslant 1 \tag{2.1.16}$$

如果令

$$g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)=|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|\exp[i\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)] \tag{2.1.17}$$

则 P 点光场的强度(2.1.13)式可写为

$$\langle I(\boldsymbol{r})\rangle=\langle I_1(\boldsymbol{r})\rangle+\langle I_2(\boldsymbol{r})\rangle+2[\langle I_1(\boldsymbol{r})\rangle\langle I_2(\boldsymbol{r})\rangle]^{1/2} \times|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|\cos\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau) \tag{2.1.18}$$

上式表明,$|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|$的大小可以通过测量 P 点光场的极大和极小场强来确定.如果定义干涉条纹的可见度

$$V=(\langle I\rangle_{\max}-\langle I\rangle_{\min})/(\langle I\rangle_{\max}+\langle I\rangle_{\min}) \tag{2.1.19}$$

那么$|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|$满足

$$V=\frac{2[\langle I_1(\boldsymbol{r})\rangle\langle I_2(\boldsymbol{r})\rangle]^{\frac{1}{2}}}{\langle I_1(\boldsymbol{r}_1)\rangle+\langle I_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle}|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)| \tag{2.1.20}$$

在$\langle I_1(\boldsymbol{r})\rangle=\langle I_2(\boldsymbol{r})\rangle$的特殊场合,光场的一阶相干度的模简化为

$$|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|=V \tag{2.1.21}$$

(2.1.20)和(2.1.21)式表明,光场的一阶相干度的大小可以通过测量干涉条纹的可见度来测定.因此一阶相干度反映了来自两个时空点的光场叠加时产生干涉的能力.通常将$|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|=1$的光场称为一阶相干光;若$|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|=0$,则光场为非相干光;而当$0<|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)|<1$时,光场是部分相干光.

由(2.1.14)式可知,在$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2$的场合(如迈克尔逊干涉仪),有

$$g^{(1)}(\tau)=g^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\tau)$$

显然,此时光场的一阶相干度仅仅依赖于时间间隔 τ.由相干时间的定义可知,如果时间间隔 τ 大于相干时间 τ_c,则 $g^{(1)}(\tau)=0$;而当 $\tau<\tau_c$ 时,$g^{(1)}(\tau)\neq0$,因此 $g^{(1)}(\tau)$可描述光场的时间相干性.另一方面,如果在(2.1.14)式中令 $\tau=0$,即考察同一时刻不同时空点的光场发生干涉的能力,因而一阶相干度 $g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,0)$描述的是光场的空间相干性.一般说来,不可能把光场的时间相干性和空间相干性分离开来,原因在于光场服从波动方程(1.3.6)式,该方程把光场的时间变化和空间变化联系在一起.

四、光场的高阶相关函数

从(2.1.17)和(2.1.18)式可以看到,光场的一阶相干度实际上描述了不同时空点光场的相位关联程度,它并不能描述不同时空点光场强度的关联,因而对光场一阶相干度的讨论并不足以全面揭示光场的相干性质,对光场相干性的更进一步揭示需要讨论光场的高阶相关函数.下面,我们首先通过Hanbury Brown-Twiss(简记为HBT)实验来介绍光场的二阶相关函数,然后将其推广到高阶相关函数.

HBT实验的原理如图2.1.4所示.来自光源的准单色光束经

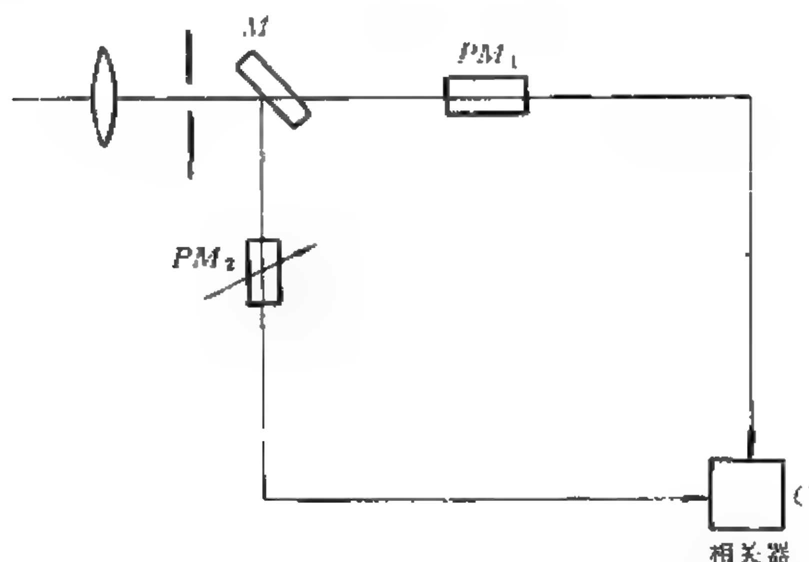


图2.1.4 HBT实验的原理图

一半透半反的镜面 M 后,分成两束光,分别通过光电探测器 PM_1、PM_2,把它们输出的信号输送到相关器C.相关器测量到的物理量是

$$\begin{aligned}&\langle(I_1(\boldsymbol{r}_1,t)-\langle I_1\rangle)(I_2(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)-\langle I_2\rangle)\rangle \\ &=\langle I_1(\boldsymbol{r}_1,t)I_2(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)\rangle-\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle\end{aligned}\tag{2.1.22}$$

式中 $I_1(\boldsymbol{r}_1,t)$ 及 $I_2(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)$ 分别是 PM_1、PM_2 处的瞬时光强,$\langle I_1\rangle$,$\langle I_2\rangle$ 是在一个响应时间 T 内的 $I_1(\boldsymbol{r}_1,t)$、$I_2(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)$ 的平均

强度. 因此相关器 C 输出的实际上是 PM_1、PM_2 处光场强度涨落的关联.

(2.1.22)式右边的第一项是如下类型的相关函数:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t_1,t_2) &= \langle I_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)I_2(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle \\ &= \langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle \qquad (2.1.23)\end{aligned}$$

$\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t_1,t_2)$是四个场量的关联,称为光场的二阶相关函数,它描述两个时空点光场的强度的关联. 同光场的一阶相干度相似,光场的二阶相干度定义为

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau) = \frac{\langle E_1^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_2^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E_2(\boldsymbol{r}_2,t_2)E_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle}{\langle I_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\langle I_2(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle} \qquad (2.1.24)$$

通常我们将 $|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)| = g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau) = 1$ 的光场称为二阶相干光.

下面我们来讨论一下二阶相干度的性质. 对于平稳的、各态历经的光场,(2.1.24)式简化为

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau) = \frac{\langle E_1^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_2^*(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)E_2(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)E_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle}{\langle I_1(\boldsymbol{r}_1)\rangle\langle I_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle} \qquad (2.1.25)$$

如果两光电探测器 PM_1、PM_2 相距非常近,以至于 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2$,$\tau=0$,则光场的二阶相干度变为

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_i,0) = \langle I_i^2(\boldsymbol{r}_i)\rangle / \langle I_i(\boldsymbol{r}_i)\rangle^2 \qquad (i=1,2) \quad (2.1.26)$$

由于

$$\langle I_i^2(\boldsymbol{r}_i)\rangle \geqslant \langle I_i(\boldsymbol{r}_i)\rangle^2$$

所以

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_i,0) \geqslant 1 \qquad (2.1.27)$$

另一方面,对于两个时空点$(\boldsymbol{r}_1,t_1)$、$(\boldsymbol{r}_2,t_2)$的光场,其强度之间的关联由 Cauchy-Schwartz 不等式可知:

$$\langle I_1^2(\boldsymbol{r}_1)\rangle\langle I_2^2(\boldsymbol{r}_2)\rangle \geqslant \langle I_1(\boldsymbol{r}_1,t)I_2(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)\rangle^2$$
$$=\langle E_1^*(\boldsymbol{r}_1,t)E_2^*(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)E_2(\boldsymbol{r}_2,t+\tau)E_1(\boldsymbol{r}_1,t)\rangle^2 \tag{2.1.28}$$

因此有

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1,0)g^{(2)}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_2,0) \geqslant [g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)]^2 \tag{2.1.29}$$

这就是经典理论中不同时空点(r_1,t_1),(r_2,t_2)的光场,其二阶相干度满足的Cauchy-Schwartz不等式.

光场的二阶相关函数和二阶相干度描述了光场强度涨落的关联程度,它们更进一步揭示了光场的相干性.上述相关函数和相干度的定义式可进一步推广到更一般的情况.通常定义光场的n阶相关函数为

$$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{r}_1,t_1,\boldsymbol{r}_2,t_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n,t_n,\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1},\cdots\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})$$
$$=\langle E_1^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdots E_n^*(\boldsymbol{r}_n,t_n)E_{n+1}(\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1})\cdots E_{2n}(\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})\rangle \tag{2.1.30}$$

与之相应的n阶相干度表示为

$$g^{(n)}(\boldsymbol{r}_1,t_1,\boldsymbol{r}_2,t_2\cdots\boldsymbol{r}_n,t_n,\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1},\cdots\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})$$
$$=\frac{\langle E_1^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdots E_n^*(\boldsymbol{r}_n,t_n)E_{n+1}(\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1})\cdots E_{2n}(\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})\rangle}{[\langle I_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\cdots\langle I_n(\boldsymbol{r}_n,t_n)\rangle\langle I_{n+1}(\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1})\rangle\cdots\langle I_{2n}(\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})\rangle]^{\frac{1}{2}}} \tag{2.1.31}$$

我们把

$$|g^{(n)}(\boldsymbol{r}_1,t_1,\boldsymbol{r}_2,t_2,\cdots\boldsymbol{r}_n,t_n,\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1},\cdots\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})|=1 \tag{2.1.32}$$

的光场称为n阶相干光场.理论计算表明,只有在阈上工作的激光器输出的稳定激光场才是n阶相干光场.

第二节 光场相干性的量子理论

前面介绍了光场相干性的经典理论.下面我们来讨论在量子

理论中如何描述光场的相干性.

一、量子关联函数

在介绍光场相干性的量子理论之前,需要先分析一下光场的探测过程.目前的光探测器大都是基于光电效应的原理,它在光场的量子相干理论的发展中起着十分重要的作用,因为光场的量子特性可通过光电效应的量子性而很好地体现出来.

考虑一个理想的探测器,这种探测器的尺寸非常之小,并且其灵敏度又不依赖于光子的频率.单个的原子可以被选作为这样的一种探测器.作为探测器的原子应该是这样的原子,通常它处于基态,一旦它吸收一个光子而跃迁到激发态以后,就将极快地弛豫到基态,因而可忽略原子的受激辐射过程的影响.这就是说,作为探测器的原子,可以认为总是处于基态.对于入射光场来说,它只发生吸收光子的过程,而不发射与入射光相同频率和传播方向一致的光子.

由(1.2.1)式可知,在电偶极近似下,探测原子与某时空点$(\boldsymbol{r},t)$处的光场的相互作用哈密顿量可表示为

$$H_I = -\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \qquad (2.1.33)$$

其中$\boldsymbol{D}$为原子的偶极算符,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$为时空点$(\boldsymbol{r},t)$处的电场强度算符,它可以表示成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t) \qquad (2.1.34)$$

按(1.3.40)式

$$\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) = i\sum_k\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}a_k\exp(-i\omega_k t) \qquad (2.1.35a)$$

$$\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)=[\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)]^{\dagger} \qquad (2.1.35b)$$

显然$\boldsymbol{E}^{(+)}$为电场的正频部分,它只包含光场的湮没算符.$\boldsymbol{E}^{(-)}$为负

频部分，它只含有产生算符. 在光的吸收过程中，只有场的正频部分起作用.

由于假设入射光场不是很强，因此探测原子从入射光场中每次只能吸收一个光子. 当原子从入射光场中吸收一个光子而从基态$|g\rangle$跃迁到某一激发态$|e\rangle$时，光场则从初态$|i\rangle$变到终态$|f\rangle$. 由量子力学的微扰理论可知，在一级近似下，单位时间原子的跃迁概率正比于跃迁矩阵元

$$|\langle e|\boldsymbol{D}|g\rangle|^2|\langle f|\boldsymbol{E}^{(+)}|i\rangle|^2$$

实际上，场的终态$|f\rangle$无法探测，因此必须对其作和. 利用完备性关系

$$\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$$

可得单位时间跃迁到所有终态$|f\rangle$的总的概率正比于

$$|\langle e|\boldsymbol{D}|g\rangle|^2|\langle i|\boldsymbol{E}^{(-)}\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}|i\rangle| = |\langle e|\boldsymbol{D}|g\rangle|^2\mathrm{Tr}\boldsymbol{E}^{(-)}\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}|i\rangle\langle i| \tag{2.1.36}$$

考虑到光场最初可能并不处于纯态$|i\rangle$，因此一般情况下，应采用场的密度算符来描述光场的初态. 这样，单位时间内探测原子从基态$|g\rangle$跃迁到激发态$|e\rangle$的概率为

$$P_{g\to e} = 常数\times|\langle e|\boldsymbol{D}|g\rangle|^2G^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t,t) \tag{2.1.37}$$

这里

$$G^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t,t) = \mathrm{Tr}[\rho\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)] \tag{2.1.38}$$

显然，它与经典理论的一阶相关函数$\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t,t)$相对应，称为时空点$(\boldsymbol{r},t)$的光场的量子自相关函数. 更一般地，量子理论的一阶相关函数定义为

$$G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t_1,t_2) = \mathrm{Tr}[\rho\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)] \tag{2.1.39}$$

与经典理论中的(2.1.14)式相似，量子理论中光场的一阶相干度定义为

$$g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t_1,t_2)=$$

$$\frac{\mathrm{Tr}[\rho \boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdot \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)]}{\{\mathrm{Tr}[\rho \boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdot \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)]\mathrm{Tr}[\rho \boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\cdot \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)]\}^{\frac{1}{2}}}$$

(2.1.40)

对于频率为 ω 的单模光场而言，由于 $E^{(-)}(\boldsymbol{r}_i,t_i)$ 中只含产生算符 a^{+}，$E^{(+)}(\boldsymbol{r}_i,t_i)$ 中只含湮没算符 a，因而由上式可知，单模光场在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$，$(\boldsymbol{r},t+\tau)$ 的一阶相干度的大小为

$$|g^{(1)}(\tau)|=\left|\frac{\langle a^{+}a\rangle e^{-i\omega\tau}}{[\langle a^{+}a\rangle\langle a^{+}a\rangle]^{\frac{1}{2}}}\right|=1 \qquad (2.1.41)$$

这说明对于任何单模光场而言，均是一阶相干光场，这一点与经典理论的结论是一致的。

与推导光场的一阶相干度 $g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t_1,t_2)$[(2.1.40)式]的方法相似，量子理论中光场的二阶相干度定义为

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t_1,t_2)$$

$$=\frac{\mathrm{Tr}[\rho \boldsymbol{E}_1^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\boldsymbol{E}_2^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\cdot \boldsymbol{E}_2^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\boldsymbol{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)]}{\mathrm{Tr}[\rho \boldsymbol{E}_1^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdot \boldsymbol{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)]\mathrm{Tr}[\rho \boldsymbol{E}_2^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\cdot \boldsymbol{E}_2^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)]}$$

(2.1.42)

上式与经典理论中的二阶相干度[(2.1.24)式]的形式相似，只是将(2.1.24)式中的场量 $\boldsymbol{E}^{*}(\boldsymbol{r}_i,t_i)$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i,t_i)$ $(i=1,2)$ 分别用算符 $\boldsymbol{E}_i^{(-)}(\boldsymbol{r}_i,t_i)\boldsymbol{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{r}_i,t_i)$ 来取代，因而 $g^{(2)}(r_1,r_2,t_1,t_2)$[(2.1.42)式]反映了光场强度涨落的关联程度，它可由 HBT 实验来测量。

由(2.1.35)和(2.1.42)式可知，对于频率为 ω 的单模光场，其二阶相干度简化为

$$g^{(2)}(t,t+\tau)=\frac{\langle a^{+}(t)a^{+}(t+\tau)a(t+\tau)a(\tau)\rangle}{\langle a^{+}(t)a(t)\rangle\langle a^{+}(t+\tau)a(t+\tau)\rangle}$$

(2.1.43)

一般地，它表示在不同时刻 t 和 $t+\tau$、空间某点 r 处单模光场的强度相干程度。如果所讨论的光场是自由光场，即

$$a(t)=a(0)e^{-i\omega t} \tag{2.1.44}$$

则(2.1.43)式简化为

$$g^{(2)}(t,t+\tau)=g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle (a^{\dagger})^2a^2\rangle}{\langle a^{\dagger}a\rangle^2} \tag{2.1.45}$$

即此时光场的二阶相干度与时间无关，为一恒量. 对于双模光场而言，(2.1.43)式简化为

$$g_{12}^{(2)}(t,t+\tau)=\frac{\langle a_1^{\dagger}(t)a_2^{\dagger}(t+\tau)a_2(t+\tau)a_1(t)\rangle}{\langle a_1^{\dagger}(t)a_1(t)\rangle\langle a_2^{\dagger}(t+\tau)a_2(t+\tau)\rangle} \tag{2.1.46}$$

它描述空间某点 r，双模光场的第一模(由算符 $a_1^{\dagger},a_1$ 描述)在时刻 t 与 $t+\tau$ 时刻光场另一模(由算符 $a_2^{\dagger},a_2$ 描述)的场强相干程度. 所以称它为模间相干度. 对于自由的双模光场，其哈密顿量为

$$H_F=\omega_1a_1^{\dagger}a_1+\omega_2a_2^{\dagger}a_2 \tag{2.1.47}$$

此时(2.1.46)式简化为

$$g_{12}^{(2)}(t,t+\tau)=g_{12}^{(2)}(\tau)=\frac{\langle a_1^{\dagger}a_1a_2^{\dagger}a_2\rangle}{\langle a_1^{\dagger}a_1\rangle\langle a_2^{\dagger}a_2\rangle} \tag{2.1.48}$$

这就是说，自由的双模光场的模间相干度 $g_{12}^{(2)}(\tau)$ 与时间无关.

更一般地，在量子理论中，光场的 n 阶相干度可定义为

$$g^{(n)}(\boldsymbol{r}_1,t_1,\cdots\boldsymbol{r}_n,t_n,\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1},\cdots\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})$$
$$=\left\{\frac{\mathrm{Tr}[\rho\boldsymbol{E}_1^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdots\boldsymbol{E}_n^{(-)}(\boldsymbol{r}_n,t_n)\boldsymbol{E}_{n+1}^{(+)}(\boldsymbol{r}_{n+1},t_{n+1})\cdots\boldsymbol{E}_{2n}^{(+)}(\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})]}{\mathrm{Tr}[\rho\boldsymbol{E}_1^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdot\boldsymbol{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)]\cdots\mathrm{Tr}[\rho\boldsymbol{E}_{2n}^{(-)}(\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})\cdot\boldsymbol{E}_{2n}^{(+)}(\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})]}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.49}$$

它表示时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1),\cdots,(\boldsymbol{r}_{2n},t_{2n})$ 的光场的 n 阶相干程度.

二、光场的聚束与反聚束效应

作为例子，下面我们来讨论由相干态、粒子数态描述的光场以及热光场的量子相干性质.

对于分别处在相干态

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\exp(-|\alpha|^2/2)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad (2.1.50)$$

和粒子数态$|n\rangle$的单模光场以及由密度算符

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}|n\rangle\langle n| \qquad (2.1.51)$$

描述的单模热光场而言，由(2.1.41)式可知，它们的一阶相干度均满足

$$|g^{(1)}(\tau)|=1 \qquad (2.1.52)$$

这就是说，它们均是一阶相干光场. 但是很明显，这三种单模光场的光子数分布明显不同，对应的光子数涨落并不一样，因而它们的相干性质完全不同，这就需要考虑这三种光场的二阶相干性的差别.

由(2.1.45)式可知，处在相干态$|\alpha\rangle$的单模光场，其二阶相干度为

$$g_a^{(2)}(\tau)=\frac{\langle\alpha|(a^+)^2a^2|\alpha\rangle}{(\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle)^2}=1 \qquad (2.1.53)$$

上式表明，相干态光场不仅是一阶相干光场，而且也是二阶相干光场. 这就是说，由相干态$|\alpha\rangle$描述的单模光场，因相位涨落和强度涨落而产生的光场噪声都是最小，即相干态是光场的粒子数-相位最小不确定态. 这一点与第一篇第三章利用光场相位理论讨论的结论一致. 由密度算符ρ[(2.1.51)式]描述的热光场，它的二阶相干度为

$$g_\rho^{(2)}(\tau)=\frac{\mathrm{Tr}[\rho(a^+)^2a^2]}{[\mathrm{Tr}(\rho a^+a)]^2}=2>g_a^{(2)}(\tau)=1 \qquad (2.1.54)$$

显然，虽然单模热光场和单模相干光场的一阶相干度的大小相等，但它们的二阶相干度却不相同. 由(2.1.54)式可知，单模热光场中光场强度涨落的噪声比相干态场要大，通常若光场的二阶相干度满足

$$g^{(2)}(\tau)>1 \tag{2.1.55}$$

则称这种现象为光子的聚束效应.很明显,(2.1.55)式与经典理论的(2.1.27)式是一致的,因此光场光子的聚束效应是一种经典效应.

对于处在粒子数态$|n\rangle$的光场,其二阶相干度为

$$g_n^{(2)}(\tau)=\frac{\langle n|(a^{\dagger})^2a^2|n\rangle}{(\langle n|a^{\dagger}a|n\rangle)^2}=\begin{cases}1-1/n & (n\geqslant 2)\\ 0 & (n=0,1)\end{cases} \tag{2.1.56}$$

上式与单模相干光场和单模热光场的二阶相干度不同,这里光场的二阶相干度遵循

$$g^{(2)}(\tau)<1 \tag{2.1.57}$$

显然(2.1.57)式是经典理论所不允许的,它也是光场量子特性的体现.通常将光场二阶相干度满足(2.2.57)式的现象,称为光场光子的反聚束效应.光子的反聚束效应不同于光子的聚束效应,它是光场的一种非经典效应.对这一非经典效应的理解可以通过HBT实验的量子理论来说明.

在介绍HBT实验的量子理论之前,我们首先看看HBT实验的经典理论,以便弄清两种理论的差异.在图2.1.4所示的实验装置中,如果将两个光电探测器PM_1、PM_2调整到使它们与半透半反镜面M的空间距离相同,并假定入射到半透半反镜的瞬时光强为$I(z,t)$,那么PM_1,PM_2接收到的瞬时光强为

$$I_1(z,t)=I_2(z,t)=I(z,t)/2 \tag{2.1.58}$$

它们在响应时间T内的平均值为

$$\bar{I}_1=\bar{I}_2=\bar{I}/2 \tag{2.1.59}$$

那么相关器C输出的结果为

$$C=\langle[I_1(z,t)-\bar{I}_1][I_2(z,t)-\bar{I}_2]\rangle=\frac{1}{4}[\langle I^2(z,t)\rangle-\bar{I}^2]\geqslant 0 \tag{2.1.60}$$

所以相关器测出的归一化的 HBT 关联为

$$\frac{\langle I^2(z,t)\rangle-\overline{I}^2}{\overline{I}^2}=g^{(2)}(0)-1\geqslant 0 \tag{2.1.61}$$

这表明在经典理论中，HBT 实验测量的值恒大于或等于零. 这是因为在经典理论中，不管入射光场的强度如何，当它通过半透半反镜面时，光束会被分成瞬时强度相等的两束光而被 PM_1、PM_2 探测到，这个图像反映在测量结果上就是 $C\geqslant 0$ 或 $g^{(2)}(0)\geqslant 1$. 换句话说，在 HBT 实验中，相关器输出的只能是正值，而不能是负值. 但 HBT 实验的量子理论却给出与此截然不同的结论.

按照量子理论，入射场中的每一个光子在通过半透半反镜面时要么被透射，要么被反射，只能为其中一个探测器探测，因此探测器 PM_1、PM_2 同时测得的瞬时光强并不相等，这一点是量子理论与经典理论的重要区别.

我们把 HBT 实验看成是一个量子系统，用 a 和 a^+ 代表单模入射光场的湮没和产生算符，用 b^+ 和 b(c^+ 和 c)分别代表由半透半反镜面 M 透过(反射)而到达探测器 PM_1(PM_2)的光场的湮没和产生算符. 由于入射光子以同样的概率被 M 反射和透射，因此可将由源 S 发射的单模光场表示为

$$\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)=i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\cos\theta b+\sin\theta c)e^{-i\omega t} \tag{2.1.62}$$

即将入射光场的产生、湮没算符 a^+ 和 a 表示为

$$a=\cos\theta b+\sin\theta c \tag{2.1.63a}$$

$$a^+=\cos\theta b^++\sin\theta c^+ \tag{2.1.63b}$$

式中 b 和 c 彼此可对易，即$[b,c]=0$，这就是说由 b 描述的光子只能被镜面 M 透射，而由 c 描述的光子只能被 M 反射，因子 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 的引入是为了保证对易关系$[a,a^+]=1$ 成立.

假设入射光场处于粒子数态$|n\rangle$，利用(2.1.63)式，可将$|n\rangle$表

示为

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^{+})^{n}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\cos\theta b^{+} + \sin\theta c^{+})^{n}|0,0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{n_b=0}^{n}\frac{n!}{n_b!(n-n_b)!}(\cos\theta)^{n_b}(\sin\theta)^{n-n_b}(b^{+})^{n_b}(c^{+})^{n-n_b}|0,0\rangle$$

$$= \sum_{n_b=0}^{n}\sqrt{\frac{n!}{n_b!(n-n_b)!}}(\cos\theta)^{n_b}(\sin\theta)^{n-n_b}|n_b,n-n_b\rangle$$

(2.1.64)

因此探测器 PM_1,PM_2 测得的平均光子数分别为

$$\langle b^{+}b\rangle = \langle n|b^{+}b|n\rangle = \sum_{n_b=0}^{n}\frac{n!\ n_b}{n_b!\ (n-n_b)!}(\cos^2\theta)^{n_b}(\sin^2\theta)^{n-n_b} = n\cos^2\theta$$

(2.1.65)

$$\langle c^{+}c\rangle = n\sin^2\theta \tag{2.1.66}$$

由于镜面是半透半反的,即$\langle b^{+}b\rangle = \langle c^{+}c\rangle$,所以

$$\cos^2\theta = \sin^2\theta = 1/2$$

不失一般性,我们取 $\theta=\pi/4$,从而(2.1.63)式化为

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c)$$

$$a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^{+}+c^{+})$$

(2.1.67)

而 PM_1,PM_2 测量的平均光子数[(2.1.65)、(2.1.66)式]为

$$\langle b^{+}b\rangle = \langle c^{+}c\rangle = n/2 \tag{2.1.68}$$

相关器 C 测量的二阶相关函数为

$$\langle b^{+}c^{+}cb\rangle = \langle n_b(n-n_b)\rangle = n(n-1)/4 \tag{2.1.69}$$

从而相关器测量的二阶相干度(2.1.43 式)满足

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle b^{+}c^{+}cb\rangle}{\langle b^{+}b\rangle\langle c^{+}c\rangle} = 1-1/n \tag{2.1.70}$$

这就是(2.1.56)式. 可见, $g^{(2)}(\tau)<1$ 是光场量子相干特性的反映.

表 2.1 给出了对应于不同 $|n\rangle$ 的入射光场, 两个光电探测器可能探测到的光子数和平均光子数、以及它们的关联和二阶相干度. 从表中可以看到, 对于 $n=1$ 的情况, 即入射光场处在 $|1\rangle$, 此时由于入射光场只有一个光子, 它到达镜面 M 时要么反射, 要么透射, 因此 n_b 的取值只能是 0 或 1, 相应地 $n-n_b$ 只能是 1 或 0. 这就是说, 光场在通过镜面 M 时被分成瞬时光强不相等的两束, 这一点与经典理论中的(2.1.58)式完全不同. 因而导致关联函数 $\langle b^+c^+cb\rangle=0$, 使得 $g^{(2)}(\tau)=0$, 从而相关器输出的光场强度的涨落的关联值为负. 换句话说, 由于入射光子通过镜面 M 后, 要么处在 $PM_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)$, 要么处在 $PM_2(\boldsymbol{r}_2,t_2)$, 而不能同时既出现在 $PM_1(\boldsymbol{r}_1)$ 又出现在 $PM_2(\boldsymbol{r}_2)$, 因而对于二阶相干度 $g^{(2)}(\tau)<1$ 的光场, 可以认为它的光子具有良好的空间分布. 这也就是说, 光子的反聚束效应是由于光场光子的良好空间分布所造成的, 这种非经典效应是经典理论所不允许的, 它是光场量子特性的体现. 事实上, 光子的反聚束效应是从实验中最先观察到的光场的非经典效应, 这一现象是 1976 年由 Kimble 等人在原子的共振荧光实验中观察到的.

表 2.1

n	n_b	$n-n_b$	$\langle b^+b\rangle=\langle c^+c\rangle$	$\langle b^+c^+cb\rangle$	$g^{(2)}(\tau)$
1	1 0	0 1	1/2	0	0
2	2 1 1 0	0 1 1 2	1	1/2	1/2
3			3/2	3/2	2/3
4			2	3	3/4

下面我们再来从 HBT 实验讨论相干态光场的二阶相干性

质. 当入射光场处于相干态$|\alpha\rangle$时,由(2.1.50)式可知,光场光子数分布概率为

$$P_n=\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n! \tag{2.1.71}$$

式中已令$\bar{n}=|\alpha|^2$,应用(2.1.50),(2.1.64)式容易得到

$$\langle b^\dagger b\rangle=\langle c^\dagger c\rangle=\bar{n}/2 \tag{2.1.72}$$

$$\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle=\bar{n}^2/4 \tag{2.1.73}$$

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle}{\langle b^\dagger b\rangle\langle c^\dagger c\rangle}=1 \tag{2.1.74}$$

(2.1.74)式与(2.1.53)式完全相符. 由(2.1.72)和(2.1.73)式可以看到,光场的相关函数$\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle=\langle b^\dagger b\rangle\langle c^\dagger c\rangle$,这就是说,通过镜面$M$的光子将随机地到达光电探测器$PM_1$,$PM_2$,它们之间没有关联,使得相关器$C$的输出结果$\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle-\langle b^\dagger b\rangle\langle c^\dagger c\rangle$为零,从而导致光场的二阶相干度$g^{(2)}(\tau)=1$.

而对于由(2.1.51)式描述的单模热光场,探测器PM_1,PM_2测得的平均光子数和相关函数分别为

$$\langle b^\dagger b\rangle=\langle c^\dagger c\rangle=\bar{n}/2 \tag{2.1.75}$$

$$\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle=\sum_n\frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}\frac{n(n-1)}{4}=\bar{n}^2/2 \tag{2.1.76}$$

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle}{\langle b^\dagger b\rangle\langle c^\dagger c\rangle}=2 \tag{2.1.77}$$

显然,从(2.1.77)式发现光场的相关函数$\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle=2\langle b^\dagger b\rangle\times\langle c^\dagger c\rangle$,相关器输出的结果为

$$C=\langle b^\dagger c^\dagger cb\rangle-\langle b^\dagger b\rangle\langle c^\dagger c\rangle=\bar{n}^2/4>0 \tag{2.1.78}$$

这就是说,热光场展现了光强的过额涨落. 这表明入射光场具有在t时刻有光子到达探测器PM_1、而在$t+\tau$时刻也有光子到达PM_2的趋势. 换句话说,如果两光电探测器靠得很近,以致于$\tau=0$,这

时热光场的光子具有成对到达探测器 PM_1 和 PM_2 的趋势，使得光场出现光子的聚束效应. 光子的聚束效应不同于光子的反聚束效应，它是光场的一种经典效应，而不是非经典效应.

三、双模光场的模间相关性

上面我们讨论了单模光场的二阶相干性质，下面以自由的双模粒子数态光场 $|n_1,n_2\rangle$ 和双模热光场为例来看看光场的模间相关性质.

对于自由的双模热光场，其密度矩阵为

$$\rho = \sum_{n_1}\sum_{n_2} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{(1+\bar{n}_1)^{n_1+1}} \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{(1+\bar{n}_2)^{n_2+1}} |n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2| \tag{2.1.79}$$

这里频率为 ω_i 的第 i 模的二阶相干度用 $g_{ii}^{(2)}(\tau)$ 表示，它满足 (2.1.54)式. 光场的模间相干度由(2.1.48)式可得

$$g_{12}^{(2)}(\tau) = \frac{\mathrm{Tr}(\rho a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1)}{\mathrm{Tr}(\rho a_1^\dagger a_1)\mathrm{Tr}(\rho a_2^\dagger a_2)} = 1 \tag{2.1.80}$$

显然

$$g_{11}^{(2)}(0)g_{22}^{(2)}(0) > [g_{12}^{(2)}(\tau)]^2 \tag{2.1.81}$$

即对于双模热光场，其两模间的相关性满足经典理论中的 Cauchy-Schwartz 不等式(2.1.29)式.

但对于双模粒子数态光场 $|n_1,n_2\rangle$，与单模情况相同，光场第 i 模的二阶相干度为

$$g_{ii}^{(2)}(\tau) = 1 - 1/n_i \qquad (i=1,2) \tag{2.1.82}$$

而光场的模间相干度为

$$g_{12}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1,n_2|a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1|n_1,n_2\rangle}{\langle n_1|a_1^\dagger a_1|n_1\rangle\langle n_2|a_2^\dagger a_2|n_2\rangle} = 1 \tag{2.1.83}$$

从(2.1.82)和(2.1.83)式可以发现：

$$g_{11}^{(2)}(0)g_{22}^{(2)}(0)=\frac{(n_1-1)(n_2-1)}{n_1n_2}$$
$$=1-(n_1+n_2-1)/(n_1n_2)<1=[g_{12}^2(\tau)]^2 \quad (2.1.84)$$

显然(2.1.84)式不满足经典理论的 Cauchy-Schwartz 不等式(2.1.29)式. 这说明处于粒子数态$|n_1,n_2\rangle$的双模光场,其模间相关性也是非经典的,这是多模光场的一种非经典效应,对这种非经典效应的解释也可以采用与 HBT 实验的量子描述相似的方法,这里不再详细讨论,有兴趣的读者可参看本章所列的文献.

参 考 文 献

[1] J. Perina, Coherence of Light, 2nd ed., D. Reidel, 1985
[2] P. L. Knight and L. Allen, Concepts of Quantum Optics, Pergamon, 1983.
[3] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, 2nd ed., Clarendon, 1983.
[4] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, 2nd ed., Pergamon, 1964.
[5] L. Mandel and E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.*, **37**, 231 (1965).
[6] G. J. Trop and R. G. Turner, *Rep. Prog. Phys.*, **37**, 771(1974).
[7] J. F. Clauser, *Phys. Rev.*, **D9**, 853 (1974).
[8] D. F. Walls, *Am. J. Phys.*, **45**, 952 (1977).
[9] H. J. Kimble, M. Dagenais and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 691 (1977).
[10] R. Loudon, *Rep. Prog. Phys.*, **43**, 913 (1980).
[11] 周 鹏、彭金生,光学学报,**10**, 837 (1990).
[12] 李高翔、彭金生,物理学报,**42**, 1443 (1993).
[13] 李高翔、彭金生,物理学报,**45**,37(1996).
[14] 李高翔、彭金生,Phys. Lett. A (待发表)(1996).

第二章 光场的压缩态

光场量子特性的另一种表现是光场量子涨落的压缩特性，本章中我们来讨论这方面的问题. 从第一篇第三章我们知道，对于一单模光场

$$E(t)=\lambda(ae^{-i\omega t}+a^{+}e^{i\omega t}) \tag{2.2.1}$$

如果定义两个厄米算符 X_1、X_2 取代算符 a 和 a^{+}：

$$X_1=\frac{1}{2}(a+a^{+}) \tag{2.2.2a}$$

$$X_2=\frac{1}{2i}(a-a^{+}) \tag{2.2.2b}$$

那么(2.2.1)式变为

$$E(t)=\lambda(X_1\cos\omega t+X_2\sin\omega t) \tag{2.2.3}$$

可见算符 X_1、X_2 是描述光场的两正交分量的算符，它们满足对易关系式：

$$[X_1,X_2]=i/2 \tag{2.2.4}$$

于是按海森伯不确定原理，X_1，X_2 的量子均方涨落之积应满足

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2\geqslant 1/16 \tag{2.2.5}$$

其中

$$(\Delta X_i)^2=\langle X_i^2\rangle-\langle X_i\rangle^2 \qquad (i=1,2) \tag{2.2.6}$$

我们知道，若光场处于相干态 $|\alpha\rangle$，那么它的两正交分量算符 X_1 和 X_2 的量子涨落有最小值 1/4，即

$$(\Delta X_1)^2=(\Delta X_2)^2=1/4 \tag{2.2.7}$$

这就是说，相干态是光场的振幅涨落有最小不确定值的态．它的两正交分量 X_1，X_2 都取最小的不确定值 1/4，这个值通常称为光场的真空涨落．在过去的一段相当长的时期，人们一直认为(2.2.7)式所描述的是光场量子涨落的最小极限值．但是这一极限对许多实际应用是非常不利的，例如在光通讯问题中，提高信噪比就显得非常重要，而噪声的来源除了通讯设备以外，还有热噪声和光场的量子噪声．即使应用处于相干态的光场的某一正交分量 X_1 携带信号，由(2.2.7)式可知其能量噪声仍为 $\hbar\omega/4$．由于光场的频率约为 10^{14}Hz－10^{15}Hz，因此光场的 X_1 分量约有 1eV 的量子噪声，而在室温下($T=300$K)，热噪声的能量 k_BT 才有 2.6×10^{-2}eV．可见，量子噪声要比热噪声大得多．这样，在未来的光通讯问题中，量子噪声就显得重要，会成为提高信噪比的主要限制．那么能不能找到光场的一种量子态，在这种态中，光场的某一分量(如 X_1)的涨落可以小于相干态相应分量的最小涨落值，从而使得利用这种光场进行光通讯时，量子噪声可大大减小呢？这就是本章所要探讨的主要问题．

第一节　单模光场的压缩态

一、压缩相干态

1．压缩相干态的引入

1976 年，H. P. Yuen 最先引入算符 b，$b^{\dagger}$：

$$
\begin{aligned}
b &= \mu a + \nu a^{\dagger} \\
b^{\dagger} &= \mu^{*} a^{\dagger} + \nu^{*} a
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

式中参数 μ，ν 满足如下关系式：

$$
|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \tag{2.2.9}
$$

显然，算符 b，$b^{\dagger}$ 满足对易关系：

$$
[b, b^{\dagger}] = 1 \tag{2.2.10}
$$

这也就是说，算符 b、$b^\dagger$ 是和光场的湮没、产生算符 a、$a^\dagger$ 性质相似的玻色子算符，它们可以通过对算符 a、$a^\dagger$ 进行规范变换 S 而联系起来，即

$$b = SaS^\dagger = \mu a + \nu a^\dagger \tag{2.2.11}$$

由于 b、$b^\dagger$ 满足对易式(2.2.10)式，所以 $N_g = b^\dagger b$ 也是粒子数算符，这里暂称之为准光子数算符．它对应本征值为 $|m_g\rangle$ 的本征方程是

$$\begin{aligned} N_g|m\rangle_g &= m_g|m\rangle_g \\ N_g|0\rangle_g &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

上式中 $|0\rangle_g$ 称为准真空态．

现在来看算符 b 的本征态 $|\beta\rangle_g$，或者说准相干态的表示形式．由于它满足

$$b|\beta\rangle_g = \beta|\beta\rangle_g \tag{2.2.13}$$

应用与(1.3.76)式相似的推导过程，得知准相干态 $|\beta\rangle_g$ 也可表示成

$$|\beta\rangle_g = D_g|0\rangle_g = \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b)|0\rangle_g \tag{2.2.14}$$

下面来讨论处于这种准相干态 $|\beta\rangle_g$ 中的光场，振幅算符 a 的两正交分量 X_1 和 X_2 的涨落值．由(2.2.8)和(2.2.9)式可知：

$$\begin{aligned} a &= \mu^* b - \nu b^\dagger \\ a^\dagger &= \mu b^\dagger - \nu^* b \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

于是

$$\langle a\rangle = {}_g\langle\beta|a|\beta\rangle_g = {}_g\langle\beta|\mu^* b - \nu b^\dagger|\beta\rangle_g = \mu^*\beta - \nu\beta^* \tag{2.2.16}$$

$$\langle a^\dagger a\rangle = {}_g\langle\beta|(\mu b^\dagger - \nu^* b)(\mu^* b - \nu b^\dagger)|\beta\rangle_g = |\mu^*\beta - \nu\beta^*|^2 + |\nu|^2 \tag{2.2.17}$$

$$\langle a^2\rangle = {}_g\langle\beta|(\mu^* b - \nu b^+)^2|\beta\rangle_g = (\mu^*\beta - \nu\beta^*)^2 - \mu^*\nu \tag{2.2.18}$$

因此，由(2.2.2)，(2.2.6)及(2.2.16)—(2.2.18)式可得光场的 X_1 和 X_2 分量的涨落分别为

$$(\Delta X_1)^2 = \frac{1}{4}\langle(a-a^+)^2\rangle - \frac{1}{4}\langle a+a^+\rangle^2 = \frac{1}{4}|\mu-\nu|^2 \tag{2.2.19}$$

$$(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4}|\mu+\nu|^2 \tag{2.2.20}$$

显然它们满足(2.2.5)式. 从上面两式可以发现，对于满足条件(2.2.9)式的参数 μ、ν，总可以选择它们的值，使得光场的某一正交分量的量子涨落满足

$$(\Delta X_i)^2 < 1/4 \qquad (i=1 \text{ 或 } 2) \tag{2.2.21}$$

此时为保证$(\Delta X_1)^2$、$(\Delta X_2)^2$ 满足不确定关系式(2.2.5)式，光场的另一正交分量的量子涨落必大于 1/4. 这就是说，在准相干态 $|\beta\rangle_g$ 中，光场的某一正交分量的量子涨落可以小于相干态 $|\alpha\rangle$ 中相应分量的量子涨落，这种减小是以光场的另一正交分量的量子涨落大于相干态中的量子涨落为代价的. 通常把光场的某一正交分量的量子涨落可以小于相干态中相应分量的涨落的准相干态 $|\beta\rangle_g$ 称为压缩相干态或双光子相干态. 这样，通过对光场的算符 a、a^+ 作规范变换(2.2.11)式以后，可以找到一种使光场的量子噪声大大减小的量子态. 那么这种规范变换究竟应取什么样的具体形式呢？现在来讨论这一问题.

2. 单模压缩算符 $S(\xi)$

若选用幺正算符为

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi(a^+)^2\right] \tag{2.2.22}$$

式中 $\xi=re^{i\theta}$ 为任意复数，显然

$$S^{\dagger}(\xi)=S^{-1}(\xi)=S(-\xi) \tag{2.2.23}$$

应用算符 $S(\xi)$ 对算符 a 和 $a^{\dagger}$ 作幺正变换，由公式

$$e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}=B+\lambda[A,B]+\frac{\lambda^2}{2}[A,[A,B]]+\cdots$$

可知

$$\begin{aligned}
b&=S(\xi)aS^{\dagger}(\xi)=\exp\left[\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}-\frac{1}{2}\xi(a^{\dagger})^{2}\right]\\
&\quad\times a\exp\left[\frac{1}{2}\xi(a^{\dagger})^{2}-\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}\right]\\
&=a+\left[\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}-\frac{1}{2}\xi(a^{\dagger})^{2},a\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}-\frac{1}{2}\xi(a^{\dagger})^{2},\right.\\
&\quad\left.\left[\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}-\frac{1}{2}\xi(a^{\dagger})^{2},a\right]\right]+\cdots
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

利用对易关系式：

$$\left[\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}-\frac{1}{2}\xi(a^{\dagger})^{2},a\right]=\xi a^{\dagger}=re^{i\theta}a^{\dagger}$$

$$\left[\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}-\frac{1}{2}\xi(a^{\dagger})^{2},a^{\dagger}\right]=\xi^{*}a=re^{-i\theta}a$$

其中 $r=|\xi|$，而 θ 为复常数 ξ 的幅角. 于是(2.2.24)式可简化为

$$\begin{aligned}
b&=a\left(1+\frac{r^{2}}{2!}+\frac{r^{4}}{4!}+\cdots\right)+e^{i\theta}a^{\dagger}\left(r+\frac{1}{3!}r^{3}+\frac{1}{5!}r^{5}+\cdots\right)\\
&=a\cosh r+a^{\dagger}e^{i\theta}\sinh r
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

把上式与(2.2.11)式相比较，令

$$\mu=\cosh r,\qquad \nu=e^{i\theta}\sinh r \tag{2.2.26}$$

它们还满足关系(2.2.9)式：

$$|\mu|^{2}-|\nu|^{2}=\cosh^{2}r-\sinh^{2}r=1$$

可见，对算符 a 实施幺正变换 $S(\xi)$[(2.2.22)－(2.2.25)式]和规

范变换(2.2.11)式的结果完全一致. 因而此幺正变换 $S(\xi)$ [(2.2.22)式]就是我们所求的规范变换算符.

利用幺正变换算符 $S(\xi)$,可将压缩相干态明显地表示出来. 在(2.2.13)式两边左乘 $S^+(\xi)$ 并应用幺正关系,得

$$S^+(\xi)bS(\xi)S^+(\xi)|\beta\rangle_g=S^+(\xi)\beta|\beta\rangle_g$$

即

$$aS^+(\xi)|\beta\rangle_g=\beta S^+(\xi)|\beta\rangle_g \qquad (2.2.27)$$

上式表明,$S^+(\xi)|\beta\rangle_g$ 是光场湮没算符 a 的本征值为 β 的本征态,即为相干态 $|\beta\rangle$,因而 $|\beta\rangle_g$ 满足

$$|\beta\rangle_g=S(\xi)|\beta\rangle=S(\xi)D(\beta)|0\rangle \qquad (2.2.28)$$

这里 $D(\beta)$ 可看作为相干态的平移算符,它的作用是使真空态 $|0\rangle$ 变换到相干态 $|\beta\rangle$. 按(1.3.77)式它定义为

$$D(\beta)=\exp(\beta a^+-\beta^* a) \qquad (2.2.29)$$

(2.2.28)式表明,压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 是通过幺正算符 $S(\xi)$ 对相干态 $|\beta\rangle$ 作用后得到的. 由于处于压缩相干态的光场,其某一正交分量的量子涨落值低于相干态相应分量的涨落值,所以它的量子噪声被压缩,而量子噪声被压缩的原因是由于算符 $S(\xi)$ 对相干态 $|\beta\rangle$ 的作用,所以我们称算符 $S(\xi)$ 为单模光场的压缩算符. 另一方面,由于 $S(\xi)$[(2.2.22)式]中光场算符是以 a^2 和 $(a^+)^2$ 的形式出现,这也就是说,压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 是从相干态 $|\beta\rangle$ 中通过湮没或产生两个光子的过程而形成的,因此我们又可称压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 为双光子相干态.

下面我们来讨论压缩算符 $S(\xi)$ 中因子 r 和 θ 的物理意义. 将(2.2.26)式代入(2.2.19)和(2.2.20)式,可得压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 中光场的 X_1,X_2 分量的量子涨落和 X_1,X_2 分量的期望值分别为

$$(\Delta X_1)^2=\frac{1}{4}\left\{e^{-2r}\cos^2\frac{\theta}{2}+e^{2r}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\} \qquad (2.2.30)$$

$$(\Delta X_2)^2=\frac{1}{4}\left[e^{-2r}\sin^2\frac{\theta}{2}+e^{2r}\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \qquad (2.2.31)$$

$$\langle X_1\rangle={}_g\langle\beta|\frac{a+a^\dagger}{2}|\beta\rangle_g=|\beta|[\cos\varphi\cosh r-\cos(\theta-\varphi)\sinh r] \qquad (2.2.32)$$

$$\langle X_2\rangle={}_g\langle\beta|\frac{a-a^\dagger}{2i}|\beta\rangle_g=|\beta|[\sin\varphi\cosh r+\sin(\theta-\varphi)\sinh r] \qquad (2.2.33)$$

其中已应用了(2.2.16)式,并在(2.2.32)及(2.2.33)式中令$\beta=|\beta|e^{i\varphi}$. 由(2.2.30)和(2.2.31)式可见,两正交分量的量子涨落只与 r 和 θ 有关,而不依赖于相干态$|\beta\rangle$. 换句话说,由压缩算符 $S(\xi)$对任一相干态$|\beta\rangle$作用后所得到的压缩相干态,虽然光场两正交分量 X_1,X_2 的期望值由 β,r 和 θ 共同决定,但光场的两正交分量的量子涨落则只由压缩算符参量决定. 当 $\theta=0$ 时,(2.2.30)和(2.2.31)式给出

$$(\Delta X_1)^2=\frac{1}{4}e^{-2r} \qquad (2.2.34)$$

$$(\Delta X_2)^2=\frac{1}{4}e^{2r} \qquad (2.2.35)$$

显然,若选取 $r>0$,那么$(\Delta X_1)^2<1/4$,$(\Delta X_2)^2<1/4$. 这就是说,处于压缩相干态的光场,它的 X_1 分量的量子噪声被压缩了,相应地 X_2 分量的量子噪声则被放大了. $(\Delta X_1)^2$ 被压缩的程度依赖于 r 的大小,当 $r=0$ 时,压缩相干态$|\beta\rangle_g$ 退化为相干态$|\beta\rangle$;随着 r 的增大,X_1 分量的涨落被压缩的程度越深,因此我们称 r 为压缩因子.

如果 $\theta=\pi$,由(2.2.30)和(2.2.31)式可知,$(\Delta X_1)^2$,$(\Delta X_2)^2$ 变为

$$(\Delta X_1)^2=\frac{1}{4}e^{2r} \qquad (2.2.36)$$

$$(\Delta X_2)^2=\frac{1}{4}e^{-2r} \tag{2.2.37}$$

这说明，当 $\theta=\pi$ 时，光场的 X_2 分量的量子噪声被压缩，而 X_1 分量的量子噪声被放大．由此可见，在压缩相干态中，光场分量的量子噪声是被放大了还是被压缩了，决定于 θ 的取值．因此可以说，θ 角范围的选定决定压缩的方向．此外，由(2.2.34)和(2.2.35)式还可看出，不管 θ 值是零还是 π，总有

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2=1/16 \tag{2.2.38}$$

所以当取 $\theta=0$ 或 π 时，处于压缩相干态的光场也是最小不确定态，但它与相干态 $|\beta\rangle$ 这一最小不确定态的性质完全不同，因为当光场处于 $|\beta\rangle_g$ 时，它的两正交分量的量子涨落均不等于 1/4.

更为一般地，由(2.2.30)式可得，要使光场的 X_1 分量的量子噪声被压缩，必须有

$$\frac{1}{4}\left(e^{-2r}\cos^2\frac{\theta}{2}+e^{2r}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)<1/4$$

将上式化简：

$$\frac{1}{2}(1+\cos\theta)e^{-2r}+\frac{1}{2}(1-\cos\theta)e^{2r}<1$$

$$\frac{1}{2}(e^{-2r}+e^{2r}-2)-\frac{1}{2}\cos\theta(e^{2r}-e^{-2r})<0$$

亦即

$$\cos\theta>\tanh r \tag{2.2.39}$$

这就是说，在压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 中，要使光场的 $(\Delta X_1)^2$ 被压缩，决定压缩程度的压缩因子 r 和决定压缩方向的相位角 θ 须满足(2.2.39)式．同样，要使 $(\Delta X_2)^2$ 被压缩，则 r 和 θ 应满足

$$\frac{1}{4}\left(e^{-2r}\sin^2\frac{\theta}{2}+e^{2r}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)<1/4$$

即

$$\cos\theta<-\tanh r \tag{2.2.40}$$

图 2.2.1 画出了分别处于相干态 $|\beta\rangle$、压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 的光场的两正交分量在 X_1-X_2 相空间中的数值及涨落范围. 图 2.2.1(a)表明，当光场处于相干态 $|\beta\rangle$ 时，在 X_1-X_2 相空间中，相干态光场的两正交分量的不确定度是以 $(|\beta|\cos\varphi, |\beta|\sin\varphi)$ 为圆心，以 1/2 为直径的圆. $D(\beta)$ 的作用是使光场由真空态 $|0\rangle$ 平移到相干态 $|\beta\rangle$，相应地，表征 X_1 和 X_2 两正交分量涨落范围的圆也发生了平移. 图 2.2.1(b)表示 $\theta=0$ 情况下，处于压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 的光场在 X_1-X_2 相空间的描述，它的两正交分量的不确定度按(2.2.34)和(2.2.35)式可知是以 $(\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle)$ 为中心，以 $(\Delta X_2)^2=\frac{1}{4}e^{2r}$ 为长轴，以 $(\Delta X_1)^2=\frac{1}{4}e^{-2r}$ 为短轴的椭圆. 由(2.2.32)和(2.2.33)式可知，$\langle X_1\rangle$ 和 $\langle X_2\rangle$ 满足

$$\langle X_1\rangle=|\beta|(\cosh r-\sinh r)\cos\varphi \qquad (2.2.41a)$$

$$\langle X_2\rangle=|\beta|(\cosh r+\sinh r)\sin\varphi \qquad (2.2.41b)$$

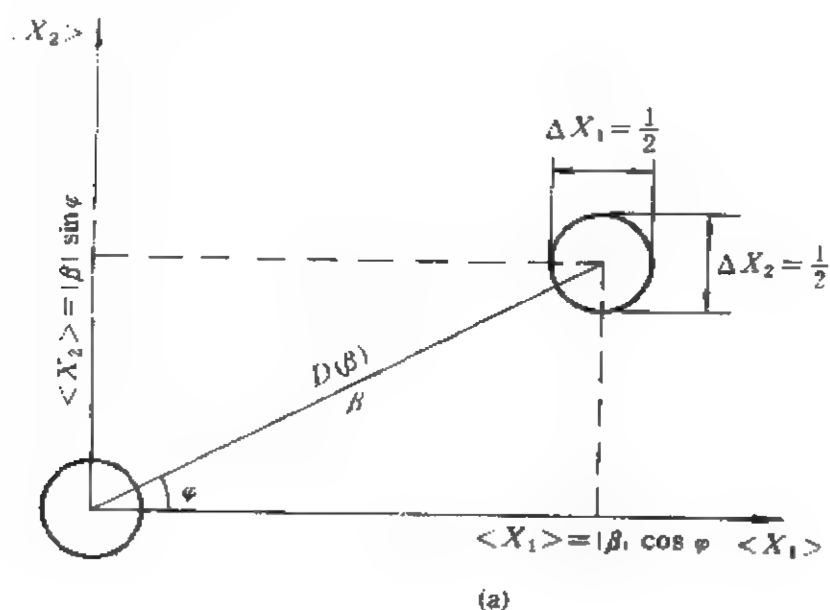
这也就是说，压缩算符 $S(\xi)$ 的作用不仅使光场的两正交分量的不确定度由相干态时的圆形变为椭圆形，而且 ΔX_1、ΔX_2 的中心也发生了移动. 图 2.2.1(c)显示的是 $\theta\neq0$ 的普遍情形，在这种情形下我们看到，虽然由 ΔX_1、ΔX_2 描述的图形仍为一椭圆，但这时椭圆的长轴和短轴并不分别与 X_1、X_2 轴平行，并且由(2.2.32)和(2.2.33)式可知，椭圆的中心位置由 $|\beta|$、φ、r 和 θ 的数值决定.

可见图 2.2.1 是对处于压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 的光场的量子噪声压缩情况的一种直观描述. 对于相干态 $|\beta\rangle$ 而言，图 2.2.1(a)表明，光场的不确定度实际上是将真空时的噪声圆通过平移算符 $D(\beta)$ 的作用而平移了一个复振幅 β，量子噪声情况不变. 图 2.2.1(b—c)则表明处于压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 的光场，由于压缩算符 $S(\xi)$ 的作用，把相干态的噪声圆压缩成椭圆，使得量子噪声在一个方向上减小，而在另一个方向上增大.

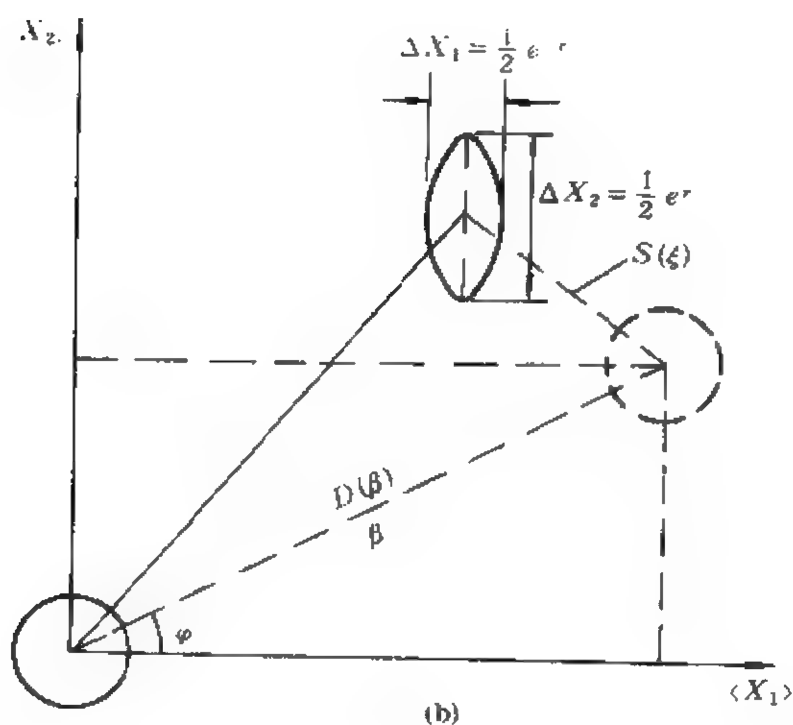
此外，由(2.2.30)和(2.2.31)式还可知，$(\Delta X_1)^2$、$(\Delta X_2)^2$ 满足的不确定关系为

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2=\frac{1}{16}(\sin^2\theta\cosh^2 2r+\cos^2\theta) \qquad (2.2.42)$$

显然，只有 $\theta=0, \pi$ 时，上式才为最小不确定关系. 而 $\theta=\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，上式则有极大值：



(a)



(b)

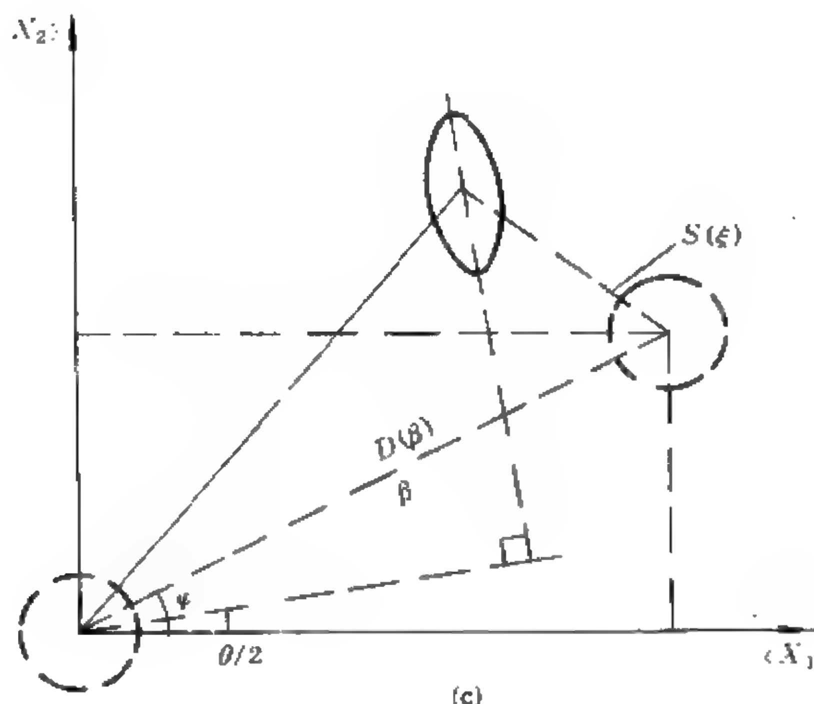


图 2.2.[illegible] 处于相干态 $|\beta\rangle$ 和压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 光场的两正交分量在 X_1-X_2 相空间的数值及涨落范围

(a) 处于相干态 $|\beta\rangle$ 时的情况

(b) 处于压缩相干态且 $\theta=0$ 时的情况

(c) 处于压缩相干态而 $\theta\neq0$ 时的情况

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2=\cosh^2 2r/16 \tag{2.2.43}$$

这就是说，对于压缩相干态而言，它并不一定是最小不确定态. 因此一般地，我们将光场的某一分量的量子涨落小于相干态中相应分量的涨落的量子态称为光场的压缩态. 不过，对于压缩相干态而言，如果我们引入与(2.2.2)式不同的光场的另一对正交算符 Y_1，Y_2，它们满足

$$\begin{aligned} Y_1&=\frac{1}{2}(ae^{-i\xi}+a^+e^{i\xi}) \\ Y_2&=\frac{1}{2i}(ae^{-i\xi}-a^+e^{i\xi}) \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

那么即使在 $\theta\neq0,\pi$ 的情形下，我们也可使得它们的量子涨落满足最小不确定关系，即

$$(\Delta Y_1)^2(\Delta Y_2)^2=1/16 \tag{2.2.45}$$

下面来讨论这一点. 利用(2.2.44),(2.2.16)—(2.2.18)以及(2.2.26)式容易得到

$$\begin{aligned}(\Delta Y_1)^2&=\frac{1}{8}[e^{2r}+e^{-2r}-(e^{2r}-e^{-2r})\cos(\theta-2\zeta)]\\(\Delta Y_2)^2&=\frac{1}{8}[e^{2r}+e^{-2r}+(e^{2r}-e^{-2r})\sin(\theta-2\zeta)]\end{aligned} \tag{2.2.46}$$

很明显,当 $\zeta=\theta/2$ 时,(2.2.46)式变为

$$\begin{aligned}(\Delta Y_1)^2&=\frac{1}{4}e^{-2r}\\(\Delta Y_2)^2&=\frac{1}{4}e^{2r}\end{aligned} \tag{2.2.47}$$

当 $\zeta=\theta/2+\pi/2$ 时,$(\Delta Y_1)^2$,$(\Delta Y_2)^2$ 简化为

$$\begin{aligned}(\Delta Y_1)^2&=\frac{1}{4}e^{2r}\\(\Delta Y_2)^2&=\frac{1}{4}e^{-2r}\end{aligned} \tag{2.2.48}$$

在这种情况下,θ 均可取任意值,而$(\Delta Y_1)^2$,$(\Delta Y_2)^2$ 都满足最小不确定关系式(2.2.45)式. 这是因为 Y_1,Y_2 和 X_1,X_2 之间有如下关系式:

$$\begin{aligned}Y_1&=X_1\cos\zeta+X_2\sin\zeta\\Y_2&=-X_1\sin\zeta+X_2\cos\zeta\end{aligned} \tag{2.2.49}$$

它只是将相空间 X_1-X_2 逆时针旋转 ζ 角以后而形成的新的 Y_1-Y_2 相空间. 相应地,压缩算符 $S(\xi)$中的相位角变为 $\theta'=\theta-2\zeta$. 从这种意义上讲,压缩相干态在 $\zeta=\theta/2$ 或 $\theta/2+\pi/2$ 时是光场 Y_1,Y_2 两正交分量的最小不确定态,此时对于任意的 θ,总可以找到满足最小不确定关系的光场两正交分量算符 Y_1,Y_2. 图 2.2.1(c)给出的也是 $\zeta=\theta/2$ 时,处于压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 光场的两正交分量在 Y_1-Y_2 相空间的描述

3. 粒子数表象和相干态表象中压缩相干态的态函数

在(2.2.28)式中,我们已给出了压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 的一般表

示，下面看看它在粒子数表象中的形式.

利用粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$的完备性，首先将压缩相干态$|\beta\rangle_g$展开为

$$|\beta\rangle_g=\sum_{n=0}^{\infty}C_n|n\rangle \tag{2.2.50}$$

这里为书写简单起见，我们仍按(2.2.26)式，令$\mu=\cosh r$，$\nu=e^{i\theta}\sinh r$，将(2.2.11)和(2.2.50)式一并代入(2.2.13)式，即得

$$\mu\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sqrt{n}\,|n-1\rangle+\nu\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle=\beta\sum_{n=0}^{\infty}C_n|n\rangle$$

由粒子数态矢集的正交性，容易得到概率幅C_n满足

$$\mu C_1=\beta C_0 \tag{2.2.51}$$

$$\mu C_2\sqrt{2}+\nu\sqrt{1}\,C_0=\beta C_1 \tag{2.2.52}$$

$$\cdots\cdots$$

一般地有

$$\mu C_n\sqrt{n}+\nu C_{n-2}\sqrt{n-1}=\beta C_{n-1} \tag{2.2.53}$$

对(2.2.53)式作变数代换，令

$$C_n=A_n(n!)^{-1/2}(\nu/2\mu)^{n/2} \tag{2.2.54}$$

则(2.2.53)式化为

$$A_n-2\beta(2\mu\nu)^{-1/2}A_{n-1}+2(n-1)A_{n-2}=0 \tag{2.2.55}$$

显然，上式即为厄米多项式的递推公式：

$$H_n(z)-2zH_{n-1}(z)+2(n-1)H_{n-2}(z)=0 \tag{2.2.56}$$

式中

$$H_n(z)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m n!\,(2z)^{n-2m}}{m!\,(n-2m)!}=(-1)^n\exp(z^2)\frac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2)$$

因而，满足(2.2.55)式的A_n为

$$A_n = CH_n(\beta/\sqrt{2\mu\nu})$$

其中 C 为待定常数，因此(2.2.54)式给出

$$C_n = CH_n(\beta/\sqrt{2\mu\nu})\frac{1}{\sqrt{n!}}(\nu/2\mu)^{n/2} \quad (2.2.57)$$

由于 $n=0$ 时，$H_0(\beta/\sqrt{2\mu\nu})=1$，所以 $C=C_0$. 从而

$$|\beta\rangle_g = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}H_n(\beta/\sqrt{2\mu\nu})(\nu/2\mu)^{n/2} \quad (2.2.58)$$

考虑到归一化条件${}_g\langle\beta|\beta\rangle_g=1$，则有

$$|C_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left|\frac{\nu}{2\mu}\right|H_n(\beta/\sqrt{2\mu\nu})H_n(\beta^*/\sqrt{2\mu^*\nu^*})=1$$

$$(2.2.59)$$

再利用厄米多项式 $H_n(z)$满足的关系式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n H_n(x)H_n(y)=(1-t^2)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2xyt-(x^2-y)^2t^2}{1-t^2}\right\}$$

$$(2.2.60)$$

则(2.2.59)式可简化为

$$|C_0|^2=\frac{1}{|\mu|}\exp\left\{-|\beta|^2+\frac{\nu^*\beta^2}{2\mu}+\frac{\nu\beta^{*2}}{2\mu^*}\right\} \quad (2.2.61)$$

如果让 C_0 选取适当的相因子，使得

$$\frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2=\frac{\nu}{2\mu^*}\beta^{*2}$$

则归一化常数 C_0 为

$$C_0=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\exp\left\{-\frac{1}{2}|\beta|^2+\frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2\right\}$$

最后我们得到粒子数表象中压缩相干态的表达式为

$$|\beta\rangle_g=\sum_{n=0}^{\infty}(n!\ \ \mu)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}|\beta|^2+\frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2\right\}H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)|n\rangle \tag{2.2.62}$$

可以看出，此时光子数分布函数为

$$|C_n|^2=\frac{1}{n!}\frac{1}{|\mu|}\left|\frac{\nu}{2\mu}\right|^n\exp\left\{-|\beta|^2+\frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2+\frac{\nu}{2\mu^*}\beta^{*2}\right\}\times H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu^*\nu^*}}\right) \tag{2.2.63}$$

它不再是相干态情况下的泊松分布形式，可见压缩相干态具有与相干态不同的统计特性.

下面再讨论压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 在相干态表象中的形式. 在(2.2.62)式中应用

$$\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha=1$$

则得

$$\begin{aligned}|\beta\rangle_g&=\frac{1}{\pi}\sum_n\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}|\beta|^2+\frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2\right\}\\&\quad\times H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)\int d^2\alpha\langle\alpha|n\rangle|\alpha\rangle\\&=\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|\alpha\rangle\left[\sum_n\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{(\alpha^*)^n}{n!}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\right.\\&\quad\left.\times\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2+\frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2+\frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2\right)\\&\quad\times\int d^2\alpha\exp\left(-\frac{\nu}{2\mu}\alpha^*+\frac{\nu^*\beta}{\mu}-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)|\alpha\rangle\end{aligned} \tag{2.2.64}$$

这里已利用了关系式

$$\exp(-t^2+2tz)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(z)t^n/n!$$

现在我们来讨论压缩相干态$|\beta\rangle_g$的正交性与完备性问题.同相干态一样,压缩相干态也是非正交的.这是因为,由(2.2.62)式可以得到

$$
\begin{aligned}
{}_g\langle\beta|\beta_0\rangle_g &= \langle\beta,\mu,\nu|\beta_0,\mu_0,\nu_0\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{\sqrt{\mu^*\mu_0}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu^*\nu_0}{\mu^*\mu_0}}\right)^n H_n\left(\frac{\beta^*}{\sqrt{2\mu^*\nu^*}}\right)H_n\left(\frac{\beta_0}{\sqrt{2\mu_0\nu_0}}\right) \\
&\quad\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\beta_0|^2)+\frac{\nu_0^*}{2\mu_0}\beta^2+\frac{\nu}{2\mu^*}\beta^{*2}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}(|\beta_0|^2-|\beta|^2)+\frac{\nu_0^*}{2\mu_0}\beta_0^2+\frac{\nu}{2\mu^*}\beta^{*2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu^*-\nu_0\nu^*}} \\
&\quad\times\exp\left\{\frac{\beta^*\beta_0-\dfrac{\nu^*}{2\mu_0}\beta_0^2-\dfrac{\nu_0}{2\mu^*}\beta^{*2}}{\mu_0\mu^*-\nu_0\nu^*}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0^*-\nu\nu_0^*}}\exp\left\{-\frac{1}{2}|\beta_0|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2-\frac{\beta^*\beta_0}{\mu^*\mu_0-\nu^*\nu_0}\right. \\
&\quad\left.+\frac{\beta_0^2(\mu^*\nu_0^*-\nu^*\mu_0^*)}{2(\mu^*\mu_0-\nu^*\nu_0)}+\frac{\beta^{*2}(\nu\mu_0-\nu_0\mu)}{2(\mu^*\mu_0-\nu^*\nu_0)}\right\}\neq 0
\end{aligned}
\tag{2.2.65}
$$

其中已利用了(2.2.9)和(2.2.60)式.上式表明,对应于不同的β、μ、ν的任意两压缩相干态并不正交.特别地,当$\mu=\mu_0$,$\nu=\nu_0$时,即对不同的相干态进行相同的压缩后,所得到的两压缩相干态的内积为

$$
\langle\beta,\mu,\nu|\beta_0,\mu_0,\nu_0\rangle=\exp\left\{-\frac{1}{2}|\beta-\beta_0|^2\right\}=\langle\beta|\beta_0\rangle \tag{2.2.66}
$$

这说明对相干态矢集$\{|\beta\rangle\}$进行相同的压缩后所得到的压缩相干态矢集$\{|\beta,\mu,\nu\rangle\}$,它们的正交性质与相干态矢集相同,而与$\mu$、$\nu$这两个反映压缩程度和压缩方向的因子无关.

关于压缩相干态矢集完备性的讨论,可以按与推导相干态矢集完备性性质相似的步骤进行.利用(2.2.28)式,可得

$$\int d^2\beta|\beta\rangle_{gg}\langle\beta|=\int|\beta,\mu,\nu\rangle\langle\beta,\mu,\nu|d^2\beta=S(\xi)\int d^2\beta|\beta\rangle\langle\beta|S^+(\xi)=\pi$$

(2.2.67)

其中利用了$\int d^2\beta|\beta\rangle\langle\beta|=\pi$和$S(\xi)S^+(\xi)=1$. 这说明压缩相干态矢集和相干态矢集一样,也具有超完备性,换句话说,压缩算符对相干态矢集的作用并没有改变其超完备性. 因而压缩相干态矢集的完备性关系可表为

$$I=\frac{1}{\pi}\int d^2\beta|\beta\rangle_{gg}\langle\beta| \tag{2.2.68}$$

这个关系可用于压缩相干态表象中对任意的态矢和算符的表示中.

4. 压缩相干态光场的相干性

从第二篇第一章我们知道,光子的反聚束效应是光场的一类非经典属性,那么处于压缩相干态这一非经典的量子态的光场,它是否也展现反聚束效应呢? 下面来讨论这一问题.

对于压缩相干态$|\beta\rangle_g$而言,由(2.2.13),(2.2.15)和(2.2.26)式可得

$$\begin{aligned}\langle a^+a\rangle&={}_g\langle\beta|(b^+\cosh r-be^{-i\theta}\sinh r)(b\cosh r-b^+e^{i\theta}\sinh r)|\beta\rangle_g\\&=|\beta|^2[\cosh 2r-\cos(\theta-2\varphi)\sinh 2r]+\sinh^2 r\end{aligned} \tag{2.2.69}$$

$$\begin{aligned}\langle(a^+)^2a^2\rangle&={}_g\langle\beta|(b^+\cosh r-be^{-i\theta}\sinh r)^2(b\cosh r-b^+e^{i\theta}\sinh r)^2|\beta\rangle_g\\&=|\beta|^4[\cosh 2r-\cos(\theta-2\varphi)\sinh 2r]^2\\&\quad+|\beta|^2[4\sinh^2 r(\sinh^2 r+2\cosh^2 r)-\cosh^2 r\sinh 2r\cos(\theta\\&\quad-2\varphi)-5\sinh^2 r\sinh 2r\cos(\theta-2\varphi)]\\&\quad+\sinh^2 r(2\sinh^2 r+\cosh^2 r)\end{aligned} \tag{2.2.70}$$

那么,反映光场强度关联的二阶相干度为

$$g^{(2)}(0)=\frac{\langle(a^+)^2a^2\rangle}{\langle a^+a\rangle^2}=1+\frac{\langle(a^+)^2a^2\rangle-\langle a^+a\rangle^2}{\langle a^+a\rangle^2}$$

$$=1+\{\sinh^2 r\cosh 2r+|\beta|^2\{2\sinh^2 r[\cosh 2r-\sin 2r\cos(\theta-2\varphi)]$$

$$\times\sinh 2r[\sinh 2r-\cosh 2r\cos(\theta-2\varphi)]\}\}/\{|\beta|^2[\cosh 2r$$

$$-\sinh 2r\cos(\theta-2\varphi)]+\sinh^2 r\}^2$$

$$=1+\{\sinh^2 r\cosh 2r+2\sinh r\cosh 3r|\beta|^2[\tanh 3r-\cos(\theta-2\varphi)]\}/$$

$$\{|\beta|^2[\cosh 2r-\sinh 2r\cos(\theta-2\varphi)]+\sinh^2 r\}^2 \qquad (2.2.71)$$

从上式看到，当 $g^{(2)}(0)>1$ 时，压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 中的光子是聚束的；$g^{(2)}(0)=1$ 时，光子是随机的；如果 $g^{(2)}(0)<1$，则光场的光子呈现出反聚束效应.

下面我们从(2.2.71)式出发，来讨论压缩参数 r,θ 对光场二阶相干性质的影响. 如果选取 θ 使 $\theta-2\varphi=0$，则(2.2.71)式简化为

$$g^{(2)}(0)=1+\frac{\sinh^2 r\cosh 2r-2|\beta|^2 e^{-3r}\sinh r}{[|\beta|^2 e^{-2r}+\sinh^2 r]^2} \qquad (2.2.72)$$

显然，若 r 满足 $|\beta|^2<\frac{1}{2}e^{3r}\sinh r\cosh 2r$ 时，则 $g^{(2)}(0)>1$，此时光场的光子是聚束的，而当 $|\beta|^2=\frac{1}{2}e^{3r}\sinh r\cosh 2r$ 时，$g^{(2)}(0)=1$，这时光场的光子是随机的. 但值得指出的是，此时由(2.2.63)式可知，光场并不是泊松分布，也就是说，它的光子数分布与相干态时的光子数分布并不相同. 而如果 r 满足 $|\beta|^2>\frac{1}{2}e^{3r}\times\sinh r\cosh 2r$ 时，此时 $g^{(2)}<1$，这说明在这种情况下，光场的光子呈现出反聚束效应.

如果选取 θ 满足 $\theta-2\varphi\neq 0$，由(2.2.71)式可以发现，当 r,θ 之间满足

$$\cos(\theta-2\varphi)>\frac{\sinh r\cosh 2r+2\sinh 3r|\beta|^2}{2\cosh 3r|\beta|^2} \qquad (2.2.73)$$

时，压缩相干态 $|\beta\rangle_g$ 中的光子是反聚束的. 其他情况下，$|\beta\rangle_g$ 中的光子则是聚束的或是随机的. 同时，比较(2.2.73)和(2.2.39)式可以发现，即使在 $\varphi=0$ 时，$|\beta\rangle_g$ 展现出光场的两正交分量的压缩效应和光子的反聚束效应的条件并不相同，这也就是说，光场的压缩效应和光子的反聚束效应这两个非经典效应是彼此独立的，它们都是光场量子特性的反映.

最后值得指出的是，1981 年 C. M. Caves 在分析引力波的测

量时，给出了压缩相干态的另一种定义：

$$|\alpha\rangle_g = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle \tag{2.2.74}$$

式中 $D(\alpha)$ 是与(2.2.29)式形式相同的平移算符，$S(\zeta)$ 为光场的压缩算符. 比较(2.2.28)和(2.2.74)式可知，这两种定义显然是不同的，因为平移算符 D 和压缩算符 S 两者并不是可对易的，它们分别对应于不同的物理过程：(2.2.28)式表示采用某种过程(如简并参量放大过程)将相干态场 $|\beta\rangle$ 变换为压缩相干态场 $|\beta\rangle_g$[如图2.2.1(c)所示]，而 $|\alpha\rangle_g$(2.2.74)式则代表对诸如引力波振子进行量子非破坏测量时，先使振子处于压缩真空态，然后因引力场作用发生平移而形成压缩相干态(如图 2.2.2 所示). 但是可以证明 D

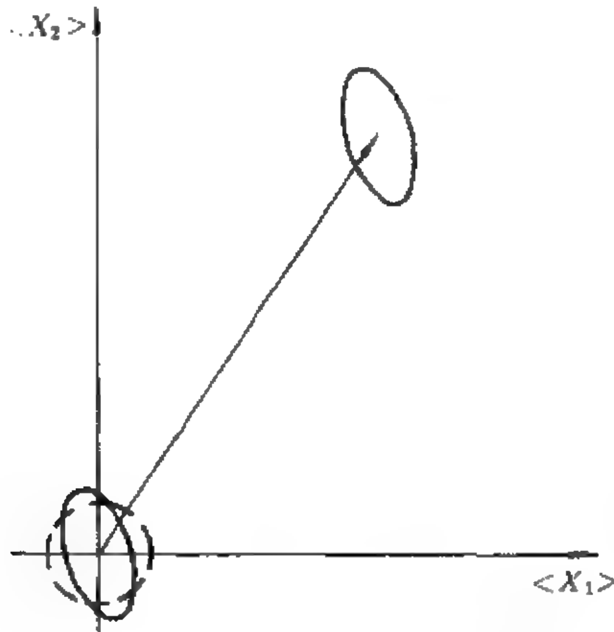


图 2.2.2 由(2.2.74)式描述的压缩相干态光场的两正交分量在 X_1-X_2 空间的数值及涨落范围示意图

和 S 这两个算符在适当地变换参数后，可交换位置. 这是因为

$$S(\xi)D(\alpha) = S(\xi)D(\alpha)S^{+}(\xi)S(\xi) = D(\beta)S(\xi) \tag{2.2.75}$$

式中

$$\beta = \alpha\cosh r - \alpha^{*}e^{i\theta}\sinh r \tag{2.2.76}$$

可见这两种压缩相干态光场的某一正交分量展现的压缩效应是相同的. 然而可以证明,这两种光场中光子的反聚束效应出现的条件以及反聚束的程度是不同的.

二、压缩真空态

下面我们来讨论压缩真空态这一在实验中已经制备出来的非经典光场. 压缩真空态的定义为

$$|0\rangle_g = S(\xi)|0\rangle \qquad (2.2.77)$$

与压缩相干态 $|\beta\rangle_g$(或 $|\alpha\rangle_g$)相比,这里只须令 $\beta=0$(或 $\alpha=0$). 这就是说,压缩真空态是由压缩算符 $S(\xi)$ 对真空场作用后形成的,它使得光场的某一正交分量的量子噪声减小,而另一分量的涨落增大. 考虑到厄米多项式的性质:

$$H_{2n}(0)=(-1)^n(2n!)/n!, \qquad H_{2n+1}(0)=0 \quad (2.2.78)$$

那么在粒子数表象中,压缩真空态的态函数可以由(2.2.62)式简化得到:

$$|0\rangle_g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \frac{(-e^{i\theta}\tanh r)^n (2n!)^{\frac{1}{2}}}{n! \quad 2^n} |2n\rangle \quad (2.2.79)$$

上式表明,压缩真空态是由仅包含偶数个光子的 Fock 态叠加而成的. 不同压缩真空态的内积为

$${}_g\langle 0'|0\rangle_g = \langle 0, r', \theta | 0, r, \theta\rangle = \operatorname{sech}^{1/2}(r-r') \quad (2.2.80)$$

可见压缩真空态与压缩相干态一样也是非正交的.

压缩真空态光场的二阶相干度可由(2.2.71)式直接得到. 在这里只须令 $|\beta|=0$, 则

$$g^{(2)}(0)=1+\cosh 2r/\sinh^2 r = 3+1/\langle n\rangle > 1 \quad (2.2.81)$$

式中 $\langle n\rangle=\sinh^2 r$ 为压缩真空态场的平均光子数. 显然,单模压缩真空态场展现出比单模热光场更强的光子聚束效应,而不出现反

聚束效应.

第二节　双模光场的压缩态

前面讨论了单模光场的压缩相干态和压缩真空态的性质,这里我们再来介绍一下双模光场的压缩态.

与单模光场的压缩相干态的定义有两种一样,频率为 ω_+ 和 ω_- 的双模光场的压缩相干态也有如下的两种定义:

$$|\beta_+,\beta_-,\xi\rangle=S_{+-}(\xi)D_+(\beta_+)D_-(\beta_-)|0\rangle \quad (2.2.82)$$

$$|\alpha_+,\alpha_-,\xi\rangle=D_+(\alpha_+)D_-(\alpha_-)S_{+-}(\xi)|0\rangle \quad (2.2.83)$$

这里算符 D_+,D_-,S_{+-} 分别表示为

$$D_\pm(\alpha_\pm)=\exp(\alpha_\pm a_\pm^+-\alpha_\pm^* a_\pm) \quad (2.2.84)$$

$$D_\pm(\beta_\pm)=\exp(\beta_\pm a_\pm^+-\beta_\pm^* a_\pm) \quad (2.2.85)$$

$$S_{+-}(\xi)=\exp(\xi^* a_+a_--\xi a_+^+a_-^+) \quad (2.2.86)$$

式中 $a_+(a_-)$,$a_+^+(a_-^+)$分别表示频率为 $\omega_+(\omega_-)$的湮没、产生算符,它们满足对易关系:

$$[a_\pm,a_\pm^+]=1,[a_\pm,a_\mp]=[a_\pm,a_\mp^+]=0$$

很显然,D_+ 和 D_- 分别表示频率为 ω_+ 和 ω_- 的光场的平移算符,它们与单模光场的平移算符具有完全相同的性质. 将 $S_{+-}(\xi)$与单模光场的压缩算符 $S(\xi)$相比可以看到,$S_{+-}(\xi)$已含有双模场的算符 a_+ 和 a_-^+,此外,ξ 前的因子也相差 1/2. 因此称 $S_{+-}(\xi)$为双模压缩算符.

利用(2.2.24)式容易证明

$$b_\pm=S_{+-}(\xi)a_\pm S_{+-}^+(\xi)=a_\pm\cosh r+a_\mp^+e^{i\theta}\sinh r \quad (2.2.87)$$

这里 $\xi=re^{i\theta}$. 显然上式与(2.2.25)式相似. 利用(2.2.87)式和(2.2.81)式可得

$$b_{\pm}|\beta_{+},\beta_{-},\xi\rangle = S_{+-}(\xi)a_{\pm}S^{\dagger}_{+-}(\xi)D_{+}(\beta_{+})D_{-}(\beta_{-})|0\rangle$$
$$= \beta_{\pm}|\beta_{+},\beta_{-},\xi\rangle \qquad (2.2.88)$$

可见，由(2.2.82)式定义的双模压缩相干态$|\beta_{+},\beta_{-},\xi\rangle$是算符$b_{+}$($b_{-}$)的本征值为$\beta_{+}$($\beta_{-}$)的本征态. 因此，对于由(2.2.82)式定义的双模压缩相干态来说，光场任一模的两正交分量所具有的压缩性质与由(2.2.22)式定义的单模相干态光场的压缩性质完全相同. 同(2.2.75)式一样，利用(2.2.87)式我们也可以证明$D_{\pm}(\beta_{\pm})$与$D(\alpha_{\pm})$之间满足

$$D_{\pm}(\beta_{\pm}) = S^{\dagger}_{+-}(\xi)D(\alpha_{\pm})S_{+-}(\xi) \qquad (2.2.89)$$

式中$\beta_{\pm}$与$\alpha_{\pm}$满足如下关系式：

$$\beta_{\pm} = \alpha_{\pm}\cosh r - \alpha^{*}_{\mp}e^{i\theta}\sinh r \qquad (2.2.90)$$

因而双模压缩相干态的两种定义式可以在形式上化为一致. 下面，为计算简单起见，我们以(2.2.83)式定义的双模压缩相干态为例来讨论双模光场的压缩特性.

对于双模光场而言，通常所感兴趣的光场两正交分量算符可定义为

$$U_1 = (a_{+} + a^{\dagger}_{+} + a_{-} + a^{\dagger}_{-})/2^{3/2} \qquad (2.2.91a)$$

$$U_2 = (a_{+} - a^{\dagger}_{+} + a_{-} - a^{\dagger}_{-})/(2^{3/2}i) \qquad (2.2.91b)$$

不难证明，它们满足对易关系：

$$[U_1, U_2] = i/2 \qquad (2.2.92)$$

因而U_1, U_2的量子涨落所满足的不确定关系式为

$$(\Delta U_1)^2(\Delta U_2)^2 \geqslant 1/16 \qquad (2.2.93)$$

与单模光场一样，对于双模光场，如果光场两正交分量的任一分量U_i的量子涨落满足

$$(\Delta U_i)^2 < 1/4 \qquad (i=1 \text{ 或 } 2) \qquad (2.2.94)$$

我们就说双模光场的第 i 个正交分量的量子噪声被压缩. 若光场由双模压缩相干态 $|\alpha_+,\alpha_-,\xi\rangle$ 描述，那么利用(2.2.83)和(2.2.87)式容易得到

$$\langle a_\pm\rangle=\alpha_\pm \tag{2.2.95}$$

$$\langle a_\pm^\dagger a_\pm\rangle=|\alpha_\pm|^2+\sinh^2 r \tag{2.2.96}$$

$$\langle a_+^\dagger a_-\rangle=\alpha_+^*\alpha_-,\langle a_-^\dagger a_+\rangle=\alpha_-^*\alpha_+ \tag{2.2.97}$$

$$\langle a_\pm a_\pm\rangle=\alpha_\pm^2 \tag{2.2.98}$$

$$\langle a_+a_-\rangle=\langle a_-a_+\rangle=\alpha_+\alpha_--\exp(i\theta)\sinh r\cosh r \tag{2.2.99}$$

由(2.2.95)—(2.2.99)式可以看到，压缩算符 $S_{+-}(\xi)$ 仅仅对光场每一模的平均光子数 $\langle a_\pm^\dagger a_\pm\rangle$ 和两模间非对角元 $\langle a_+a_-\rangle$ 和 $\langle a_-a_+\rangle$ 的期望值有影响. 利用(2.2.95)—(2.2.99)式可得光场 U_1 分量的量子涨落值为

$$\begin{aligned}(\Delta U_1)^2&=\langle U_1^2\rangle-\langle U_1\rangle^2\\&=\frac{1}{4}\left[\exp(-2r)\cos^2\frac{\theta}{2}+\exp(2r)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\end{aligned} \tag{2.2.100}$$

这个量子涨落值与单模压缩相干态的涨落值(2.2.30)式完全相同. 因此双模压缩相干态光场与单模压缩相干态光场的量子涨落性质完全相同. 特别值得指出的是，(2.2.100)式表明，$(\Delta U_1)^2$ 的值与 α_+,α_- 无关，也就是与双模光场的各分量的场振幅值无关.

如果在(2.2.83)式中令 $\alpha_+=\alpha_-=0$，这时双模压缩相干态就变为双模压缩真空态，双模压缩真空态可表示为

$$|0,0,\xi\rangle=S_{+-}(\xi)|0\rangle \tag{2.2.101}$$

在这种情况下，光场各模的平均光子数为

$$\langle a_\pm^\dagger a_\pm\rangle=\sinh^2 r \tag{2.2.102}$$

它与单模压缩真空态光场的平均光子数也完全相同.

现在我们再讨论双模压缩真空场的二阶相干性质. 利用(2.2.87)和(2.2.101)式可得

$$\langle (a_{\pm}^{\dagger})^2 a_{\pm}^2 \rangle = \langle 0| S_{+-}^{\dagger}(\xi)(a_{\pm}^{\dagger})^2 a_{\pm}^2 S_{+-}(\xi)|0\rangle = 2\sinh^4 r \tag{2.2.103}$$

$$\langle a_{+}^{\dagger} a_{-}^{\dagger} a_{+} a_{-} \rangle = \langle 0|S_{+-}^{\dagger}(\xi) a_{+}^{\dagger} a_{-}^{\dagger} a_{+} a_{-} S_{+-}(\xi)|0\rangle = 2\sinh^4 r + \sinh^2 r \tag{2.2.104}$$

这样由(2.2.102)和(2.2.103)式,得到双模压缩真空态场的各模的二阶相干度为

$$g_1^{(2)}(0) = \frac{\langle (a_1^{\dagger})^2 a_1^2 \rangle}{\langle a_1^{\dagger} a_1 \rangle^2} = 2 = g_2^{(2)}(0) \tag{2.2.105}$$

这说明,双模压缩真空态场中每一模的光子是聚束的,且 $g_1^{(2)}(0)$, $g_2^{(2)}(0)$ 与双模热光场中相应的二阶相干度[(2.1.80)式]是相等的. 但这里的 $g_1^{(2)}(0)$, $g_2^{(2)}(0)$ 均小于单模压缩真空场的二阶相干度[(2.2.81)式],这也就是说,双模压缩真空场中光场每模的光子聚束程度比单模压缩真空态场的光子聚束程度要弱. 由(2.1.46)和(2.2.104)式得知,双模压缩真空态场的两模间的相干度为

$$g_{12}^{(2)}(0) = \frac{\langle a_{+}^{\dagger} a_{-}^{\dagger} a_{+} a_{-} \rangle}{\langle a_{+}^{\dagger} a_{+} \rangle \langle a_{-}^{\dagger} a_{-} \rangle} = 2 + \frac{1}{\sinh^2 r} > 1 \tag{2.2.106}$$

可见,双模压缩真空态场中,光场两模的光子是相关的,并且满足

$$[g_{12}^{(2)}(0)]^2 > g_1^{(2)}(0) g_2^{(2)}(0) \tag{2.2.107}$$

这说明,光场两模的光子之间的相关是一种非经典相关.

为进一步了解双模压缩真空场的二阶相干性质,我们来求粒子数表象中双模压缩真空态的态函数. 这里先证明一个算符恒等式. 如果算符 A, B 和 C 之间满足

$$[A,B] = C = C^{+}, [A,C] = 2A, [B,C] = -2B \tag{2.2.108}$$

那么就有恒等式

$$\exp[r(Ae^{-i\theta}-Be^{i\theta})]$$
$$=\exp(-Be^{i\theta}\tanh r)\exp[-C\ln(\cosh r)]\exp(Ae^{-i\theta}\tanh r) \tag{2.2.109}$$

成立.现证明如下：

令

$$U_1(\lambda)=\exp\{\lambda[r(e^{-i\theta}A-Be^{i\theta})+i\varepsilon C]\} \tag{2.2.110}$$

$$U_2(\lambda)=\exp[P_1(\lambda)B]\exp[P_0(\lambda)C]\exp[P_2(\lambda)A] \tag{2.2.111}$$

式中 λ 为一任意实参数，$P_j(\lambda)(j=0,1,2)$ 为 λ 的函数，ε 　　 λ 无关的实常数.显然 $U_1^\dagger(\lambda)=U_1^{-1}(\lambda)$.如果能够选择合适的 $P_j(\lambda)$ $(j=0,1,2)$，使得

$$U_1(\lambda)=U_2(\lambda) \tag{2.2.112}$$

成立，那么在 $\lambda=1,\varepsilon=0$ 时就可证明(2.2.109)式.

将(2.2.112)式两边对 λ 求导，得

$$[r(e^{-i\theta}A-e^{i\theta}B)+i\varepsilon C]U_1=[r(e^{-i\theta}A-e^{i\theta}B)+i\varepsilon C]U_2$$
$$=P_1'B\exp(P_1B)\exp(P_0C)\exp(P_2A)+P_0'\exp(P_1B)C\exp(P_0C)$$
$$\times\exp(P_2A)+P_2'\exp(P_1B)\exp(P_0C)A\exp(P_2A) \tag{2.2.113}$$

其中 P_i' 表示 $\dfrac{dP_i}{d\lambda}$，在上式两端右乘

$$U_2^{-1}(\lambda)=\exp(-P_2A)\exp(-P_0C)\exp(-P_2B)$$

则(2.2.113)式化为

$$r(e^{-i\theta}A-e^{i\theta}B)+i\varepsilon C=P_1'B+P_0'\exp(P_1B)C\exp(-P_1B)$$
$$+P_2'\exp(P_1B)\exp(P_0C)A\exp(-P_0C)\exp(-P_1B) \tag{2.2.114}$$

考虑到算符恒等式：

$$e^{tF}Ge^{-tF}=G+t[F,G]+\frac{t^2}{2!}[F,[F,G]]+\cdots$$

再利用(2.2.108)式可得

$$e^{tB}Ae^{-tB}=A-tC+t^2B \qquad (2.2.115a)$$

$$e^{tB}Ce^{-tB}=C-2tB \qquad (2.2.115b)$$

$$e^{tC}Ae^{-tC}=e^{-2t}A \qquad (2.2.115c)$$

将(2.2.115)式代入(2.2.114)式，则有

$$\begin{aligned}r(e^{-i\theta}A-e^{i\theta}B)+i\varepsilon C&=P_1B+P_0'(C-2P_1B)+P_2'\exp(-2P_0)\\&\quad\times(A-P_1C+P_1^2B)=P_2'\exp(-2P_0)A+[P_0'-P_1P_2'\\&\quad\times\exp(-2P_0)]C+[P_1'+P_1^2P_2'\exp(-2P_0)-2P_1P_0']B\end{aligned} \qquad (2.2.116)$$

要使上式恒成立，须使得

$$P_2'\exp(-2P_0)=re^{-i\theta} \qquad (2.2.117a)$$

$$P_0'-P_1P_2'\exp(-2P_0)=i\varepsilon \qquad (2.2.117b)$$

$$P_1'-2P_1P_0'+P_1^{2\prime}\exp(-2P_0)=-re^{i\theta} \qquad (2.2.117c)$$

注意到 $\lambda=0$ 时，$U_1(0)=1=U_2(0)$，因此

$$P_j(0)=0 \qquad (j=0,1,2) \qquad (2.2.118)$$

将(2.2.117a)式代入(2.2.117b)式，得到

$$P_0'-P_1re^{-i\theta}=i\varepsilon \qquad (2.2.119)$$

再将(2.2.117a)和(2.2.119)式一并代入(2.2.117c)式，就得到 P_1 所满足的微分方程：

$$P_1'-2i\varepsilon P_1-re^{-i\theta}P_1^2=-re^{i\theta} \qquad (2.2.120)$$

这是一个一阶非线性微分方程. 对上式作变量代换，令

$$P_1(\lambda)=-\frac{e^{i\theta}}{r}\frac{u'(\lambda)}{u(\lambda)} \qquad (2.2.121)$$

则(2.2.120)式转化为

$$u''-2i\varepsilon u'-r^2u=0 \tag{2.2.122}$$

它是一个二阶线性常系数微分方程. 考虑到 $P_1(0)=0$ 时, 有 $u'(0)=0$, 因而方程(2.2.122)式的解为

$$u(\lambda)=E\{\exp[-(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}-i\varepsilon)\lambda]+\frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}-i\varepsilon}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}+i\varepsilon}\times\exp[(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}+i\varepsilon)\lambda]\} \tag{2.2.123}$$

再利用(2.2.121)和(2.2.123)式, 即可得

$$P_1(\lambda)=\frac{-re^{i\theta}\sinh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\cosh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)-i\varepsilon\sinh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)} \tag{2.2.124}$$

将(2.2.124)式代回(2.2.119)式, 并利用(2.2.118)式及积分公式

$$\int\frac{\alpha+\beta\cosh x+q\sinh x}{a+b\cosh x+c\sinh x}dx=\frac{qb-\beta c}{b^2-c^2}\ln(a+b\cosh x+c\sinh x)+\frac{\beta b-qc}{b^2-c^2}x+\left(\alpha-a\,\frac{\beta b-qc}{b^2-c^2}\right)\int\frac{dx}{a+b\cosh x+c\sinh x}\qquad(b^2\neq c^2)$$

可得 $P_0(\lambda)$ 为

$$P_0(\lambda)=-\ln[\cosh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)-\frac{i\varepsilon}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\sinh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)] \tag{2.2.125}$$

再将上式代入(2.2.117a)式, 并注意到

$$\int\frac{dx}{a\cosh x+b\sinh x}=\frac{1}{a^2-b^2}\frac{a\sinh x+b\sinh x}{a\cosh x+b\sinh x}+\text{常数}$$

以及(2.2.118)式, 就可求解出 $P_2(\lambda)$ 为

$$P_2(\lambda)=\frac{re^{-i\theta}\sinh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\cosh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)-i\varepsilon\sinh(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\lambda)} \tag{2.2.126}$$

这样, 我们就求解出了满足(2.2.112)式的 $P_j(\lambda)$. 令 $\lambda=1$, $\varepsilon=0$,

则有

$$\exp[r(Ae^{-i\theta}-Be^{i\theta})]$$
$$=\exp(-Be^{i\theta}\tanh r)\exp[-C\ln(\cosh r)]\exp(Ae^{-i\theta}\tanh r)$$

这就是所要证明的(2.2.109)式.

如果 $A=a_+a_-$,$B=a_+^\dagger a_-^\dagger$,$C=[A,B]=[a_+a_-,a_+^\dagger a_-^\dagger]=a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- +1$,那么由(2.2.109)式就有

$$\begin{aligned}S_{+-}(\xi)&=\exp(-a_+^\dagger a_-^\dagger e^{i\theta}\tanh r)\exp[-(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- +1)\\&\quad\times\ln(\cosh r)]\exp(a_+a_-e^{-i\theta}\tanh r)\\&=\frac{1}{\cosh r}\exp(-a_+^\dagger a_-^\dagger e^{i\theta}\tanh r)\exp[-(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-)\\&\quad\times\ln(\cosh r)]\exp(a_+a_-e^{i\theta}\tanh r)\end{aligned} \tag{2.2.127}$$

把上式代入(2.2.101)式,就可得到粒子数表象中双模压缩真空态的态函数为

$$|0,0,\xi\rangle=\frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(-e^{i\theta}\tanh r)^n|n,n\rangle \tag{2.2.128}$$

其中已应用了关系式:

$$\exp(a_+a_-)|0\rangle=1,\qquad \exp(a_\pm^\dagger a_\pm)|0\rangle=1$$
$$\exp(a_+^\dagger a_-^\dagger)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(a_+^\dagger a_-^\dagger)^n$$

从(2.2.128)式可以看到,双模压缩真空态是由那些在 a_+ 模和 a_- 模有相同粒子数的双模粒子数态矢集$\{|n,n\rangle\}$叠加的,并且每一基矢$|n,n\rangle$有 $2n$ 个光子,这一点与单模压缩真空态(2.2.79)式相似.但是仍有与单模压缩真空态情况不同的地方是,双模压缩真空态中光场每一模的基矢$|n\rangle$只有 n 个光子,因此双模压缩真空态中光场每一模的光子聚束程度要比单模压缩真空态场弱些.另外,从(2.2.128)式还可看到,双模压缩真空态的光子数分布为

$$P_{n_+,n_-}=\frac{\bar{n}^{n_+}}{(1+\bar{n})^{n_++1}}\delta_{n_+n_-} \tag{2.2.129}$$

这里$\bar{n}=\langle a_+^\dagger a_+\rangle=\langle a_-^\dagger a_-\rangle=\sinh^2 r$.而双模热光场的光子数分布为

$$P_{n_+,n_-}=\frac{\bar{n}_+^{n_+}}{(1+\bar{n}_+)^{n_++1}}\cdot\frac{\bar{n}_-^{n_-}}{(1+\bar{n}_-)^{n_-+1}} \qquad (2.2.130)$$

比较上述两式可知,双模压缩真空态中光场两模的光子数分布只有在$n_+=n_-$时才不为零,这说明光场两模的光子有极强的关联,而在双模热光场中,当$n_+\neq n_-$时,$P_{n_+,n_-}\neq 0$,因而双模压缩真空态光场的两模的光子间的相关程度要比热光场强.

第三节 辐射场的高阶压缩和振幅平方压缩

从前面的讨论知道,如果辐射场某正交分量的量子涨落小于相干态场(或真空场)相应分量的涨落,我们就说辐射场某一正交分量的量子噪声被压缩.下面,我们将介绍辐射场的另两类压缩——高阶压缩和振幅平方压缩.

一、辐射场的高阶压缩

对于一多模辐射场,可以将它表示成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t) \qquad (2.2.131)$$

这里$\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)$为辐射场的正频分量,$\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)$为辐射场的负频分量.对于一固定的探测器而言,它只能响应某一频带和一特定极化方向的场量,因此在以下的讨论中,我们认为光场只有某频带若干个模式,而且偏振矢量只有一个分量.这样就可以将(2.2.131)式写成如下的标量形式:

$$E^{(+)}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{[\boldsymbol{k}]}l(\boldsymbol{k})a_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \qquad (2.2.132)$$

式中a_k是波矢量为$\boldsymbol{k}$的模式的湮没算符,$[\boldsymbol{k}]$表示波矢量$\boldsymbol{k}$只能取探测器能响应的有限个值.ω为带中心的频率,$l(\boldsymbol{k})$的大小为

$$l(k)=\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}$$

从(2.2.132)式可得,$E^{(+)}$,$E^{(-)}$的对易关系满足

$$[E^{(+)},E^{(-)}]=\frac{1}{V}\sum_{\{k\}}|l(k)|^2=C \qquad (2.2.133)$$

这里 C 为一有限的正实数.

现定义辐射场的两厄米正交分量算符:

$$E_1=E^{(+)}e^{-i\varphi}+E^{(-)}e^{i\varphi} \qquad (2.2.134a)$$

$$E_2=E^{(+)}e^{-i(\varphi+\pi/2)}+E^{(-)}e^{i(\varphi+\pi/2)} \qquad (2.2.134b)$$

显然,它们满足对易关系式:

$$[E_1,E_2]=2iC \qquad (2.2.135)$$

根据海森伯不确定关系可知,E_1,E_2 的量子涨落之积满足

$$\langle(\Delta E_1)^2\rangle\langle(\Delta E_2)^2\rangle\geqslant C^2 \qquad (2.2.136)$$

这里 $\Delta E_i=E_i-\langle E_i\rangle(i=1,2)$. 如果存在某相位角 φ,使得

$$\langle(\Delta E_i)^2\rangle<C \qquad (i=1 \text{ 或 } 2) \qquad (2.2.137)$$

就称此辐射场的 E_i 分量被压缩到二阶. 很明显,(2.2.21)和(2.2.94)式只不过是上式的特例. 利用对易关系(2.2.135)式,压缩条件还可写成正规排列的形式:

$$\langle:(\Delta E_i)^2:\rangle=\langle(\Delta E_i)^2\rangle-C<0 \qquad (2.2.138)$$

这里":"表示辐射场的产生、湮没算符按正常序排列. 例如,由(2.2.2)式可知

$$\langle\Delta X_1^2\rangle=\frac{1}{4}(\langle a^+a\rangle+\langle aa^+\rangle+\langle a^{+2}\rangle+\langle a^2\rangle-\langle a+a^+\rangle^2)$$

因而

$$:(\Delta X_1^2): = \frac{1}{4}(2\langle a^+ a\rangle + \langle a^{+2}\rangle + \langle a^2\rangle - \langle a+a^+\rangle^2)$$
$$= \langle(\Delta X_1^2)\rangle - 1/4$$

注意到在(2.2.134a)式中，如果令 $\varphi\to\varphi+\pi/2$，那么 E_1 就变成了 E_2，因此以下为简单起见，我们只以辐射场的 E_1 分量为例，来讨论辐射场的高阶压缩.

现在将压缩的概念推广到 $2N$ 阶. 如果存在某角度 φ，使得 $\langle(\Delta E_1)^{2N}\rangle$ 小于相干态的相应量值，就称辐射场的量子噪声在 E_1 分量上被压缩到$2N$阶（$N=1,2,3,\cdots\cdots$）. 虽然这种定义也可以推广到 ΔE_1 的 $2N+1$ 阶矩，并且对于相干态而言，$\langle:(\Delta E_1)^{2N+1}:\rangle=0$，但是满足

$$\langle:(\Delta E_1)^{2N+1}:\rangle<0$$

的辐射场态并不一定是非经典的. 这是因为对处于某一态矢的辐射场而言，其奇数阶矩可能为正也可能为负，所以只有辐射场的 ΔE_1 的偶数阶矩的涨落才可以判定辐射场所处的态是经典的还是非经典的.

为展示压缩态的非经典特性，一种方便的方法是将该态中 ΔE_1 的偶数阶矩表示成正规排列的形式. 注意到对易关系(2.2.135)式，因此有算符恒等式：

$$\exp(xE_1)=\exp(xE^{(-)}e^{i\varphi})\exp(xE^{(+)}e^{-i\varphi})\exp(x^2C/2)$$

这里 x 为任意实参数. 利用上式可将指数算符 $\exp(x\Delta E_1)$的期望值写成

$$\langle\exp(x\Delta E_1)\rangle=\langle:\exp(x\Delta E_1):\rangle\exp(x^2C/2) \quad (2.2.139)$$

将上式作级数展开，并让 x 的 $2N$ 次幂项的系数相等，则有

$$\langle(\Delta E_1)^{2N}\rangle=\sum_{q=0}^{N}\frac{\langle:(\Delta E_1)^{2(N-q)}:\rangle}{(2N-2q)!\ q!}(C/2)^q(2N)!$$
$$=\langle:(\Delta E_1)^{2N}:\rangle+\frac{(2N-1)2N}{1!}\frac{C}{2}\langle:(\Delta E_1)^{2(N-1)}:\rangle$$

$$+\frac{2N(2N-1)(2N-2)(2N-3)}{2!}\left(\frac{C}{2}\right)^2\langle:(\Delta E_1)^{2(N-2)}:\rangle+\cdots$$
$$=(2N-1)!!\,C^N \qquad (2.2.140)$$

对于相干态场而言，有$\langle:(\Delta E_1)^{2N}:\rangle=0$ ($N=1,2,\cdots$). 因此由上式可知，如果对某电磁场存在某角度φ，使得条件

$$\langle(\Delta E_1)^{2N}\rangle<(2N-1)!!\,C^N \qquad (2.2.141)$$

成立，那么该辐射场的量子噪声在E_1分量的方向上就被压缩到$2N$阶. 例如，二阶压缩的条件是

$$\langle:(\Delta E_1)^2:\rangle<0$$

四阶压缩的条件是

$$\langle:(\Delta E_1)^4:\rangle+6C\langle:(\Delta E_1)^2:\rangle<0 \qquad (2.2.142)$$

六阶压缩的条件是

$$\langle:(\Delta E_1)^6:\rangle+15C\langle:(\Delta E_1)^4:\rangle+45C^2\langle:(\Delta E_1)^2:\rangle<0 \qquad (2.2.143)$$

如果辐射场是单模的，在$\varphi=0$时，由(2.2.2)和(2.2.134)式可知，E_1与X_1之间满足

$$X_1=E_1/2 \qquad (2.2.144a)$$

那么四阶压缩条件简化为

$$\langle X_1^4\rangle-4\langle X_1^3\rangle\langle X_1\rangle+6\langle X_1^2\rangle\langle X_1^2\rangle-3\langle X_1^4\rangle<3/16 \qquad (2.2.144b)$$

二、振幅平方压缩

下面我们来介绍辐射场的另一类压缩. 对于单模光场，定义两个算符Y_1和Y_2：

$$Y_1=[a^2-(a^+)^2]/2,\ Y_2=[a^2-(a^+)^2]/2i \qquad (2.2.145)$$

显然，它们分别对应辐射场复振幅平方的实部和虚部，且满足对易

关系式：

$$[Y_1, Y_2] = i(2N+1) \tag{2.2.146}$$

这里 $N = a^{+}a$ 为粒子数算符. 由(2.2.146)式可知，Y_1，Y_2 分量的量子涨落满足

$$\langle(\Delta Y_1)^2\rangle\langle(\Delta Y_2)^2\rangle \geqslant \langle N+1/2\rangle^2 \tag{2.2.147}$$

如果处在某一态的单模光场，其 Y_i 分量的涨落满足

$$\langle(\Delta Y_i)^2\rangle < \langle N-1/2\rangle \quad (i=1 \text{ 或 } 2) \tag{2.2.148}$$

我们就说辐射场具有振幅平方压缩特性.

至此我们介绍了辐射场各种压缩的定义，这些压缩效应均是辐射场的非经典性质的反映，一个自然的问题就是这些压缩效应是否彼此独立呢？换句话说，如果一个辐射场在某种条件下，能展现二阶压缩，那么它是否同时也可展现高阶压缩呢？它的振幅平方是否也具有压缩效应呢？下面就来讨论这一问题.

三、光场各种压缩定义的独立性

作为例子，这里我们仅讨论光场的二阶压缩与其振幅平方压缩效应，来说明光场各种压缩定义是否彼此独立. 假设一单模光场处在粒子数叠加态：

$$|\Psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta e^{-i\psi}|1\rangle \tag{2.2.149}$$

显然

$$\begin{aligned} \langle X_1\rangle &= \left\langle\frac{a+a^{+}}{2}\right\rangle = \cos\theta\sin\theta e^{-i\psi} \\ \langle X_1^2\rangle &= \left\langle\left(\frac{a+a^{+}}{2}\right)^2\right\rangle = \frac{1+2\sin^2\theta}{4} \end{aligned} \tag{2.2.150}$$

于是

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle = \langle X_1^2\rangle - \langle X_1\rangle^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2\theta(1-2\cos^2\theta\cos^2\psi) . \tag{2.2.151}$$

上式表明，只要 θ,Ψ 满足

$$1-2\cos^2\theta\cos^2\psi<0 \tag{2.2.152}$$

由(2.2.149)式描述的光场，其 X_1 分量的涨落就可被压缩.

这时，我们再来看看光场振幅平方的涨落是否也可被压缩. 由(2.2.149)式可知

$$\langle Y_1\rangle=\langle\frac{a^2-(a^+)^2}{2}\rangle=0=\langle\frac{a^2-(a^+)^2}{2i}\rangle=\langle Y_2\rangle \tag{2.2.153}$$

$$\langle Y_1^2\rangle=\langle\left[\frac{a^2+(a^+)^2}{2}\right]^2\rangle=2\cos^2\theta+6\sin^2\theta=\langle Y_2^2\rangle \tag{2.2.154}$$

$$\langle N\rangle=\langle a^+a\rangle=\sin^2\theta$$

这时

$$\langle(\Delta Y_i)^2\rangle-\langle N+1/2\rangle=3/2+3\sin^2\theta>0 \tag{2.2.155}$$

显然，对于任意的 θ,Ψ，上式恒大于零，这就是说，处在态 $|\Psi\rangle$ [(2.2.149)式]的光场，其振幅平方的涨落不能被压缩.

从上面可以发现，如果一个光场在某种条件下，可展现二阶压缩效应，它并不一定可以展现振幅平方压缩效应，反之亦然. 这说明，光场各种压缩的定义是彼此独立的，它们展示的是光场不同的非经典效应，这些非经典效应是光场的量子属性在不同侧面的反映. 因此，实验上选用不同特性的光场(它由不同的态函数描述)，可展现光场的不同量子特性.

第四节　J-C 模型中光场的压缩效应

从(2.2.149)式我们看到，一个由真空态和单光子态叠加的光场能够展示光场的压缩效应，这种光场可以由原子与光场的单光子相互作用来产生，光场与原子相互作用的单光子 J-C 模型就描

述这种过程，实验上这种过程已在里德伯原子中实现.

由(1.4.60)式可知，描述一个二能级原子与单模光场发生单光子相互作用的 J-C 模型，在旋波近似下，它的哈密顿量表示为

$$H=H_0+V \qquad (\hbar=1) \tag{2.2.156}$$

$$H_0=\omega a^+a+\omega_0 S_z \tag{2.2.157}$$

$$V=g(a^+S_-+aS_+) \tag{2.2.158}$$

原子的赝自旋算符 $S_\pm$，S_z 满足对易关系

$$[S_z,S_\pm]=\pm S_\pm;\quad [S_+,S_-]=2S_z \tag{2.2.159}$$

ω_0 为原子的本征跃迁频率，ω 为单模光场的频率，g 代表原子-光场的耦合常数，它描述原子与光场的耦合强度. 这里为计算简单起见，假设原子与光场发生共振作用，即 $\omega_0=\omega$. 于是在相互作用绘景中，系统的相互作用哈密顿量为

$$V^I(t)=g(a^+S_-+aS_+) \tag{2.2.160}$$

假设在 $t=0$ 时刻，原子与光场没有发生相互作用，这时光场处在真空态，二能级原子处在其基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 的叠加态 $\cos(\theta/2)|e\rangle+\sin(\theta/2)e^{-i\varphi}|g\rangle$，那么在初始时刻，原子-光场耦合系统的态矢可写为

$$|\Psi(0)\rangle=\cos(\theta/2)|e,0\rangle+\sin(\theta/2)e^{-i\varphi}|g,0\rangle \tag{2.2.161}$$

如果在 $t=0^+$ 时刻，原子与光场发生单光子相互作用，这时由于原子只在 $|e,0\rangle$ 与 $|g,1\rangle$ 之间发生单光子跃迁，因而在 t 时刻，原子-光场耦合系统的态矢在相互作用绘景中可表示为

$$|\Psi^I(t)\rangle=C_3(t)|e,0\rangle+C_2(t)|g,1\rangle+C_1(t)|g,0\rangle \tag{2.2.162}$$

将(2.2.160)和(2.2.162)式一并代入相互作用绘景中的薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi^I(t)\rangle = V^I(t)|\Psi^I(t)\rangle$$

并利用$|e,0\rangle$,$|g,1\rangle$,$|g,0\rangle$间的正交性关系,可得

$$\begin{cases} i\dot{C}_3(t) = gC_2(t) \\ i\dot{C}_2(t) = gC_3(t) \\ \dot{C}_1(t) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.163)$$

考虑到初始条件(2.2.161)式,则上述微分方程的解为

$$\begin{cases} C_3(t) = \cos(\theta/2)\cos(gt) \\ C_2(t) = -i\cos(\theta/2)\sin(gt) \\ C_1(t) = \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{cases} \qquad (2.2.164)$$

将(2.2.164)式代入(2.2.162)式,就得到了t时刻系统的态矢.

利用(2.2.162)和(2.2.164)式,容易求得

$$\begin{aligned} \langle a\rangle &= \langle\Psi^I(t)|a^I(t)|\Psi^I(t)\rangle \\ &= -ie^{-i\phi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\sin(gt)e^{-i\omega t} \end{aligned} \qquad (2.2.165)$$

$$\langle a^2\rangle = 0 \qquad (2.2.166)$$

$$\langle a^+ a\rangle = \cos^2(\theta/2)\sin^2(gt) \qquad (2.2.167)$$

这里a^I、a^{+I}为相互作用绘景中光场的湮没、产生算符,其中

$$a^I(t) = ae^{-i\omega t} = [a^{+I}(t)]^+ \qquad (2.2.168)$$

由于在实际测量过程中,探测仪器并不能响应快速振荡的光场频率,它只能响应缓慢变化的包络振幅,因此为和实际测量相对应,我们只讨论光场两正交分量的缓变振幅的涨落的压缩情况,即讨论

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(ae^{i\omega t} + a^+e^{-i\omega t}) \\ X_2 &= \frac{1}{2i}(ae^{i\omega t} - a^+e^{-i\omega t}) \end{aligned} \qquad (2.2.169)$$

由(2.2.165)-(2.2.167)式可知，X_1,X_2 分量的涨落为

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle=\cos^2(\theta/2)\sin^2 gt\left[\frac{1}{2}-\sin^2\psi\sin^2(\theta/2)\right]+\frac{1}{4} \tag{2.2.170}$$

$$\langle(\Delta X_2)^2\rangle=\cos^2(\theta/2)\sin^2 gt\left[\frac{1}{2}-\cos^2\psi\sin^2(\theta/2)\right]+\frac{1}{4} \tag{2.2.171}$$

从(2.2.170)式可以看到，当 $\theta=2\pi/3, 4\pi/3$ 且 $\psi=\pi/2$ 时，$\langle(\Delta X_1)^2\rangle$简化为

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle=1/4-\sin^2(gt)/16 \tag{2.2.172}$$

上式表明，在 $gt\neq n\pi(n=0,1,2,\cdots)$的时间区域，光场 X_1 分量的涨落可被压缩，并且在 $gt=n\pi/2(n=1,3,\cdots)$时$\langle(\Delta X_1)^2\rangle$达极小，即光场 X_1 分量的量子噪声被压缩到极小[如图 2.2.3(a)所示]。而当 $\theta=0$ 时，即原子初始时处在激发态，此时(2.2.170)、(2.2.171)式简化为

$$\langle(\Delta X_i)^2\rangle=\frac{1}{4}-\sin^2(gt)/16\geqslant 1/4 \tag{2.2.173}$$

可见，初始时处在激发态的原子，在真空场作用下，光场的量子噪声不能被压缩[如图 2.2.3(b)所示]。并且从图 2.2.3(b)可以看到，$\langle(\Delta X_i)^2\rangle\geqslant 1/4$，这说明原子的随机自发辐射将导致光场量子噪声的增加。

从上面的讨论我们可以看到，在光与原子相互作用系统中，原子的初态对光场涨落的压缩性质有着十分明显的影响。

另外，从(2.2.162)和(2.2.164)式可知，当 $t=\pi/(2g)$时，系统的态矢演化为

$$\begin{aligned}|\Psi[t=\pi/(2g)]\rangle&=e^{-i\psi}\sin(\theta/2)|g,0\rangle-i\cos(\theta/2)|g,1\rangle\\&=|g\rangle\otimes|\Psi_F\rangle\end{aligned} \tag{2.2.174}$$

式中

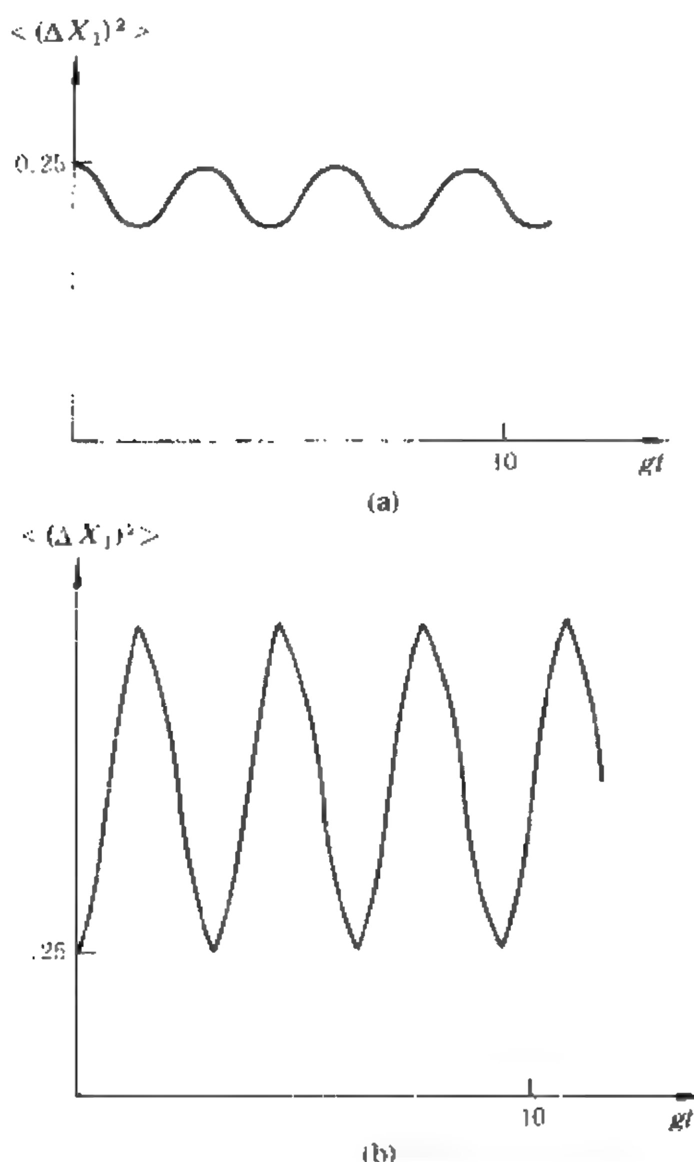


图 2.2.3 光场 X_1 分量的涨落被压缩的情况

(a) $\theta=2\pi/3,4\pi/3$ 且 $\Psi=\pi/2$ 时，X_1 分量的涨落被压缩的情况

(b) $\theta=0$ 时，X_1 的涨落不被压缩

$$|\Psi_F\rangle=e^{-i\varphi}\sin(\theta/2)|0\rangle-i\cos(\theta/2)|1\rangle \qquad (2.2.175)$$

显然，此时光场的态 $|\Psi_F\rangle$ 是真空态与单光子态的叠加态，它与(2.2.149)式具有相似的形式，是光场的压缩态. 可见，一个初始处在基态与激发态的叠加态的原子可以辐射压缩光.

从上面的讨论可以发现，对于与原子相互作用的光场，其压缩性质强烈依赖于原子的初始状态. 下面我们仍以 J-C 模型为例，来

讨论光场的初始状态对与原子相互作用的光场的压缩效应的影响.

假设 $t=0$ 时刻，光场处在相干态：

$$|\alpha\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}F_n|n\rangle,\quad F_n=\exp(-|\alpha|^2/2)\alpha^n/\sqrt{n!} \tag{2.2.176}$$

为计算简单起见，设原子初始时处在激发态 $|e\rangle$. 这样原子-光场耦合系统在初始时刻的态矢写为

$$|\Psi(0)\rangle=\sum_n F_n|e,n\rangle \tag{2.2.177}$$

随着时间的演化，在相互作用绘景中，原子-光场耦合系统的态矢可展开为

$$|\Psi^I(t)\rangle=\sum_n a_n(t)|e,n\rangle+b_{n-1}(t)|g,n+1\rangle \tag{2.2.178}$$

将(2.2.160)和(2.2.178)式代入相互作用绘景中的薛定谔方程，得到

$$\begin{cases} i\dot{a}_n(t)=g\sqrt{n+1}\,b_{n+1}(t) \\ i\dot{b}_{n+1}(t)=g\sqrt{n+1}\,a_n(t) \end{cases} \tag{2.2.179}$$

考虑到初始条件(2.2.177)式，则方程(2.2.179)式的解为

$$\begin{cases} a_n(t)=F_n\cos(g\sqrt{n+1}\,t) \\ b_{n+1}(t)=-iF_n\sin(g\sqrt{n+1}\,t) \end{cases} \tag{2.2.180}$$

把(2.2.180)式代入(2.2.178)式，即得相互作用绘景中系统任意时刻的态矢.

利用(2.2.178)式，不难求得

$$\langle ae^{i\omega t}\rangle=\exp(-|\alpha|^2)e^{i\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{(n+\frac{1}{2})}}{n!}\Big[\cos(g\sqrt{n+1}\,t)$$

$$\times\cos(g\sqrt{n+2}\,t)+\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\sin(g\sqrt{n+1}\,t)$$

$$\times \sin(g\sqrt{n+2}\,t)\Big] \tag{2.2.181}$$

$$\langle a^2 e^{i2\omega t}\rangle = \exp(-|\alpha|^2)e^{i2\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{(n+1)}}{n!}\Big[\cos(g\sqrt{n+1}\,t)$$

$$\times \cos(g\sqrt{n+3}\,t) + \sqrt{\frac{(n-3)(n+4)}{(n-2)(n+1)}}\sin(g\sqrt{n+1}\,t)$$

$$\times \sin(g\sqrt{n-3}\,t)\Big] \tag{2.2.182}$$

$$\langle a^+ a\rangle = \bar{n} + \exp(-|\alpha|^2)\sum_{n}^{\infty}\frac{\bar{n}^n}{n!}\sin^2(g\sqrt{n+1}\,t) \tag{2.2.183}$$

式中已令 $\alpha=(\bar{n})^{1/2}e^{i\eta}$. 同前面一样，这里只讨论光场两正交分量的缓变包络的涨落随时间的演化. 实际上，由于 X_1 和 X_2 彼此正交，它们只是相位因子相差 $\pi/2$，因而可以彼此转化，故这里我们仅以 X_1 分量的涨落为例. 显然

$$Q_1 = \langle(\Delta X_1)^2\rangle - 1/4 = \frac{1}{2}\{\langle a^+ a\rangle + \mathrm{Re}\langle a^2 e^{2i\omega t}\rangle - 2(\mathrm{Re}\langle a e^{i\omega t}\rangle)^2\} \tag{2.2.184}$$

将 (2.2.181) (2.2.183) 式代入上式，即得到了 Q_1 随时间的演化规律. 很明显，如果在某时刻 t 有 $Q_1<0$，则表明与原子相互作用的光场的 X_1 分量的涨落被压缩，此时光场处在压缩态.

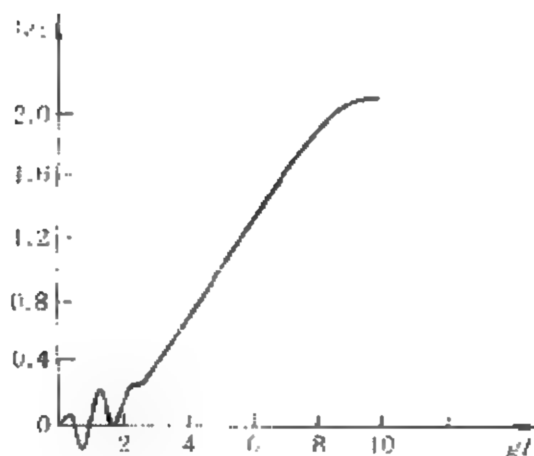


图 2.2.4 $\bar{n}=10, \eta=0$ 时 Q_1 随时间的演化规律

由于(2.2.184)式比较复杂，不易直接看出 Q_1 随时间的演化规律，因此这里借助数值计算来讨论这一问题. 图 2.2.4 给出了方程(2.2.184)式的数值解，它表明，当 $\bar{n}=10, \eta=0$ 时，在初始一个较短的时间区域，出现了 $Q_1<0$ 的现象. 这就是说，对于单光子 J-C 模型，初始时

处在激发态的原子在与相干光场($\bar{n}\neq 0$)相互作用时,随着时间的演化,光场的两正交分量的量子噪声可以被压缩.而在前面我们看到,如果初始时原子处在激发态,光场处在真空态,则在单光子J-C模型中,原子的随机自发辐射绝不会使光场处在压缩态.可见,光场的初始状态同原子的初始状态一样,也对与原子相互作用的光场的压缩性质有着强烈的影响.

参 考 文 献

[1] D. Stoler, *Phys. Rev.*, **D1**, 3217 (1970).
[2] H. P. Yuen, *Phys. Rev.*, **A13**, 2226 (1976).
[3] C. M. Caves, *Phys. Rev.*, **D23**, 1693 (1981).
[4] D. F. Walls, *Nature*, **306**, 141 (1983).
[5] C. M. Caves and B. L. Schumaker, *Phys. Rev.*, **A31**, 3068 (1985).
[6] B. L. Schumaker and C. M. Caves, *Phys. Rev.*, **A31**, 3093 (1985).
[7] D. R. Turx, *Phys. Rev.*, **D31**, 1988 (1985).
[8] C. K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 323 (1985).
[9] G. Compagno, 彭金生, F. Persico, *Opt. Commun.*, **57**, 415 (1986).
[10] R. Loudon and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.*, **34**, 709 (1987).
[11] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle and S. M. Barnett, *Phys. Rev.*, **A35**, 2657 (1987).
[12] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall and H. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2520 (1987).
[13] L. A. Wu, M. Xiao and H. J. Kimble, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**, 1465 (1987).
[14] C. C. Gerry and P. J. Moyer, *Phys. Rev.*, **A38**, 5665 (1988).
[15] M. C. Teich and B. Saleh, *Quantum. Opt.*, **1**, 153 (1989).
[16] 周 鹏、彭金生,光学学报,**10**, 837 (1990).
[17] P. Kumar, O. Aytur and J. Huang, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1015 (1990).
[18] 周 鹏、彭金生,科学通报,**34**,585 (1991).
[19] M. Rosenbluh and R. M. Shelby, *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 153 (1991).
[20] 彭金生、李高翔,物理学报,**41**,568 (1992).
[21] G. M. Dariano, *Int. J. Mod. Phys.*, **B6**, 1291 (1992).
[22] C. Fabre, *Phys. Rep.*, **219**, 215 (1992).
[23] H. J. Kimble, *Phys. Rep.*, **219**,227 (1992).
[24] 彭金生、李高翔,*Phys. Rev.*, **A47**, 3197 (1993).
[25] M. J. Collett, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 3400 (1993).
[26] 李高翔、彭金生,*Chin. Phys. Lett.*, **12**, 79 (1995).
[27] 李高翔、彭金生,*J. Phys.*, **B**,No. 3(1996).
[28] 李高翔、彭金生,物理学报,**44**,1370(1995).
[29] 李高翔、彭金生,*Phys. Lett.*, **A**(将发表)(1996).

第三章　共振荧光

由第一篇第四章我们知道,处于激发态的原子由于真空起伏的影响会自发地衰变到基态而辐射荧光,荧光谱线的频率为原子的本征频率 ω_0. 那么如果本征频率为 ω_0 的原子,在频率为 ω 且 $\omega=\omega_0$ 的外场作用下,原子辐射的荧光情况会怎样呢? 1969 年,R. Mollow 最先从理论上研究了原子在与其本征频率 ω_0 共振的辐射场作用下的荧光辐射问题,即共振荧光问题,他的理论预言于 1974 年由 F. Schuda 等人从实验中得以证实. 这些年来,围绕共振荧光问题进行了广泛的理论和实验的研究,它对于原子、分子精细结构的研究以及高分辨率频谱技术的应用都有重要的意义.

共振荧光的实验原理图如图 2.3.1 所示,一束频率为 ω 的高

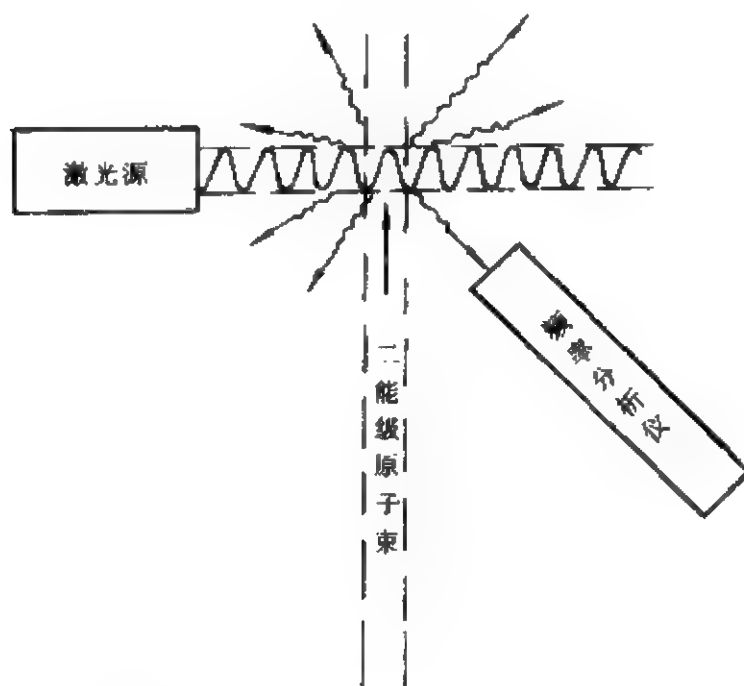


图 2.3.1　共振荧光实验原理图

功率激光与一束频率为 $\omega_0(\omega\approx\omega_0)$ 的二能级原子在交截处相互作用. 例如钠原子的 $^2S_{1/2}, F=2$ 与 $^2P_{3/2}, F=3$ 能级与驱动激光场的共振跃迁. 在相互作用区域辐射的荧光由频率分析仪测量. 实验结果表明,辐射的荧光由三种不同频率组成,如图 2.3.2 所示. 图中

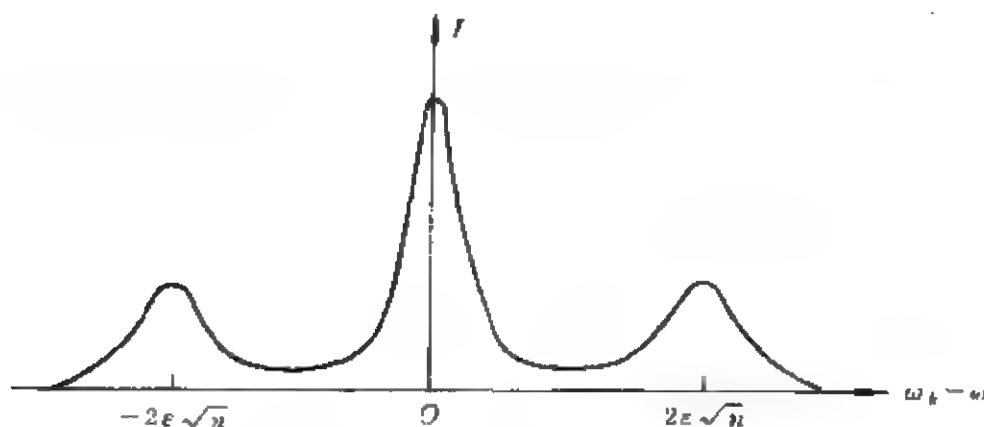


图 2.3.2 二能级原子的共振荧光频谱分布

荧光的中心峰带的频率与激光频率相同,而两边带以与中心频率相差 $\Delta_n=2\varepsilon\sqrt{n}$ 的位移量对称地分布,其中 ε 是原子与激光场的耦合常数,n 是激光光子数,它正比于激光功率. 两边带的线宽是中心峰带线宽的 3/2,而它们的强度只有中心峰带的 1/3. 实验还表明,随着入射光强的增加(n 增加),共振荧光三峰带结果更明显. 如果光强很弱,比时 n 很小,从而 Δ_n 很小,荧光分布呈现单峰带结构形态,这时与自发发射的情况一样.

本章内,我们将从理论上对这种物理现象加以阐述. 为弄清共振荧光的物理过程,我们首先介绍对与强场相互作用的二能级原子系统的一种理论处理方法,即修饰(Dress)规范变换方法,然后利用修饰变换方法系统讨论二能级原子的共振荧光分布,接着介绍修饰变换方法对三能级原子共振荧光频谱分布的处理,最后利用密度矩阵理论重新讨论二能级原子的共振荧光分布问题.

第一节　单个二能级原子的共振荧光分布理论

一、修饰规范变换

我们知道，一个与单模光场相互作用的二能级原子系统，在旋波近似下，其哈密顿量表示为

$$H = H_0 + V \tag{2.3.1}$$

$$H_0 = \omega a^+ a + \omega_0 S_z \quad (\hbar = 1) \tag{2.3.2}$$

$$V = \varepsilon(a^+ S_- + a S_+) \tag{2.3.3}$$

这里 $\omega a^+ a$ 代表单模光场的能量，$\omega_0 S_z$ 对应裸原子的能量，V 表征光场与原子的相互作用能. 由于相互作用能的影响，系统的本征能量和本征态将发生显著的变化. 第一篇第四章介绍了一种精确求解系统能谱的方法，即把原子和光场看作为一个整体，通过求解本征值方程将哈密顿量 H 对角化，得出了原子-光场耦合系统的能量本征值和本征函数. 这里我们介绍将哈密顿量 H 对角化的另外一种方法，即规范修饰变换方法.

考虑由(2.3.1)—(2.3.3)式描述的系统，首先引入原子和光场的总激发数算符：

$$N = a^+ a + S_z + 1/2 \tag{2.3.4}$$

显然它满足对易关系：

$$[N, H_0] = [N, V] = [N, H] = 0 \tag{2.3.5}$$

因而它是运动守恒量. 在$\{|n, \pm\rangle\}$表示中，它是对角化的. 若从系统的希尔伯特空间中除去态$|0, -\rangle$，那么 N，N^{-1}和 $N^{-1/2}$等都是有定义的算符，而且都满足对易关系(2.3.5)式. 于是定义幺正算符：

$$T = \exp\{-\theta(4N)^{-1/2}(aS_+ - a^+ S_-)\} \tag{2.3.6}$$

这里我们设 θ 也与 N 对易，它是一待定算符. 应用幺正算符 T，可

以对任意与 N 对易的算符 A 执行幺正变换：

$$T^{-1}AT=A+(-\theta N^{-1/2}/2)[A,aS_+-a^+S_-]+(1/2!)(-\theta N^{-1/2}/2)^2[[A,aS_+-a^+S_-],aS_+-a^+S_-]+\cdots \tag{2.3.7}$$

由于 θ 与 N 可对易，所以它也与 A 对易，故在展开式中，N 和 θ 都可提到泊松括号的外面. 若令 A 算符分别代表算符 S_z，a^+a 和 $(aS_+-a^+S_-)$，则依据(2.3.7)式，可得

$$T^{-1}S_zT=S_z+(-\theta N^{-1/2}/2)[S_z,aS_+-a^+S_-]+(1/2!)(-\theta N^{-1/2}/2)^2[[S_z,aS_+-a^+S_-],aS_+-a^+S_-]+\cdots \tag{2.3.8}$$

因为

$$[S_z,aS_+-a^+S_-]=a[S_z,S_+]-a^+[S_z,S_-]=aS_++a^+S_- \tag{2.3.9}$$

其中已应用了对易关系：

$$[S_z,S_\pm]=\pm S_\pm \tag{2.3.10}$$

而二阶泊松括号为

$$\begin{aligned}[S_z,aS_+-a^+S_-]_2&=[[S_z,aS_+-a^+S_-],aS_+-a^+S_-]\\&=[aS_++a^+S_-,aS_+-a^+S_-]\\&=[aS_+,-a^+S_-]+[a^+S_-,aS_+]\\&=-S_-S_+-2aa^+S_z-S_+S_-+a^+a(-2S_z)\\&=-(S_+S_-+S_-S_+)-(a^+a+aa^+)2S_z\\&=-1-(2a^+a+1)2S_z\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

其中已应用了熟知的对易关系 $[a,a^+]=1$ 和 $[S_+,S_-]=2S_z$ 以及关系式

$$S_\pm S_\mp=1/2\pm S_z \tag{2.3.12}$$

考虑到(2.3.4)式及

$$S_z^2 = \frac{1}{4} \tag{2.3.13}$$

则(2.3.11)式可写为

$$[S_z, aS_+ - a^+ S_-]_2 = -4NS_z \tag{2.3.14}$$

再求(2.3.8)式中的三阶泊松括号式得

$$\begin{aligned}[S_z, aS_+ - a^+ S_-]_3 &= -4N[S_z, aS_+ - a^+ S_-] \\ &\quad -4[N, aS_+ - a^+ S_-]S_z \\ &= -4N(aS_+ + a^+ S_-)\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

这里已应用了关系式

$$[N, aS_+ - a^+ S_-] = [a^+ a + S_z + \frac{1}{2}, aS_+ - a^+ S_-] = 0 \tag{2.3.16}$$

显然

$$[S_z, aS_+ - a^+ S_-]_4 = (-4N)^2 S_z \tag{2.3.17}$$

$$\vdots$$

把结果(2.3.9)式及(2.3.14)—(2.3.17)式一并代入(2.3.8)式，我们得

$$\begin{aligned}T^{-1}S_zT &= S_z + (-\theta N^{-1/2}/2)(aS_+ + a^+ S_-) \\ &\quad + (1/2!)(-\theta N^{-1/2}/2)^2(-4NS_z) \\ &\quad + (1/3!)(-\theta N^{-1/2}/2)^3(-4N)(aS_+ + a^+ S_-) \\ &\quad + (1/4!)(-\theta N^{-1/2}/2)^4(-4N)^2 S_z + \cdots \\ &= S_z(1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \cdots) - (aS_+ + a^+ S_-)\frac{N^{-1/2}}{2} \\ &\quad \times (\theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! + \cdots) \\ &= S_z\cos\theta - (aS_+ + a^+ S_-)\frac{N^{-\frac{1}{2}}}{2}\sin\theta\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

相似的计算可以得到

$$T^{-1}a^+ aT = a^+ a + S_z - S_z\cos\theta + (aS_+ + a^+ S_-)(N^{-1/2}/2)\sin\theta \tag{2.3.19}$$

以及

$$T^{-1}(aS_{+}+a^{+}S_{-})T=(aS_{+}+a^{+}S_{-})\cos\theta+2S_zN^{+1/2}\sin\theta \tag{2.3.20}$$

于是对哈密顿量(2.3.1)式执行规范幺正变换后给出

$$\begin{aligned}T^{-1}HT=&\omega a^{+}a+[\omega-(\omega-\omega_0)\cos\theta+2\varepsilon N^{1/2}\sin\theta]S_z\\&+[(N^{-1/2}/2)(\omega-\omega_0)\sin\theta+\varepsilon\cos\theta]\\&\times(aS_{+}+a^{+}S_{-})\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

如果我们选定待定算符 θ,使其满足等式

$$(N^{-1/2}/2)(\omega-\omega_0)\sin\theta+\varepsilon\cos\theta=0$$

即满足

$$\sin\theta=-2\varepsilon N^{1/2}/[(\omega-\omega_0)^2+4\varepsilon^2N]^{1/2} \tag{2.3.22}$$

$$\cos\theta=(\omega-\omega_0)/[(\omega-\omega_0)^2+4\varepsilon^2N]^{1/2} \tag{2.3.23}$$

则(2.3.21)式变为

$$T^{-1}HT=\omega a^{+}a+(\omega-\Delta_n)S_z \tag{2.3.24}$$

其中

$$\Delta_n=\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+4\varepsilon^2N} \tag{2.3.25}$$

现定义算符 A 的新算符为

$$\widetilde{A}=T^{-1}AT \tag{2.3.26}$$

并称它为修饰算符.则由(2.3.24)式可得

$$\widetilde{H}=\omega a^{+}a+(\omega-\Delta_n)S_z \tag{2.3.27}$$

它与方程(2.3.1)式完全等价,但此时系统的哈密顿量已完全对角化.方程(2.3.27)式的本征态也可用 $|n,\sigma\rangle(\sigma=\pm)$ 表示为

$$|\widetilde{n},\widetilde{\sigma}\rangle=T|n,\sigma\rangle \tag{2.3.28}$$

由于 A 与 $\tilde{A}$ 以及 $|n,\sigma\rangle$ 与 $|\tilde{n},\tilde{\sigma}\rangle$ 都能通过幺正变换 T 而转换，故它们描述的物理量是等价的. 所以，为简单起见，以后均略去算符上的波浪号"～"标志. 依据方程(2.3.27)式可知算符 H 的本征值为

$$E_{n,+}=n\omega+(\omega-\Delta_n)/2 \tag{2.3.29a}$$

$$E_{n,-}=n\omega-(\omega-\Delta_n)/2 \tag{2.3.29b}$$

它对应能谱的一部分，如图 2.3.3 所示.

Δ_{n+1} $E_{n+1,-}$ $E_{n+1,-}$

Δ_n $E_{n+1,-}$ $E_{n,\cdot}$

Δ_{n-1} $E_{n,\cdot}$ $E_{n-1,+}$

图 2.3.3　n 很大时，哈密顿量 H[(2.3.27)式]的本征能谱

在共振 $\omega=\omega_c$，且 n 很大的情况下，不难得知(2.3.29)和(1.4.70)式之间的联系：

$$E_{n,-}=(n-1/2)\omega+\varepsilon\sqrt{n}=E_n^+ \tag{2.3.30a}$$

$$E_{n-1,+}=(n-1/2)\omega-\varepsilon\sqrt{n}=E_n^- \tag{2.3.30b}$$

可见，通过对角化哈密顿量(2.3.1)式与通过修饰变换(2.3.6)式的方法是完全等价的. 然而由于修饰变换能给定修饰算符的明显形式(2.3.26)式，我们将看到，在应用上它具有显著的优越性，而且这种表示将使修饰原子的定义更为鲜明，因而修饰变换方法也是一种较为普遍采用的方法.

另外应该指出，应用算符 T 对 A 执行幺正变换 $T^{-1}AT$ 时，我们要求 A 与 N 对易. 然而，有些原子算符如 $S_\pm$ 并不与 N 对易，但可以证明对易关系：

$$[N^{-1/2},S_+]=-(N^{3/2}-N^{1/2})^{-1}S_-/2$$

对于强场情况，此时 n 数值很大，即 $\langle a^+a\rangle=n\gg 1$，而对易关系 $[N^{-1/2},S_+]$ 矩阵元的数量级正比于 $n^{-3/2}$ 的项，因而可以忽略。还可以证明 $[\theta,S_+]$ 的矩阵元的数量级是 $O(n^{-1/2})$，与大的 n 值相比也可以略去。所以在 $T^{-1}AT$ 的展开式中，算符 T 中的 N 和 θ 可以作为 C 数来处理，即认为 $[N^{-1/2},S_+]=0$ 和 $[\theta,S_+]=0$，因而展开式(2.3.7)式对于算符 $S_\pm$ 仍近似成立，结果有

$$T^{-1}S_+T=S_+(1+\cos\theta)/2+N^{-1/2}a^+S_z\sin\theta-N^{-1}a^{+2}S_-(1-\cos\theta)/2 \tag{2.3.31}$$

$$T^{-1}S_-T=S_-(1+\cos\theta)/2+N^{-1/2}aS_z\sin\theta-N^{-1}a^2S_-(1-\cos\theta)/2 \tag{2.3.32}$$

二、单原子共振荧光频谱分布

现在，我们应用修饰变换方法，来讨论由强激光场驱动的二能级原子系统的共振荧光分布问题。对于与强单模激光场作用的二能级原子系统，如果假定原子束的强度很弱，于是作为近似，可略去原子间的相互作用，故可个别地考虑单个原子与强单色场的作用，所以描述系统的哈密顿量在旋波近似下可以写为

$$H=\omega a^+a+\omega_0S_z-\varepsilon(aS_++a^+S_-)+\sum_k\omega_ka_k^+a_k+\sum_k\varepsilon_k(a_kS_++a_k^+S_-) \tag{2.3.33}$$

等式右边的前三项分别对应激光场、裸原子以及它们之间的相互作用能量，第四项为辐射的荧光光子能量。由于自发发射的频率可以取无穷多个模式，所以对 k 作和时，k 取 $0\to\infty$。等式最后一项表征原子与荧光场的相互作用能。

考虑到激光场很强，相比之下原子与荧光场的相互作用

$$V=\sum_k\varepsilon_k(a_kS_++a_k^+S_-) \tag{2.3.34}$$

很小，因而可作为第二步加以处理。即把哈密顿量(2.3.33)式分解

为

$$H=H_0+V \tag{2.3.35}$$

首先对 H_0 执行幺正变换 T，考虑到 a_k 与 T 对易，因此由(2.3.24)式得

$$T^{-1}H_0T=\omega a^+a+(\omega-\Delta_n)S_z+\sum_k\omega_k a_k^+a_k \tag{2.3.36}$$

第二步再对 V 作幺正变换 T，应用(2.3.31)和(2.3.32)式，可得

$$\begin{aligned}T^{-1}VT=\sum_k\varepsilon_k\{&[(1+\cos\theta)/2]a_k^+S_-+\sin\theta a_k^+N^{-1/2}aS_z\\&-[(1-\cos\theta)/2]a_k^+N^{-1}a^2S_++h.c.\}\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

上式表征了修饰原子与荧光场的相互作用项. 显然与裸原子和荧光场的相互作用项(2.3.34)式相比，(2.3.37)式形式上更复杂，但是，它们却可以明显地揭示出原子的荧光发射过程. 如果令

$$T^{-1}VT=V_1+V_2+V_3 \tag{2.3.38}$$

其中

$$V_1=\sum_k\varepsilon_k[(1+\cos\theta)/2]a_k^+S_-+h.c. \tag{2.3.39}$$

$$V_2=\sum_k\varepsilon_k\sin\theta a_k^+N^{-1/2}aS_z+h.c. \tag{2.3.40}$$

$$V_3=-\sum_k\varepsilon_k[(1-\cos\theta)/2]a_k^+N^{-1}a^2S_++h.c. \tag{2.3.41}$$

显然 V_1,V_2 和 V_3 对应修饰原子与荧光场相互作用时伴随的三种不同荧光光子的发射和吸收过程. 如图 2.3.4 所示，在共振情况下，V_1 对应原子由上态跃迁至下态而发射频率 $\omega_{k1}=\omega-\Delta_n$ 的荧光光子及其相反的跃迁过程. V_2 项则对应原子吸收(或发射)一个激光光子，同时发射(或吸收)一个荧光光子的过程，荧光光子的频率 $\omega_{k2}=\omega$. V_3 项则对应原子吸收(或发射)两个激光光子，并由基态上升到激发态(或由激发态衰变到基态)，同时发射(或吸收)一个频率为 $\omega_{k3}=\omega+\Delta_n$ 的荧光光子的过程.

可见，单原子共振荧光的频谱由三峰带组成．定性的分析可知，中心峰带（$\omega_{k2}=\omega$）的强度应比两边带谱线的强度高，因为 V_2 对应的发射过程中，原子既可以处于上态也可以处于下态，而 V_1、V_3 则对应原子处于一种态情况时的感应过程．由于原子的自然线宽以及多普勒效应等原因，荧光谱线都有一定线宽．为观测到谱线的三峰带结构，则要求每条谱线的宽度均应小于

$$\Delta_n=[(\omega-\omega_0)^2+4\varepsilon^2n]^{1/2}$$

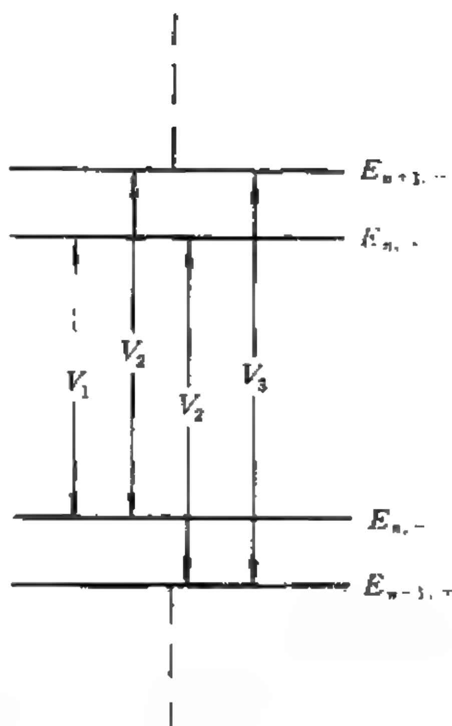


图 2.3.4　修饰原子相邻能级间由 V_1、V_2 和 V_3 感应的跃迁过程

这就要求激光光场有很高的功率（n 大）．当 Δ_n 足够大时，V_1、V_2 和 V_3 对应的荧光场模式 ω_{k1}，ω_{k2} 和 ω_{k3}均在频率 $\omega-\Delta_n$，ω 和 $\omega+\Delta_n$ 的邻域中．

三、三峰带荧光谱线的线宽

由于算符 V_1，V_2 和 V_3 表示系统感应的荧光跃迁过程，因此通过它们的运动方程，求解出相应的跃迁率，从而可得知三谱带的线宽．令

$$S_1=S_+,\quad S_2=N^{-1/2}a^+S_z,\quad S_3=N^{-1}a^{+2}S_- \tag{2.3.42}$$

在海森伯绘景中，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_i(t)&=-i[S_i(t),H_0+V]\\&=-i[S_i(t),H_0]-i[S_i(t),V]\qquad(i=1,2,3)\end{aligned} \tag{2.3.43}$$

上式的形式解为

$$S_i(t) = S_i(0) - i\int_0^t [S_i(t'), H_0]dt' - i\int_0^t [S_i(t'), V]dt'$$

(2.3.44)

把(2.3.44)式再代入(2.3.43)式右边最后一项中,则得

$$\frac{d}{dt}S_i(t) = -i[S_i(t), H_0] - i[S_i(0), V] - i\int_0^t [[S_i(t'), H_0(t')], V(t)]dt' - i\int_0^t [[S_i(t'), V(t')], V(t)]dt' \quad (2.3.45)$$

对于(2.3.45)式,若仅取荧光光子数表象中的对角元,则可推得 S_i 的主方程.因此,可在(2.3.45)式中略去荧光光子数表象中的非对角元,即略去含 V_i 的奇次项.而且由于不同的 i 对应不同频率的荧光光子跃迁,所以还可略去 $V_iV_j(i \neq j)$ 的项.应该指出,略去这些在荧光光子数表象中的非对角元只是一种近似.因为 $t \neq 0$ 时,它们对应一定的荧光光子跃迁,因而不等于零,但在 $t=0$ 时刻,由于没有跃迁发生,因而它们等于零,那么在 t 很小时,它们总比对角矩阵元小很多,因而相比之下可以忽略.从而由(2.3.45)式得到 S_i 所遵循的方程:

$$\frac{d}{dt}S_i(t) = -i[S_i(t), H_0(t)] - \sum_j \int_0^t [[S_i(t'), V_j(t')], V_j(t)]dt'$$

(2.3.46)

令 $t' = t - \tau$,则

$$\begin{aligned} S_i(t) &= -i[S_i(t), H_0(t)] + \sum_j \int_t^0 [[S_i(t-\tau), V_j(t-\tau)], V_j(t)]d\tau \\ &= -i[S_i(t), H_0(t)] - \sum_j \int_0^t [[S_i(t-\tau), V_j(t-\tau)], V_j(t)]d\tau \end{aligned}$$

(2.3.47)

积分中的算符 $S_i(t-\tau)V_j(t-\tau)$ 随时间 τ 的变化可通过求解海森伯方程,取其零级近似,知它们遵循指数关系,所以可写为

$$S_i(t-\tau)V_j(t-\tau) = \exp(-\tau/\tau_c)S_i(t)V_j(t) \quad (2.3.48)$$

此时 t 仅为参量，τ_c 为特征关联时间．把(2.3.48)式代入(2.3.47)式，并令 $\tau\to\infty$，则

$$\int_0^\infty \exp(-\tau/\tau_c)d\tau=\tau_c \tag{2.3.49}$$

所以

$$\frac{d}{dt}S_i(t)=-i[S_i(t),H_0(t)]-\tau_c\sum_j[[S_i(t),V_j(t)],V_j(t)] \tag{2.3.50}$$

由(2.3.42)和(2.3.35)式可知，上式右边第一项对应

$$\begin{aligned}-i[S_1,H_0]&=-i[S_1,\omega a^\dagger a+(\omega-\Delta_n)S_z+\sum_k\omega_k a_k^\dagger a_k]\\&=i(\omega-\Delta_n)S_1\end{aligned} \tag{2.3.51}$$

$$-i[S_2,H_0]=-i[N^{-1/2}a^\dagger S_z,H_0]=i\omega S_2 \tag{2.3.52}$$

$$-i[S_3,H_0]=-i[N^{-1}a^{\dagger 2}S_-,H_0]=i(\omega+\Delta_n)S_3 \tag{2.3.53}$$

(2.3.50)式右边第二项对应

$$D_{ij}=[[S_i(t),V_j(t)],V_j(t)] \tag{2.3.54}$$

对于荧光光子数表象来说，它们总是对角的．它们共有 9 项，例如

$$\begin{aligned}D_{11}&=[[S_1,V_1],V_1]\\&=[[S_+,\sum_{k_1}\varepsilon_{k_1}(1/2)(1+\cos\theta)(a_{k_1}S_++a_{k_1}^\dagger S_-)],\sum_{k_1}\varepsilon_{k_1}\\&\quad\times\frac{1}{2}(1+\cos\theta)(a_{k_1}S_++a_{k_1}^\dagger S_-)]\\&=[\sum_{k_1}\varepsilon_{k_1}(1/2)(1+\cos\theta)2a_{k_1}^\dagger S_z,\sum_{k_1}\varepsilon_{k_1}(1/2)(1+\cos\theta)\\&\quad\times(a_{k_1}S_++a_{k_1}^\dagger S_-)]\\&=\sum_{k_1}\varepsilon_{k_1}^2(1/2)(1+\cos\theta)^2(a_{k_1}^\dagger a_{k_1}+1/2)S_1\end{aligned}$$

类似地

$$D_{12} = \sum_{k_2} \varepsilon_{k_2}^2 \sin^2\theta(2a_{k_2}^+ a_{k_2} + 1)S_1$$

$$D_{13} = \sum_{k_3} \varepsilon_{k_3}^2 (1 - \cos\theta)^2 (a_{k_3}^+ a_{k_3} + 1/2)S_1$$

$$D_{21} = \sum_{k_1} \varepsilon_{k_1}^2 (1/2)(1 + \cos\theta)^2 (a_{k_1}^+ a_{k_1} + S_z + 1/2)S_2$$

$$D_{22} = 0$$

$$D_{23} = \sum_{k_3} \varepsilon_{k_3}^2 (1 - \cos\theta)^2 (a_{k_3}^+ a_{k_3} - S_z + 1/2)S_2$$

$$D_{31} = \sum_{k_1} \varepsilon_{k_1}^2 (1/2)(1 + \cos\theta)^2 (a_{k_1}^+ a_{k_1} + 1/2)S_3$$

$$D_{32} = \sum_{k_2} \varepsilon_{k_2}^2 \sin^2\theta(2a_{k_2}^+ a_{k_2} + 1)S_3$$

$$D_{33} = \sum_{k_3} \varepsilon_{k_3}^2 (1/2)(1 - \cos\theta)^2 (a_{k_3}^+ a_{k_3} + 1/2)S_3$$

(2.3.55)

其中已作近似 $a^+a \approx N$，因为 N 很大，所以略去了高阶 $0(N^{-1/2})$ 的项. 现在可以计算方程(2.3.50)式在 H_0 的本征态表象中的非零矩阵元了，它们对应辐射荧光光子的跃迁. 若令荧光场为真空，即 $n_{k_1} = n_{k_2} = n_{k_3} = 0$，那么本征基可取为

$$|n,\sigma\rangle = |n,\sigma,0_{k_1},0_{k_2},0_{k_3}\rangle \qquad (2.3.56)$$

这里 n 为激光光子数，$\sigma = \pm$. 于是对应荧光跃迁率的非对角矩阵元为

$$\begin{aligned}
&\langle n,+|\frac{d}{dt}(S_+)|n,-\rangle \\
&= \langle n,+|-i[S_1,H_0] - \tau_c(D_{11}+D_{12}+D_{13})|n,-\rangle \\
&= i(\omega - \Delta_n)\langle n,+|S_+|n,-\rangle \\
&\quad -\tau_c\{\sum_{k_1}\frac{\varepsilon_{k_1}^2}{4}(1+\cos\theta)^2 + \sum_{k_2}\varepsilon_{k_2}^2\sin^2\theta \\
&\quad + \sum_{k_3}\varepsilon_{k_3}^2(1-\cos\theta)^2/4\} \times \langle n,+|S_+|n,-\rangle
\end{aligned} \qquad (2.3.57)$$

$$\langle n,+|\frac{d}{dt}(N^{-1/2}a^{+}S_z)|n-1,+\rangle$$
$$=i\omega\langle n,+|N^{-1/2}a^{+}S_z|n-1,+\rangle-\tau_c\{\sum_{k_1}\varepsilon_{k_1}^2(1+\cos\theta)^2\}$$
$$\times\langle n,+|N^{-1/2}a^{+}S_z|n-1,+\rangle \tag{2.3.58}$$

$$\langle n,-|\frac{d}{dt}(N^{-1/2}a^{+}S_z)|n-1,-\rangle$$
$$=i\omega\langle n,-|N^{-1/2}a^{+}S_z|n-1,-\rangle$$
$$-\tau_c\{\sum_{k_3}\varepsilon_{k_3}^2(1-\cos\theta)^2\}\times\langle n,-|S_z|n-1,-\rangle \tag{2.3.59}$$

$$\langle n,-|\frac{d}{dt}(N^{-1}a^{+2}S_-)|n-2,+\rangle$$
$$=i(\omega-\Delta_n)\langle n,-|N^{-1}a^{+2}S_-|n-2,+\rangle$$
$$-\tau_c\{\sum_{k_1}\frac{\varepsilon_{k_1}^2}{4}(1+\cos\theta)^2$$
$$+\sum_{k_2}\varepsilon_{k_2}^2\sin^2\theta+\sum_{k_3}\varepsilon_{k_3}^2(1-\cos\theta)^2/4\}$$
$$\times\langle n,-|N^{-1}a^{+2}S_-|n-2,+\rangle \tag{2.3.60}$$

考虑到在荧光共振的邻域内，耦合常数 ε_{k_j} 随 k_j 的变化很小，可令

$$\kappa=\sum_{k_j}\varepsilon_{k_j}^2 \tag{2.3.61}$$

这样，方程(2.3.57)式的解可写为

$$\langle n,+|S_1|n,-\rangle=\langle n,+|S_1|n,-\rangle_0\exp\{[i(\omega-\Delta_n)-\Gamma_1]t\} \tag{2.3.62}$$

其中对应频率为 $\omega-\Delta_n$ 谱线线宽为

$$\Gamma_1=\tau_c\kappa\{(1/4)(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+(1/4)(1-\cos\theta)^2\}$$
$$=\tau_c\kappa(3-\cos^2\theta)/2=\Gamma_{\omega-\Delta n} \tag{2.3.63}$$

而方程(2.3.58)和(2.3.59)式的解给出

$$\langle n,\pm|S_2|n-1,\pm\rangle=\langle n,\pm|S_2|n-1,\pm\rangle_0\exp[(i\omega-\Gamma_2)t] \tag{2.3.64}$$

谱线宽

$$\Gamma_2=\tau_c\kappa(1+\cos^2\theta)=\Gamma_\omega \tag{2.3.65}$$

方程(2.3.60)式的解为

$$\langle n,-|S_3|n-2,+\rangle=\langle n,-|S_3|n-2,+\rangle_0\exp\{[i(\omega+\Delta_n)-\Gamma_3]t\} \tag{2.3.66}$$

谱线宽

$$\Gamma_3=\tau_c\kappa(3-\cos^2\theta)/2=\Gamma_{\omega-\Delta n} \tag{2.3.67}$$

在共振情况下,即 $\cos\theta=0$ 时

$$\Gamma_\omega=\tau_c\kappa,\quad \Gamma_{\omega\pm\Delta n}=3\tau_c\kappa/2 \tag{2.3.68}$$

因此,中心峰带与两边带线宽之比为

$$\Gamma_\omega/\Gamma_{\omega\pm\Delta n}=2/3 \tag{2.3.69}$$

上式与实验完全一致.这表明,我们从理论上得出的三峰带线宽为(2.3.63),(2.3.65)和(2.3.67)式所示是正确的.那么,三条谱线的相对强度如何呢?下面来讨论这一问题.

四、荧光谱线的强度分布

为求荧光谱线的强度分布,需要计算荧光光子的发射速率,因而必须计算

$$R_k=\frac{d}{dt}\langle n,\sigma,\{0_k\}|a_k^+a_k|n,\sigma,\{0_k\}\rangle \tag{2.3.70}$$

这里已令初始时荧光场处于真空场$\{|0_k\rangle\}$.显然为得出(2.3.70)式的表示,需要先求出 $a_k(t)$的表示式.已知 a_k 的运动方程:

$$\frac{d}{dt}a_k=-i[a_k,H]=-i\omega_ka_k-i\varepsilon_kS \tag{2.3.71}$$

其中 H 由(2.3.33)式表示,上式的解为

$$a_k(t) = a_k(0)\exp(-i\omega_k t) - i\varepsilon_k\int_0^t S_-(t')\exp[-i\omega_k(t-t')]dt' \tag{2.3.72}$$

应用(2.3.72)式及其共轭式，于是

$$\begin{aligned}
&\langle a_k^\dagger(t)a_k(t)\rangle \\
&= \langle\{a_k^\dagger(0)a_k(0) \\
&\quad - i\varepsilon_k a_k^\dagger(0)\exp(i\omega_k t)\int_0^t S_-(t'')\exp[-i\omega_k(t-t'')]dt'' \\
&\quad + i\varepsilon_k a_k(0)\exp(-i\omega_k t)\int_0^t S_+(t')\exp[i\omega_k(t-t')]dt' \\
&\quad + \varepsilon_k^2\int_0^t S_+(t')\exp[i\omega_k(t-t')]dt' \\
&\quad \times\int_0^t S_-(t'')\exp[-i\omega_k(t-t'')]dt''\}\rangle
\end{aligned} \tag{2.3.73}$$

由于在海森伯绘景中，系统的态矢不随时间变化，所以在 t 时刻，可以认为荧光场仍处于真空场，从而上式只保留最后一项非零项：

$$\begin{aligned}
&\langle a_k^\dagger(t)a_k(t)\rangle \\
&= \varepsilon_k^2\langle\{\int_0^t S_+(t')\exp[i\omega_k(t-t')]dt'\int_0^t S_-(t'') \\
&\quad \times\exp[-i\omega_k(t-t'')]dt''\}\rangle \\
&= \varepsilon_k^2\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\langle\{S_+(t')S_-(t'') + S_+(t'')S_-(t')\}\rangle \\
&\quad \times\exp[-i\omega_k(t'-t'')] \\
&= 2\mathrm{Re}\,\varepsilon_k^2\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\langle S_+(t')S_-(t'')\rangle \\
&\quad \times\exp[-i\omega_k(t'-t'')]
\end{aligned} \tag{2.3.74}$$

把上式变换到修饰表示中，注意到

$$T^{-1}S_+(t')TT^{-1}S_-(t'')T = \sum_{l,m}R_l^\dagger(t')R_m(t'') \tag{2.3.75}$$

其中

$$T^{-1}S_-(t)T = R_1 + R_2 + R_3$$

$$=(1/2)(1+\cos\theta)S_-+\sin\theta N^{-1/2}aS_z+(1/2)(1-\cos\theta)N^{-1}a^2S_+$$

(2.3.76)

$$R_1=(1/2)(1+\cos\theta)S_-$$
$$R_2=\sin\theta N^{-1/2}aS_z \qquad (2.3.77)$$
$$R_3=-(1/2)(1-\cos\theta)N^{-1}a^2S_+$$

这样，(2.3.74)式转化为

$$\langle a_k^+(t)a_k(t)\rangle$$
$$=2\mathrm{Re}\epsilon_k^2\sum_{l,m}\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''\langle R_l^+(t')R_m(t'')\exp[-i\omega_k(t'-t'')]\rangle$$

(2.3.78)

为求解算符$R_l(t)$的精确表达式，需要采用修饰表示中的$\tilde{H}=T^{-1}HT$：

$$\tilde{H}=\omega a^+a+(\omega-\Delta_n)S_z+\sum_k\omega_k a_k^+a_k+\sum_{k,l}\epsilon_k(a_kR_l^++a_k^+R_l)$$

(2.3.79)

如果A是任意未含a_k的算符，那么

$$\frac{d}{dt}A=-i[A,H_0]-i[A,\sum_l V_l]$$
$$=-i[A,H_0]-i\sum_{k,l}\epsilon_k\{a_k^+[A,R_l]+[A,R_l^+]a_k\}$$

(2.3.80)

为在上式中消除荧光光子算符项$a_k(t)$，可借用表达式

$$a_k(t)=a_k(0)\exp(-i\omega_k t)-i\epsilon_k\sum_l\int_0^t R_l(t-\tau)\exp(-i\omega_k\tau)d\tau$$

(2.3.81)

上式中的$R_l(t)$则可通过解其海森伯方程，取其零级近似而得知

$$\frac{d}{dt}R_l(t)=-i[R_l,H_0]=-i\omega_lR_l \qquad (l=1,2,3)$$

(2.3.82)

其中

$$\omega_1=\omega-\Delta_n,\ \omega_2=\omega,\ \omega_3=\omega+\Delta_n \tag{2.3.83}$$

(2.3.82)式的解具有形式

$$R_l(t)=R_l(0)\exp(-i\omega_l t) \tag{2.3.84}$$

将(2.3.84)式代入(2.3.81)式,并积分得

$$a_k(t)=a_k(0)\exp(-i\omega_k t)-\varepsilon_k\sum_l R_l \times\left\{P\left(\frac{1}{\omega_k-\omega_l}\right)+i\pi\delta(\omega_k-\omega_l)\right\} \tag{2.3.85}$$

这里$P\left(\frac{1}{\omega_k-\omega_l}\right)$表示主部函数.把上式给出的$a_k(t)$再代入算符$A$的方程(2.2.80)式,可得

$$\frac{d}{dt}A=-i[A,H_A]+\sum_{l,m=1}^{3}\{(-i\Omega_m+\gamma_m)R_m^{+}[A,R_l] -(i\Omega_l+\gamma_l)[A,R_m]R_l^{+}\}+F_A \tag{2.3.86}$$

这里

$$\Omega_l=P\left(\sum_k\varepsilon_k^2\frac{1}{\omega_l-\omega_k}\right) \tag{2.3.87a}$$

$$\gamma_l=\pi\sum\varepsilon_k^2\delta(\omega_l-\omega_k) \tag{2.3.87b}$$

$$F_A=-i\sum_{l,k}\varepsilon_l\{a_k^{+}(0)\exp(i\omega_k t)[A,R_l] +[A,R_l^{+}]a_k(0)\exp(-i\omega_k t)\} \tag{2.3.87c}$$

由于已设荧光场为真空场,所以$\langle 0|F_A|0\rangle=0$.与经典朗之万方程(1.5.17)式相比可知,F_A起着随机力的作用,因此方程(2.3.86)式称为算符A的量子朗之万方程.由于$\langle 0|F_A|0\rangle=0$,因此在算符A的方程(2.3.86)式中,可以略去此项.此外,(2.3.86)式还可以作些简化.例如式中正比于Ω_m的项是使修饰原子算符A发生兰姆移位,作为近似可略去其贡献.γ_l表征荧光场耦合对于算符A的衰变率的贡献,从而对应相应辐射的一定线宽,考虑到三条谱线

γ_l 的差别很小，所以作为近似可令它们相等，即 $\gamma_l=\gamma$. 此外，式中形如 $R_l^\dagger R_m(l\neq m)$ 的项随时间 t 的变化可以近似取 $\exp[i(\omega_l-\omega_m)t]$，它对应快速振荡，故作为近似，可略去这种 $l\neq m$ 的项. 这样，算符方程(2.3.86)式简化为

$$\frac{d}{dt}A=-i[A,H_0]-\gamma\sum_l{}'\{[A,R_l^\dagger]R_l-R_l^\dagger[A,R_l]\}$$

(2.3.88)

当算符 A 用 R_l 取代时，方程(2.3.88)式表明，R_l 的时间演化受其他两个 R_l 的影响，即三种荧光跃迁有干涉效应. 因此，把三种衰变看成彼此独立的辐射是不确切的. 由方程(2.3.88)式我们得到

$$\frac{d}{dt}R_l=-[R_l,H_0]-\gamma\sum_{l'=1}^{3}\{[R_l,R_{l'}^\dagger]R_{l'}-R_{l'-1}^\dagger[R_l,R_{l'}]\}$$

(2.3.89)

把 H_0 和(2.3.77)式代入上式，得

$$\frac{d}{dt}R_1=-(i\omega_1+\Gamma_1)R_1 \qquad (2.3.90)$$

其中

$$\Gamma_1=\gamma(3-\cos^2\theta)/2 \qquad (2.3.91)$$

同理可得

$$\frac{d}{dt}R_2=-(i\omega_2+\Gamma_2)R_2-\gamma\sin\theta\cos\theta N^{-1/2}a \qquad (2.3.92)$$

$$\frac{d}{dt}R_3=-(i\omega_3+\Gamma_3)R_3 \qquad (2.3.93)$$

其中

$$\Gamma_2=\gamma(1+\cos^2\theta),\quad \Gamma_3=\Gamma_1 \qquad (2.3.94)$$

ω_1，ω_2 和 ω_3 由(2.3.83)式所示. (2.3.94)和(2.3.91)式表明，三种

跃迁的衰变率不仅与荧光场和原子的耦合有关($\propto\gamma$),而且还因含有 $\cos\theta$ 因子,而与激光场的强度和频差有关.在共振情况下,因 $\cos\theta=0$,所以可得知线宽 $\Gamma_1=\Gamma_3=3\gamma/2$,$\Gamma_2=\gamma$,它们与实验结论一致.为计算荧光强度,这里需具体计算方程(2.3.78)式.对方程(2.3.90)、(2.3.92)和(3.3.93)式分别积分,可给出

$$R_1(t)=R_1(0)\exp[-(i\omega_1+\Gamma_1)t] \tag{2.3.95a}$$

$$R_3(t)=R_3(0)\exp[-(i\omega_3+\Gamma_3)t] \tag{2.3.95b}$$

$$\begin{aligned}R_2(t)&=R_2(0)\exp[-(i\omega_2+\Gamma_2)t]\\&\quad-\int_0^t\gamma\sin\theta\cos\theta N^{-1/2}ae^{-i\omega t'}\exp[-(i\omega+\Gamma_2)(t-t')]dt'\\&=[R_2(0)+a_0/\Gamma_2]\exp[-(i\omega_2+\Gamma_2)t]+(a_0/\Gamma_2)\exp(-i\omega t)\end{aligned} \tag{2.3.95c}$$

其中

$$a_0=\gamma\sin\theta\cos\theta N^{-1/2}a(0) \tag{2.3.96}$$

现在再将方程(2.3.95)式代入(2.3.78)式,由于 $R_1^+R_3$ 和 $R_3^+R_1$ 正比于 S_+^2 和 S_-^2,所以其矩阵元为零.而 $R_1^+R_2$,$R_2^+R_3$,$R_2^+R_1$ 和 $R_3^+R_2$ 均正比于 aS_+ 或 a^+S_-,它们的矩阵元也为零.所以(2.3.78)式右边只保留对角部分.即

$$\begin{aligned}&\langle a_k^+(t)a_k(t)\rangle_m\\&=2\varepsilon_k^2\mathrm{Re}\Big\{\sum_l\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''\langle R_l^+(t'')R_l(t'')\rangle_m\\&\quad\times\exp\{-[i(\omega_k-\omega_l)+\Gamma_l](t'-t'')\}\\&\quad+\Gamma_2^{-1}\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''\langle a^+(t'')R_2(t'')\rangle_m\\&\quad\times\exp\{-[i(\omega_k-\omega)+\Gamma_2](t'-t'')\}\\&\quad-\Gamma_2^{-1}\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''\langle a^+(t'')R_2(t'')\rangle_m\\&\quad\times\exp[-i(\omega_k-\omega)(t'-t'')]\end{aligned} \tag{2.3.97}$$

因为

$$R_1^+ R_1 = (1+\cos\theta)^2 S_+ S_- /4 = \frac{1}{4}(1+\cos\theta)^2(S_z + 1/2)$$

$$R_2^+ R_2 = \frac{1}{4}\sin^2\theta$$

$$R_3^+ R_3 = -\frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2(S_z - 1/2)$$

$$a^+ R_2 = r\sin^2\theta\cos\theta S_z$$

(2.3.98)

因此

$$\begin{aligned}
&\langle a_k^+(t)a_k(t)\rangle_m \\
&= 2\varepsilon_k^2 \mathrm{Re}\{\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''[(1+\cos\theta)^2\langle S_z(t'')+1/2\rangle_m \\
&\quad \times \exp\{-[i(\omega_k-\omega_1)+\Gamma_1](t'-t'')\} \\
&\quad + \frac{1}{4}\exp\{-[i(\omega_k-\omega_2)+\Gamma_2](t'-t'')\}\sin^2\theta \\
&\quad - [(1-\cos\theta)^2/4]\langle S_z(t'')-1/2\rangle_m \\
&\quad \times \exp\{-[i(\omega_k-\omega_3)+\Gamma_3](t'-t'')\} \\
&\quad + \Gamma_2^{-1}\gamma\sin^2\theta\cos\theta\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\langle S_z(t'')\rangle_m \\
&\quad \times \exp\{-[i(\omega_k-\omega)+\Gamma_2](t'-t'')\} \\
&\quad - \Gamma_2^{-1}\gamma\sin^2\theta\cos\theta\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\langle S_z(t'')\rangle_m \\
&\quad \times \exp[-i(\omega_k-\omega)(t'-t'')]
\end{aligned} \tag{2.3.99}$$

为求解上式，需给出 $S_z(t'')$，由于

$$\frac{d}{dt}S_z(t) = -\Gamma_2 S_z - \gamma\cos\theta = -\Gamma_2[S_z + \cos\theta/(1+\cos^2\theta)]$$

(2.3.100)

所以

$$S_z(t) = [S_z(0) + \cos\theta/(1+\cos^2\theta)]\exp(-\Gamma_2 t) + C$$

(2.3.101)

初始条件 $t=0$ 时，$S_z(t)=S_z(0)$，故

$$S_z(t)=[S_z(0)+\cos\theta/(1+\cos^2\theta)]\exp(-\Gamma_2 t)-\cos\theta/(1+\cos^2\theta) \tag{2.3.102}$$

考虑到观测时间 $t\gg\gamma^{-1}$，因此在(2.3.99)式中，对于 $t''\ll\gamma^{-1}$ 的部分可以忽略，这样可取

$$S_z(t'')\approx-\cos\theta/(1+\cos^2\theta) \tag{2.3.103}$$

此外，(2.3.99)式中形如

$$I=\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt'' f(t'-t'') \tag{2.3.104}$$

的积分，可作变量代换. 令

$$t'-t''=\tau \tag{2.3.105}$$

即

$$t''=t'-\tau$$

从而

$$I=\int_0^t dt'\int_0^{t'} d\tau f(\tau) \tag{2.3.106}$$

考虑到 $t\gg\gamma^{-1}$，并且对于 $f(\tau)$ 来说，当 $\tau>\gamma^{-1}$ 时，$f(\tau)$ 很小，所以(2.3.106)式中的积分可拓展到∞，从而

$$I=\int_0^t dt'\int_0^\infty d\tau f(\tau)=t\int_0^\infty d\tau f(\tau) \tag{2.3.107}$$

利用(2.3.103)和(2.3.107)式，则(2.3.99)式转化为

$$\begin{aligned}
\langle a_k^+(t)a_k(t)\rangle_m =& 2t\epsilon_k^2\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{8}\frac{\sin^4\theta}{1+\cos^2\theta} \\
&\times\Big(\int_0^\infty d\tau e^{-[i(\omega_k-\omega_1)+\Gamma_1]\tau}+\int_0^\infty d\tau e^{-[i(\omega_k-\omega_3)+\Gamma_3]\tau}\Big) \\
&+\frac{1}{4}\frac{\sin^6\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\int_0^\infty d\tau e^{-[i(\omega_k-\omega)+\Gamma_2]\tau}\Big] \\
&+2\epsilon_k^2\mathrm{Re}\,\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\int_0^t dt'\int_0^t dt'' e^{-i(\omega_k-\omega)(t'-t'')} \\
=&\frac{t}{4}\epsilon_k^2\mathrm{Re}\Big[\frac{\sin^4\theta}{1+\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

$$\times\left[\frac{1}{\Gamma_1-i(\omega_k-\omega_1)}+\frac{1}{\Gamma_3+i(\omega_k-\omega_3)}\right]\Bigg]$$

$$+\frac{t}{2}\varepsilon_k^2\mathrm{Re}\,\frac{\sin^6\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\frac{1}{\Gamma_2+i(\omega_k-\omega_2)}$$

$$+2\pi t\mathrm{Re}\varepsilon\varepsilon_k^2\,\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\delta(\omega_k-\omega)$$

$$=t\varepsilon_k^2\,\frac{\sin^4\theta}{1+\cos^2\theta}\left[\frac{1}{4}\frac{3-\cos^2\theta}{(\omega_K-\omega_1)^2+\Gamma_1^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\frac{3-\cos^2\theta}{(\omega_k-\omega_3)^2+\Gamma_3^2}+\frac{\sin^2\theta}{(\omega_k-\omega_2)^2+\Gamma_2^2}\right]$$

$$+2\pi\varepsilon_k^2 t\,\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\delta(\omega_k-\omega) \qquad (2.3.108)$$

因此荧光辐射强度为

$$R_k=\frac{d}{dt}\langle a_k^+a_k\rangle_m=\frac{\gamma\varepsilon_k^2}{2}\frac{\sin^4\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$\times\left\{\frac{1}{4}\frac{3-\cos^2\theta}{(\omega_k-\omega_1)^2+\Gamma_1^2}+\frac{1}{4}\frac{3-\cos^2\theta}{(\omega_k-\omega_3)^2+\Gamma_3^2}+\frac{\sin^2\theta}{(\omega_k-\omega_2)^2+\Gamma_2^2}\right\}$$

$$+2\pi\varepsilon_k^2\,\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\delta(\omega_k-\omega) \qquad (2.3.109)$$

在共振情况下，$\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$，因此上式为

$$R_k=\frac{\gamma}{2}\varepsilon_k^2\left\{\frac{1}{4}\frac{3}{(\omega_k-\omega_1)^2+\Gamma_1^2}+\frac{1}{4}\frac{3}{(\omega_k-\omega_3)^2+\Gamma_3^2}+\frac{1}{(\omega_k-\omega_2)^2+\Gamma_2^2}\right\} \qquad (2.3.110)$$

可见，此时荧光中心峰带的强度 I_2 可由上式给出，它正比于 Γ_2^{-2}：

$$I_2\propto\Gamma_2^{-2}=\gamma^{-2} \qquad (2.3.111)$$

两边带的强度

$$I_1=I_3\propto(3/4)\Gamma_1^{-2}=\gamma^{-2}/3 \qquad (2.3.112)$$

所以中心峰带与两边带谱线的强度之比为

$$I_2:I_{1,3}=3:1 \qquad (2.3.113)$$

这正是共振荧光的实验结果．(2.3.109)式中的最后一项表征弹性

散射，当$t \gg \gamma^{-1}$时，由(2.3.95)式知R_1和R_3的期望值均趋于零，但$\langle R_2 \rangle$并不趋于零.这是因为

$$\langle R_2(\infty) \rangle = \frac{1}{\Gamma_2} \langle a_0 \rangle e^{-i\omega t}$$
$$= [\sin\theta\cos\theta/(1+\cos^2\theta)] \langle N^{-1/2} a(0) \rangle e^{-i\omega t}$$
(2.3.114)

上式说明$t \gg \gamma^{-1}$时，$\langle R_2 \rangle$并不趋于零，而是以确定的振幅振荡，它对应原子与场的受激吸收和受激发射过程.总之，上述理论给出的单原子共振荧光强度的表达式(2.3.109)式与现今关于二能级原子共振荧光谱线强度和宽度的基本实验结果完全一致.

第二节　三能级原子的共振荧光频谱分布

一、描述在双模光场作用下三能级原子系统的哈密顿量

前面我们均假定原子是二能级原子，然而实际的原子往往具有许多能级.作为一种推广，这里我们来讨论三能级原子的共振荧光频谱分布问题.三能级原子的能级图如图 2.3.5 所示，对应的三个态$|1\rangle$，$|2\rangle$和$|3\rangle$的能级能量为$E_1 < E_2 < E_3$.描述三能级原子的算符可以这样引入，设$|0\rangle$为原子数真空态，$C_i^{\dagger}$对应第$i(i=1,2,3)$能级原子数的产生算符，而C_i对应第i能级原子数的湮没算符.它们满足如下关系：

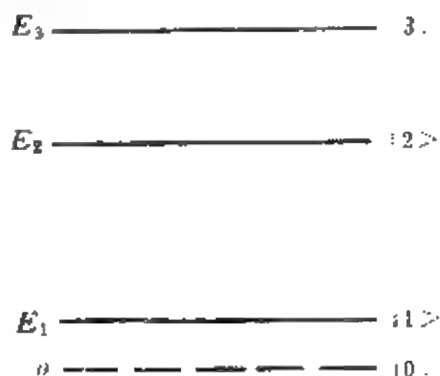


图 2.3.5　三能级原子的能级示意图

$$C_i^{\dagger} |0\rangle = |i\rangle$$
(2.3.115a)

$$C_i |i\rangle = |0\rangle \qquad (i=1,2,3)$$
(2.3.115b)

在原子的本征态表示中，算符C_i可以写为如下矩阵形式：

$$C_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad C_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(2.3.116)

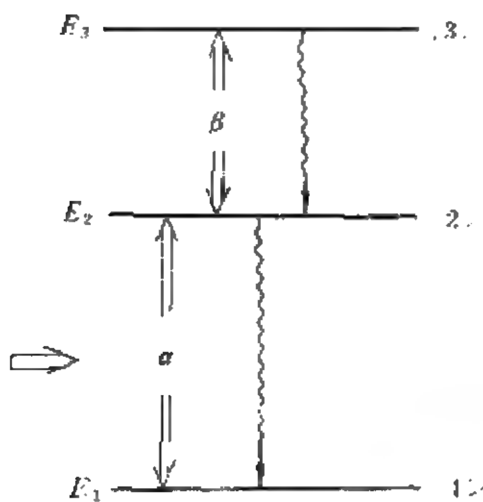


图 2.3.6 在频率为 ω_α 和 ω_β 的双单色场作用下,三能级原子的感应跃迁和荧光跃迁示意图

显然 C_i^+ 为其共轭表示. 根据算符 C_i 及其共轭式可以直接证明,它们满足

$$C_iC_j^+=0 \qquad (i\neq j)$$
$$C_iC_i^+C_j=C_j$$

(2.3.117)

三能级原子可以与单模光场作用,也可与双模光场作用. 作为一特例,现在讨论三能级原子与两束激光场相互作用的系统. 如图 2.3.6 所示,原子受频率为 ω_α 和 ω_β 的两束近共振激光场作用. 图 2.3.6 中双箭头的线表征驱动场感应的跃迁,单箭头波浪线表示偶极允许的荧光跃迁. 在旋波近似下,描述系统的哈密顿量可以写为

$$\begin{aligned}H=&\omega_0(C_2^+C_2-C_1^+C_1)/2+E_3C_3^+C_3+\omega_\alpha a^+a+\omega_\beta b^+b\\&+\varepsilon_\alpha(aC_2^+C_1+a^+C_1^+C_2)+\varepsilon_\beta(bC_3^+C_2+b^+C_2^+C_3)\\&+\sum_k\omega_ka_k^+a_k+\sum_k\varepsilon_k\{a_k(C_2^+C_1+C_3^+C_2)+a_k^+(C_1^+C_2+C_2^+C_3)\}\end{aligned}$$

(2.3.118)

这里已令

$$\omega_0=E_2-E_1, \quad (E_2+E_1)/2=0 \qquad (\hbar=1) \tag{2.3.119}$$

其中 a^+, a 和 b^+, b 分别表示频率为 ω_α 和 ω_β 的激光光子的产生和湮没算符. a_k^+, a_k 则表示频率为 ω_k 的荧光光子的产生和湮没算符. 方程(2.3.118)式中第一和第二项表示原子的能量,第三和第四项代表激光场的能量,第五和第六项表示激光场与原子的相互作用能,第七项为荧光场的能量,最后一项代表荧光场与原子的相互作用能. ε_α 和 ε_β 是激光场与原子的耦合常数,ε_k 是荧光场与原子间的耦合常数.

二、与一强单色场和一弱单色场作用的三能级原子的共振荧光频谱分布

我们讨论频率为 ω_α 的激光场是强场,而频率为 ω_β 的激光场是弱场的情况. 也就是说,我们有

$$\langle a^+a\rangle \gg \langle b^+b\rangle \tag{2.3.120}$$

于是作为第一步可以把(2.3.118)式分解为两部分 H_0 和 H_1,其中

$$H_0=\omega_0(C_2^+C_2-C_1^+C_1)/2+E_3C_3^+C_3+\omega_\alpha a^+a+\omega_\beta b^+b$$
$$+\varepsilon_\alpha(a^+C_2C_1+a^+C_1^+C_2)+\sum_k\omega_k a_k^+a_k \tag{2.3.121}$$

其余部分 H_1 则相对地较小,可以作为微扰部分. 现在推广前面采用的修饰变换理论,给出系统中由强激光场修饰的修饰原子的表示. 这里采用的规范变换算符为

$$T=\exp\{-\theta(4N)^{-1/2}(aC_2^+C_1-a^+C_1^+C_2)\} \tag{2.3.122}$$

其中

$$N=a^+a+(C_2^+C_2-C_1^+C_1)/2+1/2 \tag{2.3.123}$$

用算符 T 对 H_0 执行幺正变换,应用玻色算符 a, a^+ 的对易关系及

规则(2.3.117)式，考虑强场近似并选取

$$\theta = \operatorname{arctg}[2\varepsilon_a N^{1/2}/(\omega_0 - \omega_a)] \tag{2.3.124}$$

最后可得

$$\begin{aligned} T^{-1}H_0T &= H_0 + [-\theta(4N)^{-1/2}][H_0, aC_2^+C_1 - a^+C_1^+C_2] \\ &\quad -(1/2!)[-\theta(4N)^{-1/2}]^2 \\ &\quad \times[[H_0, aC_2^+C_1 - a^+C_1^+C_2], aC_2^+C_1 - a^+C_1^+C_2] + \cdots \\ &= (\omega_a - \Delta)(C_2^+C_2 - C_1^+C_1)/2 + E_3C_3^+C_3 \\ &\quad + \omega_a a^+a + \omega_\beta b^+b + \sum_k \omega_k a_k^+ a_k \end{aligned} \tag{2.3.125}$$

其中

$$\Delta = \sqrt{(\omega_0 - \omega_a)^2 + 4\varepsilon_a^2 N} \tag{2.3.126}$$

这样通过修饰幺正变换，已在形式上消去了强激光场与原子的相互作用部分

$$\varepsilon_a(aC_2^+C_1 + a^+C_1^+C_2)$$

而强激光场的效应则包含于 Δ 中. 这就是说，修饰变换把原子与激光场的相互作用混合起来. 所以(2.3.125)式可看作为由频率为 ω_a 的激光场所修饰的三能级原子系统的哈密顿量. 下面再来研究在这种修饰原子表示中，(2.3.121)式中微扰部分 H_1 的效应：

$$\begin{aligned} H_1 &= \varepsilon_\beta(bC_3^+C_2 + b^+C_2^+C_3) \\ &\quad + \sum_k \varepsilon_k\{a_k(C_2^+C_1 + C_3^+C_2) + a_k^+(C_1^+C_2 + C_2^+C_3)\} \end{aligned} \tag{2.3.127}$$

由于算符 T 与 b^+，b，a_k 和 a_k^+ 均可对易，所以对 H_1 执行 T 变换归结为对 $C_2^+C_3$，$C_1^+C_2$ 及其共轭算符的幺正变换. 考虑到 $\langle a^+a\rangle = \bar{n} \gg 1$，因而可略去 $0(N^{-1/2})$ 和 $0(N^{-1})$ 等小量项，则有

$$\begin{aligned} T^{-1}C_2^+C_3T &= C_2^+C_3 - \theta(4N)^{-1/2}[C_2^+C_3, aC_2^+C_1 \\ &\quad - a^+C_1^+C_2] + (1/2!)[-\theta(4N)^{-1/2}]^2 \\ &\quad \times[[C_2^+C_3, aC_2^+C_1 - a^+C_1^+C_2], aC_2^+C_1 - a^+C_1^+C_2] \end{aligned}$$

$$+\cdots$$

$$=\cos(\theta/2)C_2^+C_3-N^{-1/2}\sin(\theta/2)a^+C_1^+C_3 \quad (2.3.128)$$

类似地可得知 $T^{-1}C_3^+C_2T$，$T^{-1}C_2^+C_1T$ 的表达式，将它们一并代入对 H_1 的变换式，最后可得

$$\begin{aligned}
T^{-1}HT &= T^{-1}H_0T+T^{-1}H_1T=\frac{1}{2}(\omega_0-\Delta)(C_2^+C_2-C_1^+C_1) \\
&+E_3C_3^+C_3+\omega_0a^+a+\omega_\beta b^+b+\sum_k\omega_ka_k^+a_k \\
&+\varepsilon_\beta\{b[\cos(\theta/2)C_3^+C_2-\sin(\theta/2)\frac{1}{\sqrt{N}}aC_3^+C_1] \\
&+b^+[\cos(\theta/2)C_2^+C_3-\sin(\theta/2)\frac{1}{\sqrt{N}}a^+C_1^+C_3]\} \\
&+\sum_k\varepsilon_k\{a_k[(1/2)(\cos\theta+1)C_2^+C_1 \\
&+(1/2)\sin\theta\frac{1}{\sqrt{N}}a^+(C_2^+C_2-C_1^+C_1) \\
&+(1/2)(\cos\theta-1)\frac{1}{N}a^{+2}C_1^+C_2+\cos(\theta/2)C_3^+C_2 \\
&-\sin(\theta/2)\frac{1}{\sqrt{N}}aC_3^+C_1]+a_k^+[(1/2)(\cos\theta+1)C_1^+C_2 \\
&+(1/2)\sin\theta\frac{1}{\sqrt{N}}a(C_2^+C_2-C_1^+C_1) \\
&+(1/2)(\cos\theta-1)\frac{1}{N}a^2C_2^+C_1+\cos(\theta/2)C_2^+C_3 \\
&-\sin(\theta/2)\frac{1}{\sqrt{N}}a^+C_1^+C_3]\}
\end{aligned} \quad (2.3.129)$$

由上式可知，通过幺正变换，虽然消除了系统的哈密顿量中强驱动场(ω_0)与原子的相互作用项，但弱激光场(ω_β)与原子的相互作用项以及荧光场与原子的相互作用项则变得较为复杂. 实际上，这种"复杂性"是由于强驱动场与原子的相互作用的效应，它通过新因子 θ 与 N 的出现而体现出来. 然而，剖析这种较复杂的相互作用项的特征，可以把强驱动场导致的系统的某些物理过程较为明显地揭示出来.

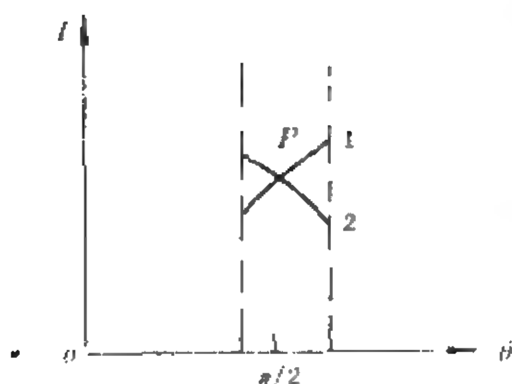


图 2.3.7 曲线1表示双光子过程振幅[依赖于 $\sin(\theta/2)$]随 θ(对应于 $\delta\omega$)的变化;曲线 2 表示单光子过程振幅[依赖于 $\cos(\theta/2)$]随 θ 的变化;P 点对应共振时的情况

最明显的一种是哈密顿量(2.3.129)式所反映的双光子吸收过程,那就是原子由态 $|1\rangle$ 到态 $|3\rangle$ 间的跃迁同时,伴随有 β 和 α 光子的湮没过程,以及原子在态 $|1\rangle$ 和态 $|2\rangle$ 间跃迁而发射荧光的过程中,伴随有双光子(两个 ω_a 光子)的吸收过程,这两种双光子吸收过程都极强地依赖于 $\sin(\theta/2)$. 图 2.3.7 表明了在近共振邻域,即 $\omega_0\approx\omega_a$,从而

$$\cos\theta=(\omega_0-\omega_a)/(2\varepsilon_a\sqrt{N})\approx 0$$

$$\sin(\theta/2)\approx 1/\sqrt{2}$$

时,双光子吸收过程的振幅与相应单光子吸收过程的振幅[它正比于 $\cos(\theta/2)$]相比较的情况. 可见,在 $\omega_0\approx\omega_a$ 邻域,随着驱动场频率的增高($\omega_0<\omega_a$),双光子吸收过程与相应的单光子吸收过程相比,前者将占优势;而随着驱动场的频率 ω_a 减小,双光子吸收过程减弱,至 $\omega_0>\omega_a$ 以后,双光子吸收过程的强度变得弱于相应的单光子吸收过程. 这表明双光子吸收过程的强度明显地依赖于原子的本征频率(ω_0)与驱动场频率(ω_a)的频差 $\delta\omega=\omega_0-\omega_a$.

现在来进一步讨论系统的荧光光谱特性,为此需要寻求荧光光子算符的时间演化. 在海森伯绘景中,a_k 满足的运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a_k=-i[a_k,H]=&-i\omega_k a_k-i\varepsilon_k[(1/2)(\cos\theta+1)C_1^{+}C_2\\&+(1/2)\sin\theta\frac{1}{\sqrt{N}}a(C_2^{+}C_2-C_1^{+}C_1)\\&-(1/2)(\cos\theta-1)\frac{1}{N}a^2C_2^{+}C_1\\&-\cos(\theta/2)C_2^{+}C_3-\sin(\theta/2)\frac{1}{\sqrt{N}}a^{+}C_1^{+}C_3]\end{aligned}\qquad(2.3.130)$$

它的解为

$$a_k(t)=a_k(0)\exp(-i\omega_k t)-i\varepsilon_k\int_0^t[(1/2)(\cos\theta+1)C_1^+C_2$$

$$-(1/2)\sin\theta\frac{1}{N}a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)$$

$$+(1/2)(\cos\theta-1)\frac{1}{N}a^2C_2^+C_1+\cos(\theta/2)C_2^+C_3$$

$$-\sin(\theta/2)\frac{1}{\sqrt{N}}a^+C_1^+C_3]_{t-\tau}\exp(-i\omega_k\tau)d\tau$$

(2.3.131)

为得出(2.3.131)式右边第二项积分，需要给出算符$C_1^+C_2$，$a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)$，$a^2C_2^+C_1$，$C_2^+C_3$和$a^+C_1^+C_3$的时间演化表示. 若取零级近似(即仅计及H中的H_0部分)，则从它们的海森伯方程可求得

$$C_1^+C_2=(C_1^+C_2)_0\exp[-i(\omega_a-\Delta)t]$$
$$a^2C_2^+C_1=(a^2C_2^+C_1)_0\exp[-i(\omega_a+\Delta)t]$$
$$a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)=a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)_0\exp[-i\omega_a t]$$
$$C_2^+C_3=(C_2^+C_3)_0\exp\{-i[E_3-(\omega_a-\Delta)/2]t\}$$
$$a^+C_1^+C_3=(a^+C_1^+C_3)_0\exp\{-i[E_3-(\omega_a+\Delta)/2]t\}$$

(2.3.132)

把方程(2.3.132)式代入(2.3.131)式，则有

$$a_k(t)=a_k(0)\exp(-i\omega_k t)+\varepsilon_k\{(1/2)(\cos\theta+1)(C_1^+C_2)_t$$

$$\times[p\left(\frac{1}{\omega_a-\Delta-\omega_k}\right)-i\pi\delta(\omega_a-\Delta-\omega_k)]$$

$$+(1/2)(\cos\theta-1)\frac{1}{N}(a^2C_2^+C_1)_t[P\left(\frac{1}{\omega_a+\Delta-\omega_k}\right)$$

$$-i\pi\delta(\omega_a+\Delta-\omega_k)]+\cdots\}$$

(2.3.133)

(2.3.133)式中的主部函数对应能级的微小兰姆移位，作为近似我们可以忽略它. 由于ε_k是k模式荧光场与原子的耦合常数，所以$\sum_k\varepsilon_k a_k$正比于原子辐射的荧光场的振幅. 于是有

$$E(t) \propto \sum_k \varepsilon_k a_k(0)\exp(-i\omega_k t) - i\gamma_1(1/2)(\cos\theta + 1)C_1^+ C_2$$

$$- i\gamma_2(\cos\theta - 1)\frac{1}{N}a^2 C_2^+ C_1 - i\gamma_3 \frac{1}{2}\sin\theta \frac{1}{\sqrt{N}}a(C_2^+ C_2 - C_1^- C_1)$$

$$- i\gamma_4\cos(\theta/2)C_2^- C_3 + i\gamma_5\sin(\theta/2)\frac{1}{\sqrt{N}}a^- C_1^+ C_3 \tag{2.3.134}$$

其中

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(\omega_a - \Delta - \omega_k) \\
\gamma_2 &= \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(\omega_a + \Delta - \omega_k) \\
\gamma_3 &= \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(\omega_a - \omega_k) \\
\gamma_4 &= \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta[E_3 - (\omega_a - \Delta)/2 - \omega_k] \\
\gamma_5 &= \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta[E_3 - (\omega_a + \Delta)/2 - \omega_k]
\end{aligned} \tag{2.3.135}$$

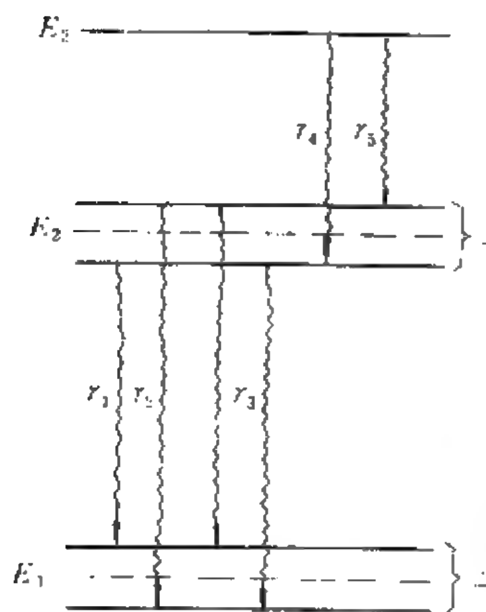


图 2.3.8　在一强单色场和一弱单色场驱动下，修饰三能级原子的本征能级和荧光跃迁

分别对应修饰原子辐射率. 这样在修饰原子能级间，相应的荧光跃迁可以如图 2.3.8 中带箭头的曲线所示.

辐射的荧光光谱由 ω_k 分别为 $\omega_a - \Delta$，$\omega_a + \Delta$，ω_a，$E_3 - (\omega_a - \Delta)/2$ 和 $E_3 - (\omega_a + \Delta)/2$ 的五条谱线组成. 由(2.3.134)式不难看出，谱线的强度[它可由 $E^*(t) \times E(t)$ 给出]和宽度均通过参量 θ 和 Δ 而与驱动场强度以及激光场频率和原子两低能级本征频率差 $\delta\omega$ 密切相关.

三、在双强单色场作用下三能级原子的共振荧光频谱分布

前面研究了三能级原子与一强单色场和一弱单色场作用时，原子的共振荧光频谱分布情况，如果三能级原子与频率 ω_α 和 ω_β 的两个强单色激光场作用，那么此时原子的共振荧光光谱分布情况怎样？下面来讨论这个问题.

描述系统的哈密顿量仍与方程(2.3.118)式相同，系统的能级也仍如图 2.3.6 所示，但此时双色激光场均是高功率的，即

$$\langle a^+ a\rangle \gg 1, \qquad \langle b^+ b\rangle \gg 1 \tag{2.3.136}$$

为简化运算，我们把哈密顿量(2.3.118)式分解为两部分 H_0 和 H_1 之和，其中

$$\begin{aligned} H_0 &= \omega_0(C_2^+ C_2 - C_1^+ C_1)/2 + E_3 C_3^+ C_3 + \omega_\alpha a^+ a + \omega_\beta b^+ b \\ &+ \varepsilon_\alpha(a C_2^+ C_1 + a^+ C_1^+ C_2) + \varepsilon_\beta(b C_3^+ C_2 + b^+ C_2^+ C_3) + \sum_k \omega_k a_k^+ a_k \end{aligned} \tag{2.3.137}$$

考虑到耦合常数对激光频率的依赖性很小，在上式中可令 $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon$.

$$H_1 = \sum_k \varepsilon_k \{a_k(C_2^+ C_1 + C_3^+ C_2) + a_k^+ (C_1^+ C_2 + C_2^+ C_3)\} \tag{2.3.138}$$

为将哈密顿量 H_0 对角化，我们选用幺正变换算符为

$$\begin{aligned} T &= \exp\Big\{-\frac{\theta}{(4N)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times [(a C_2^+ C_1 - a^+ C_1^+ C_2) + (b C_3^+ C_2 - b^+ C_2^+ C_3)]\Big\} \\ &= \exp\left\{-\frac{\theta}{(4N)^{\frac{1}{2}}}(V_1 - V_2)\right\} \end{aligned} \tag{2.3.139}$$

其中

$$N = a^+ a + b^+ b - \frac{1}{2}(C_2^+ C_2 - C_1^+ C_1) + 3C_3^+ C_3/2 + 1/2 \tag{2.3.140}$$

是系统(原子加驱动场)的总激发数算符,θ 是待定参量算符. 应用幺正算符 T 先对 H_0 执行幺正变换,于是有

$$T^{-1}H_0T = H_0+\left(-\frac{1}{2}\theta N^{-1/2}\right)[H_0,V_1+V_2] + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\theta N^{-1/2}\right)^2[[H_0,V_1+V_2],V_1+V_2]+\cdots \tag{2.3.141}$$

由于两激光束都是高功率场,故可应用强场近似. 设

$$N\approx a^+a+b^+b\approx 2a^+a\approx 2b^+b \tag{2.3.142}$$

应用算符 a^+,a,b^+,b 以及 C_i^+,C_i 间的对易关系,并且选择 θ 满足等式:

$$\begin{aligned}&\sin(\theta/2)=2\varepsilon\sqrt{N}/\Delta,\quad \cos(\theta/2)=(\delta_\alpha+\delta_\beta)/\Delta,\\&\delta_\alpha=\omega_0-\omega_\alpha,\quad \delta_\beta=E_3-\omega_0/2-\omega_\beta,\\&\Delta=\sqrt{4\varepsilon^2N+(\delta_\alpha+\delta_\beta)^2}\end{aligned} \tag{2.3.143}$$

那么,不难得到 H_0 的表达式为

$$\begin{aligned}T^{-1}H_0T =& \frac{1}{2}\omega_0(C_2^+C_2-C_1^+C_1)+E_3C_3^+C_3+\omega_\alpha a^+a\\&+\omega_\beta b^+b+\frac{\delta_\alpha-\delta_\beta}{8}(C_3^+C_3-C_1^+C_1)(\cos\theta-1)\\&+\frac{\delta_\alpha+\delta_\beta}{8}(C_3^+C_3-C_1^+C_1)(\cos\theta-1)\\&-\frac{\delta_\beta-\delta_\alpha}{4N}(abC_3^+C_1+a^+b^+C_1^+C_3)(\cos\theta-1)\\&+\frac{1}{4\sqrt{N}}(\delta_\beta-\delta_\alpha)(V_1-V_2)\sin\theta\\&+\varepsilon\sqrt{N}(C_3^+C_3-C_1^+C_1)\sin(\theta/2)+\sum_k\varepsilon_ka_k^+a_k\end{aligned} \tag{2.3.144}$$

在共振情况下,$\cos(\theta/2)=0$. 于是得到

$$T^{-1}H_0T=\frac{1}{2}\omega_0C_2^+C_2-\left(\frac{1}{2}\omega_c+\frac{\Delta_0}{2}\right)C_1^+C_1+\left(E_3+\frac{\Delta_0}{2}\right)C_3^+C_3$$

$$+\omega_\alpha a^+a+\omega_\beta b^+b+\sum_k\omega_k a_k^+a_k \qquad (2.3.145)$$

其中

$$\Delta_0=2\varepsilon\sqrt{N} \qquad (2.3.146)$$

这样，通过修饰变换而从哈密顿量(2.3.118)式中消除了表征激光场与原子间的相互作用部分 $\varepsilon(aC_2^+C_1+a^+C_1^+C_2)$ 和 $\varepsilon(bC_3^+C_2+b^+C_2^+C_3)$，而激光场的效应则包含于参量 Δ_0 中，所以方程(2.3.145)式可看作频率为 ω_α 和 ω_β 的双激光场所修饰的原子的哈密顿量.

现在我们研究在这种修饰原子表示中原子与荧光相互作用项 H_1[(2.3.138)式描述]的效应. 采用强场近似，略去 $0(N^{-1})$ 和 $0(N^{-1/2})$ 等高阶小量，则得

$$T^{-1}C_1^+C_2T=\left[1+\frac{1}{4}(\cos\theta-1)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\right]C_1^+C_2$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)b^+C_1^+C_3$$

$$+\frac{1}{2N}(\cos\theta-1)a^2C_2^+C_1-\frac{1}{2N}(\cos\theta-1)ab^+C_2^+C_3$$

$$+\left[\frac{1}{N}\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)-\frac{1}{2N}(\cos\theta-1)\right]abC_3^+C_2$$

$$+N^{-3/2}\left[\frac{1}{2}\sin\theta-\sin\frac{\theta}{2}\right]a^2bC_3^+C_1 \qquad (2.3.147)$$

在共振情况下简化为

$$T^{-1}C_1^+C_2T=\frac{1}{2\sqrt{N}}a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)+\frac{1}{2\sqrt{N}}b^+C_1^+C_3$$

$$-\frac{1}{N}a^2C_2^+C_1+\frac{1}{N}ab^+C_2^+C_3$$

$$-\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}a^2bC_3^+C_1 \qquad (2.3.148)$$

类似地，我们有

$$T^{-1}C_3^+C_3T=\frac{1}{2\sqrt{N}}b(C_3^+C_3-C_2^+C_2)-\frac{1}{2\sqrt{N}}a^+C_1^+C_3$$
$$+\frac{1}{N}b^2C_3^+C_2-\frac{1}{N}a^+bC_1^+C_2$$
$$+\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}ab^2C_3^+C_1 \tag{2.3.149}$$

由方程(2.3.148)，(2.3.149)和(2.3.145)式，我们得到共振情况下系统的修饰哈密顿量为

$$T^{-1}HT=\frac{1}{2}\omega_0C_2^+C_2-\left(\frac{1}{2}\omega_0+\frac{\Delta_0}{2}\right)C_1^+C_1+\left(E_3+\frac{\Delta_0}{2}\right)C_3^+C_3$$
$$+\omega_a a^+a+\omega_\beta b^+b+\sum_k\omega_k a_k^+a_k+\sum_k\varepsilon_k$$
$$\times\left\{a_k^+\left[\frac{1}{2\sqrt{N}}a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)+\frac{1}{2\sqrt{N}}b^+C_1^+C_3\right.\right.$$
$$-\frac{1}{N}a^2C_2^+C_1+\frac{1}{N}ab^+C_2^+C_3-\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}a^2bC_3^+C_1$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{N}}b(C_3^+C_3-C_2^+C_2)-\frac{1}{2\sqrt{N}}a^+C_1^+C_3$$
$$\left.\left.+\frac{1}{N}b^2C_3^+C_2-\frac{1}{N}a^+bC_1^+C_2+\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}ab^2C_3^+C_1\right]+h.c.\right\}$$
$$\tag{2.3.150}$$

由此可以看到，虽然通过修饰幺正变换，我们已把原子与激光场的相互作用项从哈密顿量中消除，但是原子与荧光场的相互作用项则变成更为复杂的项.如前述的一样，正是这些复杂的项，使得由驱动场感应的荧光过程明显地揭示出来.为进一步了解这种过程，与上面相似，我们来讨论荧光算符的时间演化.

根据荧光算符 a_k 的海森伯方程，可得到

$$a_k(t)=a_k(0)\exp(-i\omega_kt)-i\varepsilon_k\int_0^t\left[\frac{1}{2\sqrt{N}}a(C_2^+C_2-C_1^+C_1)\right.$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{N}}b^+C_1^+C_3-\frac{1}{N}a^2C_2^+C_1$$

$$+\frac{1}{N}ab^{+}C_3^{+}C_1-\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}a^{+}bC_3^{+}C_1+\frac{1}{2\sqrt{N}}b(C_3^{+}C_3-C_2^{+}C_2)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{N}}a^{+}C_1^{+}C_3-\frac{1}{N}b^{2}C_1^{+}C_2-\frac{1}{N}a^{+}bC_1^{+}C_2$$

$$+\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}ab^{2}C_3^{+}C_1\Big]_{t-\tau}\exp(-i\omega_k\tau)d\tau \qquad (2.3.151)$$

上式积分中，算符乘积项的时间依赖关系可以通过它们的海森伯方程求出。若取零级近似，即略去哈密顿量(2.3.150)式中的非对角项，则得

$$[a(C_2^{+}C_2-C_1^{+}C_1)]_t=[a(C_2^{+}C_2-C_1^{+}C_1)]_0\exp(-i\omega_a t)$$

$$[bC_1^{+}C_3]_t=[bC_1^{+}C_3]_0\exp[-i(\omega_0/2+\Delta_0+E_3-\omega_\beta)t]$$

$$\vdots \qquad (2.3.152)$$

把(2.3.152)式代入(2.3.151)式，并积分得

$$a_k(t)=a_k(0)\exp(-i\omega_k t)+\varepsilon_k\Big\{\frac{1}{2\sqrt{N}}[a(C_2^{+}C_2-C_1^{+}C_1)]_t$$

$$\times\left[P\left(\frac{1}{\omega_a-\omega_k}\right)+i\pi\delta(\omega_a-\omega_k)\right]+\frac{1}{2\sqrt{N}}[bC_1^{+}C_3]_t$$

$$\times\Bigg[P\left(\frac{1}{E_3+\frac{1}{2}\omega_0+\Delta_0-\omega_\beta-\omega_k}\right)$$

$$+i\pi\delta(E_3+\omega_0/2+\Delta_0-\omega_\beta-\omega_k)\Bigg]+\cdots\Big\} \qquad (2.3.153)$$

由于(2.3.153)式中所含的主部函数部分仅使能级产生很小的兰姆移位，故可以略去它们。又因 ε_k 是 k 模式荧光场与原子的耦合常数，所以 $\sum_k \varepsilon_k a_k$ 正比于原子辐射的荧光场强，于是有

$$E(t)\propto\sum_k\varepsilon_k a_k(t)=\sum_k\varepsilon_k a_k(0)\exp(-i\omega_k t)$$

$$-i\gamma_1\frac{1}{2\sqrt{N}}a(C_2^{+}C_2$$

$$-C_1^{+}C_1)-i\gamma_2\frac{1}{2\sqrt{N}}b^{+}C_1^{+}C_3$$

$$
\begin{aligned}
&+ i\gamma_3 \frac{1}{N} a^2 C_2^{+} C_1 \\
&- i\gamma_4 \frac{1}{N} a b^{+} C_2^{+} C_3 + i\gamma_5 \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} a^2 b C_3^{+} C_1 \\
&- i\gamma_6 \frac{1}{2\sqrt{N}} b (C_3^{+} C_3 - C_2^{+} C_2) \\
&+ i\gamma_7 \frac{1}{2\sqrt{N}} a^{+} C_1^{+} C_3 \\
&- i\gamma_8 \frac{1}{N} b^2 C_3^{+} C_2 + i\gamma_9 \frac{1}{N} a^{+} b C_1^{+} C_2 \\
&- i\gamma_{10} \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} a b^2 C_3^{+} C_1 \qquad (2.3.154)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(\omega_\alpha - \omega_k) \\
\gamma_2 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(E_3 + \omega_0/2 + \Delta_0 - \omega_\beta - \omega_k) \\
\gamma_3 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(2\omega_\alpha - \omega_0 - \Delta_0/2 - \omega_k) \\
\gamma_4 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(E_3 + \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_0/2 + \Delta_0/2 - \omega_k) \\
\gamma_5 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(2\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_0/2 - E_3 - \Delta_0 - \omega_k) \\
\gamma_6 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(\omega_\beta - \omega_k) \\
\gamma_7 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(E_3 - \omega_\alpha + \omega_0/2 - \Delta_0 - \omega_k) \\
\gamma_8 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(2\omega_\beta + \omega_0/2 - E_3 - \Delta_0/2 - \omega_k) \\
\gamma_9 &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(\omega_3 + \omega_\beta - \omega_\alpha + \Delta_0/2 - \omega_k) \\
\gamma_{10} &= \pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(2\omega_\beta + \omega_\alpha - E_3 - \omega_0/2 - \Delta_0 - \omega_k)
\end{aligned}
\qquad (2.3.155)
$$

显然，这些 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,10)$ 对应如图 2.3.9 所示的修饰原子能级间的自发发射率，图中带箭头的线表示所允许的荧光辐射.

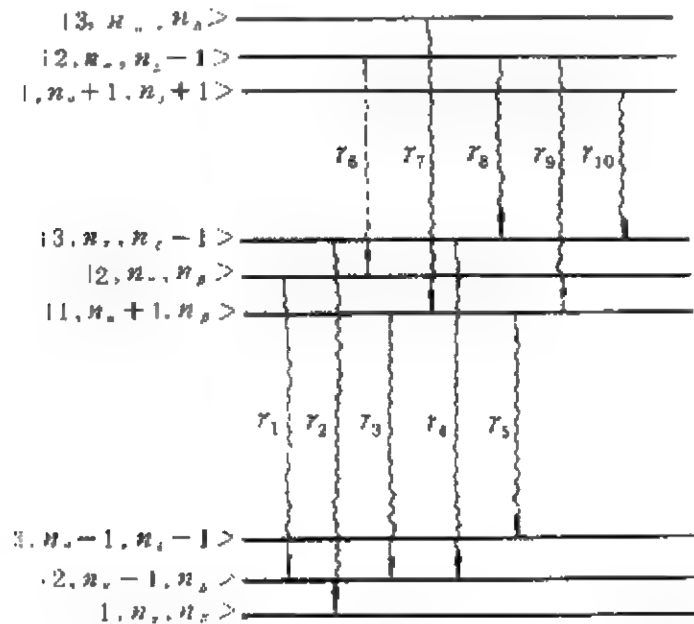


图 2.3.9　双强单色场驱动下，修饰三能级原子的本征能级和荧光跃迁

根据上述结果，我们看到当两激光场的频率差 $\delta\omega > 2\Delta_0$ 时，共振荧光频谱由围绕频率 ω_α 和 ω_β 对称分布的十条谱线组成，并且若频差 $\delta\omega=\omega_\alpha-\omega_\beta$ 小于 Δ_0，荧光频带将出现交叠，如果 $\delta\omega=\Delta_0$，那么系统的荧光分布将由七条谱线组成，而当 $\delta\omega=0$ 时，即 $\omega_\alpha=\omega_\beta$ 时，我们得到精确的五条频带荧光分布：

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_6 = \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(\omega_\alpha-\omega_k) \\
\gamma_2 &= \gamma_7 = \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(E_3+\omega_0/2+2\Delta_0-\omega_\beta-\omega_k) \\
\gamma_3 &= \gamma_8 = \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(2\omega_\alpha-\omega_0-\Delta_0-\omega_k) \\
\gamma_4 &= \gamma_9 = \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(\omega_0+\Delta_0-\omega_k) \\
\gamma_5 &= \gamma_{10} = \pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta(3\omega_\alpha-2\omega_0-2\Delta_0-\omega_k)
\end{aligned} \tag{2.3.156}$$

显然上述讨论给出的关于三能级原子共振荧光频谱由十条谱带组

成的结论是具有普遍性的. 而关于三能级原子的共振荧光由七谱带和五谱带组成的结果只是上面所给结果的两种特殊情况.

第三节　单原子共振荧光的密度矩阵描述

按第一篇第五章的理论，这里如果我们把真空场看作库，而把原子看作为小系统，那么由哈密顿量(2.3.1)式和(2.3.118)式描述的二能级原子和三能级原子的共振荧光问题完全可以利用小系统与库耦合的密度矩阵理论来处理. 下面我们以与强激光场相互作用的二能级原子系统为例，利用密度矩阵理论来讨论原子的共振荧光问题.

为计算简单起见，同前面一样，这里也假设激光场是高功率的，激光场可以用经典电磁场来描述，这时系统的哈密顿量表示为

$$H = H_{A} + H_{AL} + H_{R} + H_{RS} \tag{2.3.157}$$

式中

$$H_{A} = \omega_0 S_z \tag{2.3.158a}$$

$$H_{AL} = \varepsilon(E e^{-i\omega t} S_{+} + E e^{i\omega t} S_{-}) \tag{2.3.158b}$$

$$H_{R} = \sum_k \omega_k a_k^{+} a_k \tag{2.3.158c}$$

$$H_{RS} = \sum_k \varepsilon_k (a_k^{+} S_{-} + a_k S_{+}) \tag{2.3.158d}$$

这里 E 表示频率为 ω 的电场的幅值，并假设它不随时间变化，H_A 表征原子的能量，H_{AL} 表示强激光场与原子的相互作用能，H_R 代表荧光场的能量，H_{RS} 表征荧光场与原子的相互作用能. 在相互作用绘景中，由(1.5.68)式可知原子的密度矩阵 ρ 遵循

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_{AL}^{I}, \rho] + \frac{\Gamma}{2}(2S_{-}\rho S_{+} - \rho S_{+}S_{-} - S_{+}S_{-}\rho) \tag{2.3.159}$$

式中 Γ 代表原子自发发射的速率，由(1.4.43)式可知，它满足

$$\Gamma = 2\pi \sum_k \varepsilon_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0) \tag{2.3.160}$$

在共振情况下($\omega=\omega_0$)，H_{AL}^{I}变为

$$H_{AL}^{I}=\Omega(S_{+}+S_{-}) \tag{2.3.161}$$

其中已令 $\Omega=\epsilon E$. 也可把(2.3.159)式形式上写成

$$\frac{d}{dt}\rho=\mathscr{L}\rho \tag{2.3.162}$$

这里 $\mathscr{L}$ 称为广义刘维算符，它定义为

$$\mathscr{L}M=-i[H_{AL}^{I},M]+\frac{\Gamma}{2}(2S_{-}MS_{+}-MS_{+}S_{-}-S_{+}S_{-}M) \tag{2.3.163}$$

式中 M 为此系统的任意算符. 显然它的时间演化方程也可一般地写为

$$\frac{d}{dt}M=\mathscr{L}M \tag{2.3.164}$$

如果以 $|+\rangle$，$|-\rangle$ 代表裸原子的激发态和基态，那么在相互作用绘景中，可利用本征值方程

$$H_{AL}^{I}|i\rangle=E_i|i\rangle \tag{2.3.165}$$

求得激光场与原子耦合系统的本征态，即修饰态. 不难得知耦合系统的本征值和相应的修饰态为

$$E_1=-\Omega,\qquad |1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle-|-\rangle) \tag{2.3.166}$$

$$E_2=\Omega,\qquad |2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle) \tag{2.3.167}$$

这样，在修饰态表象中原子的密度矩阵 ρ 可表示为

$$\rho=\begin{bmatrix}\rho_{22} & \rho_{21}\\ \rho_{12} & \rho_{11}\end{bmatrix} \tag{2.3.168}$$

将(2.3.166)—(2.3.168)式代入(2.3.159)式，即得密度矩阵元 $\rho_{ij}(i,j=1,2)$的时间演化方程：

$$\dot{\rho}_{22}=-\frac{\Gamma}{4}\rho_{22}+\frac{\Gamma}{4}\rho_{11}$$

$$\dot{\rho}_{11}=-\frac{\Gamma}{4}\rho_{11}+\frac{\Gamma}{4}\rho_{22}$$

$$\dot{\rho}_{21}=-\frac{\Gamma}{2}\rho_{22}-\frac{\Gamma}{2}\rho_{11}-\left(\frac{3}{4}\Gamma+i2\Omega\right)\rho_{21}-\frac{\Gamma}{4}\rho_{12}$$

$$\dot{\rho}_{12}=-\frac{\Gamma}{2}\rho_{22}-\frac{\Gamma}{2}\rho_{11}-\frac{\Gamma}{4}\rho_{21}-\left(\frac{3}{4}\Gamma-i2\Omega\right)\rho_{12}$$

(2.3.169)

这里已利用了关系式：

$$S_+|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}S_+(|+\rangle-|-\rangle)=-\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle=-\frac{1}{2}(|2\rangle+|1\rangle)$$

$$S_+|2\rangle=\frac{1}{2}(|2\rangle+|1\rangle)$$

$$S_-|1\rangle=\frac{1}{2}(|2\rangle-|1\rangle)$$

$$S_-|2\rangle=\frac{1}{2}(|2\rangle-|1\rangle)$$

$$S_+S_-|1\rangle=\frac{1}{2}(|2\rangle+|1\rangle)$$

$$S_+S_-|2\rangle=\frac{1}{2}(|2\rangle+|1\rangle)$$

注意到在(2.3.78)式中计算荧光强度的稳恒分布时，实际上是计算时间关联函数

$$\langle S_+(t)S_-(t+\tau)\rangle_S=\mathrm{Tr}_S[\rho(t)S_+(t)S_-(t+\tau)]\exp(-i\omega_0\tau)$$

(2.3.170)

所以一旦我们由方程(2.3.169)式求得密度矩阵 $\rho(t)$ 以后，则可由(2.3.170)式以及(2.3.78)式得到共振荧光的强度分布. 由(2.3.164)式可知，$S_-(t+\tau)$ 也可形式地写成

$$S_-(t+\tau)=e^{\mathcal{L}\tau}S_-(t) \tag{2.3.171}$$

将(2.3.171)式代入(2.3.170)式，并利用 $\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$，则

$$\langle S_+(t)S_-(t+\tau)\rangle_S = \mathrm{Tr}_S S_-(t)e^{\mathscr{L}\tau}\rho(t)S_-(t)\exp(-i\omega_0\tau)$$

(2.3.172)

为计算(2.3.172)式中矩阵的迹，只有在算符 $e^{\mathscr{L}\tau}$ 的对角元表象中才比较便利. 很显然，在裸原子表象中 $e^{\mathscr{L}\tau}$ 不是对角化的，考虑到强场情况下$[H_{\mathrm{AL}}^{\mathrm{I}},\rho]$远大于$\frac{\Gamma}{2}(2S_-\rho S_+ - \rho S_+S_- - S_+S_-\rho)$，因此在修饰态表象中可近似认为 $e^{\mathscr{L}\tau}$ 是对角化的，这样(2.3.172)式的计算应在修饰态表象中进行. 依据(1.4.10)式，广义原子算符定义为

$$\sigma_{nm} = |n\rangle\langle m|$$

因而在修饰态表象中，原子的升、降算符的矩阵表示满足

$$D_+ = |2\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.3.173)$$

$$D_- = |1\rangle\langle 2| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.3.174)$$

$D_\pm$ 与 $S_\pm$ 之间的变换可通过一幺正变换算符 U 实现，即

$$D_+ = U^{-1}S_+U, \quad D_- = U^{-1}S_-U \qquad (2.3.175)$$

利用上式，将(2.3.172)式变换到修饰态表象中，则

$$\begin{aligned}
&\langle S_+(t)S_-(t+\tau)\rangle_S \\
&= \mathrm{Tr}_S UU^{-1}S_-(t)UU^{-1}e^{\mathscr{L}\tau}UU^{-1}\rho(t)UU^{-1}S_+(t) \\
&\quad \times UU^{-1}\exp(-i\omega_0\tau) \\
&= \mathrm{Tr}_S UD_-(t)U^{-1}e^{\mathscr{L}\tau}UU^{-1}\rho(t)UD_+(t)U^{-1}\exp(-i\omega_0\tau) \\
&= \mathrm{Tr}_S D_-(t)U^{-1}e^{\mathscr{L}\tau}UU^{-1}\rho(t)UD_+(t)\exp(-i\omega_0\tau)
\end{aligned}$$

(2.3.176)

以下为书写简单起见，我们将修饰态表象中的 $U^{-1}e^{\mathscr{L}\tau}U$，$U^{-1}\rho(t)U$ 仍用 $e^{\mathscr{L}\tau}$，$\rho(t)$表示，但须记住 $e^{\mathscr{L}\tau}$，$\rho(t)$已为修饰态表象中的算符. 这样(2.3.176)式简写为

$$\langle S_+(t)S_-(t+\tau)\rangle_S = \mathrm{Tr}_S D_-(t)e^{\mathscr{L}\tau}\rho(t)D_+(t)\exp(-i\omega_0\tau)$$
$$(2.3.177)$$

为计算(2.3.177)式，定义算符$\sum(\tau)$：

$$\sum(\tau) = e^{\mathscr{L}\tau}\sum(0) \qquad (2.3.178)$$

$$\sum(0) = \rho(t)D_+(t) \qquad (2.3.179)$$

从(2.3.178)和(2.3.179)式可知，$\sum(\tau)$可以有如下的矩阵表示：

$$\sum(\tau) = \begin{bmatrix} \sum_{22}(\tau) & \sum_{21}(\tau) \\ \sum_{12}(\tau) & \sum_{11}(\tau) \end{bmatrix} \qquad (2.3.180)$$

利用(2.3.174)、(2.3.178)及(2.3.180)式，则(2.3.177)式化为

$$\langle S_+(t)S_-(t+\tau)\rangle_S = \frac{1}{2}\{[\sum_{22}(\tau) - \sum_{11}(\tau)]$$
$$+ [\sum_{21}(\tau) + \sum_{12}(\tau)]\}\exp(-i\omega_0\tau) \qquad (2.3.181)$$

从上式看到，如果求解出$\sum_{ij}(\tau)(i,j=1,2)$，就可得到双时关联函数$\langle S_+(\tau)S_-(t+\tau)\rangle_S$. 为此需求出矩阵元$\sum_{ij}(\tau)$随时间的演化规律. 将(2.3.178)式两边对$\tau$求导，得到

$$\frac{d}{dt}\sum(\tau) = \mathscr{L}\sum(\tau) \qquad (2.3.182)$$

显然$\sum(\tau)$与$\rho(t)$遵循相同的方程(2.3.162)式，因此$\sum_{ij}(\tau)$和$\rho_{ij}(t)$的解具有相同的形式. 只不过它们的初始值不同而已. 为此下面我们来求解$\rho_{ij}(t)$的方程组(2.3.169)式. 定义矢量：

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \rho_{22}(t) - \rho_{11}(t) \\ \rho_{22}(t) - \rho_{11}(t) \\ \rho_{21}(t) + \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) - \rho_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_1(t) \\ \tilde{\rho}_2(t) \\ \tilde{\rho}_3(t) \\ \tilde{\rho}_4(t) \end{bmatrix} \qquad (2.3.183)$$

则方程组(2.3.169)式变为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_1 = 0 \\
&\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_2 = -\frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_2 \\
&\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_3 = -\Gamma\tilde{\rho}_1 - \Gamma\tilde{\rho}_3 - 2i\Omega\tilde{\rho}_4 \\
&\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_4 = -\frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_4 - 2i\Omega\tilde{\rho}_3
\end{aligned}
\tag{2.3.184}
$$

这是一阶线性微分方程组，容易求得其解为

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\rho}_1(t) = \tilde{\rho}_1(0) \\
&\tilde{\rho}_2(t) = \tilde{\rho}_2(0)\exp(-\Gamma t/2) \\
&\tilde{\rho}_3(t) = \frac{i}{2\Omega}\left(-\frac{1}{4}\Gamma + i\alpha\right)C_1\exp[(-3\Gamma/4 + i\alpha)t] \\
&\quad - \frac{i}{2\Omega}\left(\frac{1}{4}\Gamma + i\alpha\right)C_2\exp[(-3\Gamma/4 - i\alpha)t] - \frac{\frac{\Gamma^2}{2}}{4\Omega^2 + \frac{\Gamma^2}{2}}\tilde{\rho}_1(0) \\
&\tilde{\rho}_4(t) = C_1\exp[(-3\Gamma/4 + i\alpha)t] - C_2\exp[(-3\Gamma/4 - i\alpha)t] \\
&\qquad + \frac{2i\Omega\Gamma}{4\Omega^2 + \frac{\Gamma^2}{2}}\tilde{\rho}_1(0)
\end{aligned}
\tag{2.3.185}
$$

其中

$$
\alpha = \sqrt{4\Omega^2 - (\gamma/4)^2}
$$

$$
C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i\Gamma}{4\alpha}\right)\tilde{\rho}_4(0) + \frac{\Omega}{\alpha}\tilde{\rho}_3(0) - \frac{i}{2}\frac{\Omega\Gamma}{4\Omega^2 + \Gamma^2/2}\left(1 - i\frac{3\Omega}{4\alpha}\right)\tilde{\rho}_1(0)
$$

$$
C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\Gamma}{4\alpha}\right)\tilde{\rho}_4(0) - \frac{\Omega}{\alpha}\tilde{\rho}_3(0) - \frac{i}{2}\frac{\Omega\Gamma}{4\Omega^2 + \Gamma^2/2}\left(1 - i\frac{3\Omega}{4\alpha}\right)\tilde{\rho}_1(0)
$$

式中 $\tilde{\rho}_i(0)(i=1,2,3,4)$ 是与密度矩阵元的初始值 $\rho_{ij}(0)$ 有关的量.

由于 $\sum_{ij}(\tau)$ 遵循与 $\rho_{ij}(t)$ 相同的方程，因此 $\sum_{ij}(\tau)$ 的解具有

与(2.3.185)式相同的形式.但须注意此时的 $\rho_i(0)$ 这些与 $\rho_{ij}(0)$ 有关的量应相应地改为与 $\sum_{ij}(0)$ 有关的量.考虑到(2.3.179),(2.3.168)及(2.3.174)式,则

$$
\begin{aligned}
\sum(0) &= \rho(t)D_1(t) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \rho_{22}(t)+\rho_{21}(t) & -[\rho_{22}(t)+\rho_{21}(t)] \\ \rho_{12}(t)+\rho_{11}(t) & -[\rho_{12}(t)+\rho_{11}(t)] \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.3.186}
$$

与定义 $\tilde{\rho}(t)$ 相似,定义矢量:

$$
\tilde{\sum}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sum_{22}(t)+\sum_{11}(t) \\ \sum_{22}(t)-\sum_{11}(t) \\ \sum_{21}(t)+\sum_{12}(t) \\ \sum_{21}(t)-\sum_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\sum}_1(t) \\ \tilde{\sum}_2(t) \\ \tilde{\sum}_3(t) \\ \tilde{\sum}_4(t) \end{bmatrix}
\tag{2.3.187}
$$

则 $\tilde{\sum}(\tau)$ 的初始值为

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sum}(0) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \rho_{22}(t)+\rho_{21}(t)-[\rho_{11}(t)+\rho_{12}(t)] \\ \rho_{22}(t)+\rho_{21}(t)+\rho_{11}(t)+\rho_{12}(t) \\ \rho_{11}(t)+\rho_{12}(t)-[\rho_{22}(t)+\rho_{21}(t)] \\ -[\rho_{21}(t)+\rho_{12}(t)+\rho_{22}(t)+\rho_{11}(t)] \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \tilde{\rho}_1(t)+\tilde{\rho}_4(t) \\ \tilde{\rho}_2(t)+\tilde{\rho}_3(t) \\ -\tilde{\rho}_2(t)-\tilde{\rho}_4(t) \\ -\tilde{\rho}_1(t)-\tilde{\rho}_3(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.3.188}
$$

由(2.3.185)式,则 $\tilde{\sum}_2(\tau)$, $\tilde{\sum}_4(\tau)$ 可以表示为

$$
\tilde{\sum}_2(\tau) = \tilde{\sum}_2(0)\exp(-\Gamma t/2) \tag{2.3.189}
$$

$$\tilde{\sum}_1(\tau) = E_1(0)\exp[(-3\Gamma/4 + i\alpha)\tau] + E_2(0)\exp[(-3\Gamma/4 - i\alpha)\tau] + \frac{2i\Omega\Gamma}{4\Omega^2 + \Gamma^2/2}\tilde{\sum}_1(0) \qquad (2.3.190)$$

式中

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i\Gamma}{4\alpha}\right)\tilde{\sum}_1(0) + \frac{\Omega}{\alpha}\tilde{\sum}_3(0) - \frac{i}{2}\frac{\Omega\Gamma}{4\Omega^2 + \Gamma^2/2}\left(1 + i\frac{3\Omega}{4\alpha}\right)\tilde{\sum}_1(0)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\Gamma}{4\alpha}\right)\tilde{\sum}_1(0) - \frac{\Omega}{\alpha}\tilde{\sum}_3(0) - \frac{i}{2}\frac{\Omega\Gamma}{4\Omega^2 + \Gamma^2/2}\left(1 - i\frac{3\Omega}{4\alpha}\right)\tilde{\sum}_1(0)$$

从(2.3.102)~(2.3.108)式的讨论看到，由于观测时间 $t \gg \Gamma^{-1}$，因此我们测量的实际上是稳态的荧光分布. 于是由(2.3.188)和(2.3.185)式可知 $\tilde{\sum}_i(0)$ 为

$$\tilde{\sum}_1(0) = \frac{1}{2}[\tilde{\rho}_2(\infty) + \tilde{\rho}_1(\infty)] = \frac{i\Omega\Gamma}{4\Omega^2 + \Gamma^2/2}\tilde{\rho}_1(0) = -\tilde{\sum}_3(0) \qquad (2.3.191)$$

$$\tilde{\sum}_2(0) = \frac{4\Omega^2}{8\Omega^2 + \Gamma^2}\tilde{\rho}_1(0) = -\tilde{\sum}_4(0) \qquad (2.3.192)$$

上式中 $\tilde{\rho}_1(0)$ 为

$$\tilde{\rho}_1(0) = \frac{1}{2}[\rho_{22}(0) + \rho_{11}(0)] = \frac{1}{2} \qquad (2.3.193)$$

如果这里仅考虑激光场很强的情况，即 $\Omega^2/\Gamma^2 \gg 1$，则(2.3.189)，(2.3.190)式简化为

$$\tilde{\sum}_2(\tau) = \frac{1}{4}\exp(-\Gamma\tau/2) \qquad (2.3.194)$$

$$\tilde{\sum}_4(\tau) = -\frac{1}{8}\exp[(-3\Gamma/4 + i2\Omega)\tau]$$

$$- \frac{1}{8}\exp[(-3\Gamma/4 - i2\Omega)\tau] - \frac{1}{4}\frac{\Gamma^2}{4\Omega^2 + \Gamma^2/2}$$

(2.3.195)

将(2.3.194),(2.3.195)式一并代入(2.3.181)式,得

$$\langle S_+(t)S_-(t+\tau)\rangle_S = \left[\tilde{\sum}_2(\tau) - \tilde{\sum}_4(\tau)\right]\exp(-i\omega_0\tau)$$

$$\left\{\frac{1}{4}\exp(-\Gamma\tau/2) + \frac{1}{8}\exp[(-3\Gamma/4 + i2\Omega)\tau]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\exp[(-3\Gamma/4 - i2\Omega)\tau] + \frac{\frac{\Gamma^2}{2}}{8\Omega^2 + \Gamma^2}\right\}e^{-i\omega_0\tau}$$

(2.3.196)

这样我们求出了稳态时的双时关联函数值.将(2.3.196)式代入(2.3.74)式,并利用与(2.3.102)-(2.3.107)式相同的步骤,则得

$$\langle a_k^+ a_k\rangle = 2\varepsilon_k^2\mathrm{Re}\int_0^t dt\int_0^\infty d\tau\langle S_+(t)S_-(t+\tau)\rangle_S\exp(i\omega_k\tau)$$

$$= 2\varepsilon_k^2 t\mathrm{Re}\int_0^\infty d\tau\left\{\frac{1}{4}e^{[-\frac{\Gamma}{2}+i(\omega_k-\omega_0)\tau]} + \frac{1}{8}e^{[-\frac{3}{4}\Gamma+i(\omega_k-\omega_0+2\Omega)\tau]}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}e^{[-\frac{3}{4}\Gamma+i(\omega_k-\omega_0-2\Omega)\tau]} + \frac{\Gamma^2}{2}\frac{1}{8\Omega^2+\Gamma^2}e^{i(\omega_k-\omega_0)\tau}\right\}$$

$$= \frac{t\Gamma}{4}\varepsilon_k^2\left\{\frac{1}{4}\frac{3}{(\omega_k-\omega_0+2\Omega)^2+(\frac{3}{4}\Gamma)^2} + \frac{1}{(\omega_k-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\frac{3}{(\omega_k-\omega_0-2\Omega)^2+\left(\frac{3}{4}\Gamma\right)^2} + \frac{4\Gamma^2}{8\Omega^2+\Gamma^2}2\pi\delta(\omega_k-\omega_0)\right\}$$

(2.3.197)

于是荧光辐射强度为

$$R_k = \frac{d}{dt}\langle a_k^+ a_k\rangle = \frac{\Gamma}{4}\varepsilon_k^2\left\{\frac{1}{4}\frac{3}{(\omega_k-\omega_0+2\Omega)^2+\left(\frac{3}{4}\Gamma\right)^2}\right.$$

$$+ \frac{1}{(\omega_k-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} + \frac{1}{4}\frac{3}{(\omega_k-\omega_0-2\Omega)^2+\left(\frac{3}{4}\Gamma\right)^2}$$

$$+\frac{4\Gamma^2}{8\Omega^2+\Gamma^2}2\pi\delta(\omega_s-\omega_0)\Bigg\} \tag{2.3.198}$$

注意到上式中的 Γ[由(2.3.160)式描述]和(2.3.110)式中的 γ[由(2.3.88)式描述]之间满足

$$\Gamma=2\gamma \tag{2.3.199}$$

因此(2.3.198)式中的前三项与(2.3.110)式完全一致.这就是说,利用密度矩阵描述共振荧光时,也得到了与实验结果相符的结论.

值得指出的是,(2.3.198)式中最后一项表征的是激光光子被原子弹性地散射到荧光真空场的过程,此时原子并未受激光场修饰,所以它对应弱场被裸原子吸收和发射的弹性散射过程.这一项在(2.3.110)式中没有出现,这是由于我们在(2.3.88)式中略去了 $l\neq m$ 的项所造成的。在强激光场情况下,即 $\Omega^2\gg\Gamma^2$ 时,这一项与前三项相比其幅值是一个小量,所以作为近似可以忽略.因此在强场情况下,(2.3.198)和(2.3.110)式两式是相符的.

参 考 文 献

[1] B. R. Mollow, *Phys. Rev.*, **18**, 1969 (1969).
[2] F. Schuda, C. E. Ju Stroud and M. Hercher, *J. Phys.*, **B7**, L198 (1974).
[3] H. J. Carmichael and D. F. Walls, *J. Phys.*, **B9**, 1199 (1976).
[4] H. J. Kimble and L. Mandel, *Phys. Rev.*, **A13**, 2123 (1976).
[5] H. J. Kimble, M. Dagenis and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 691 (1977).
[6] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *J. Phys.*, **B10**, 365 (1977).
[7] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *J. Phys.*, **B10**, 2311 (1977).
[8] G. Compagno and F. Persico, *Phys. Rev.*, **A22**, 2108 (1980).
[9] G. Compagno and F. Persico, *Phys. Rev.*, **A25**, 3138 (1982).
[10] G. Compagno, 彭金生, F. Persico, *Phys. Rev.*, **A26**, 2065 (1982).
[11] G. Compagno, 彭金生, F. Persico, *Phys. Lett.*, **A88**, 285 (1982).
[12] C. Leonardi, F. Persico and G. Vetri, Dicke model and theory of driven and spontaneous emission, La Rivista de Nuovo Cimento, 1986.
[13] C. Mavroyannis, *Physica*, **A110**, 431 (1982).
[14] Z. Fick, R. Tanas and S. Kielich, *Phys. Rev.*, **A29**, 2004 (1984).
[15] 彭金生,物理学报,**34**,408 (1985).
[16] P. T. H. Fisk, H. A. Bochor and R. J. Sandermen, *Phys. Rev.*, **A34**, 18 (1986).
[17] 彭金生,物理学报,**34**, 788 (1986).
[18] 彭金生, *Chinese Physics*, **6**, 941 (1986).
[19] H. J. Carmochel, A. S. Lane and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 2539

(1987).
[20] 彭金生,中国科学 A, No. 3, 331 (1988).
[21] 彭金生、黄湘友、刘武,物理学报,**38**, 1545 (1989).
[22] B. N. Jagatap, Q. V. Lawande and S. V. Lawande, *Phys. Rev.*, **A43**, 535 (1991).
[23] W. Vogel and R. Blatt, *Phys. Rev.*, **A45**, 3319 (1992).
[24] R. Vyas and S. Singh, *Phys. Rev.*, **A45**, 8095 (1992).
[25] T. Quang and F. Helen, *Phys. Rev.*, **A47**, 2285 (1993).
[26] 彭金生,共振荧光与超荧光,科学出版社,1993.

第四章　超荧光

超荧光(又称超辐射)是量子光学研究中十分重要的课题之一,这不仅由于它是一种基本的光学效应,在量子光学的理论中具有典型性,而且还由于它具有广泛的应用前景而受到重视.本章中,我们首先介绍超荧光的基本特征,然后着重介绍超荧光的准经典理论和量子理论描述,最后简要讨论超荧光拍的特征和理论.

第一节　超荧光的基本特征

超荧光是多原子(或分子)体系的合作自发发射效应.一般说来,若 N 个处于激发态的原子,当它们之间没有耦合而各自独立衰变时,总的发光强度 I 是与原子数 N 成正比的.辐射在空间各向同性,辐射场的强度 I 随时间 t 按指数规律衰变,如图 2.4.1 所示,衰减周期同单原子寿命 τ_{SP} 一样,这样的辐射一般是在稀薄原子蒸气中观测的结果.如果受激原子的密度增大,原子间距离减小,在这种情况下,多原子体系将因辐射场的耦合而形成一种合作的自发发射系统.这种辐射的特点之一是辐射呈脉冲型,如图 2.4.2(a)所示,峰值的强度极大,它正比于原子数的平方 N^2,而且峰值衰减极快,峰宽 T_R 为 τ_{SP}/N 量级.脉冲峰值是在激发原子的泵浦源切断后,延迟一段时间 T_D 以后才出现的,T_D 的大小约为 $\frac{1}{N}\tau\ln N$,但 T_D 数值大小有一定的不确定性.另一个特点是超荧光辐射有确定的方向,对于笔状样品,超荧光只沿正负轴的一个很小的方向角内辐射,如图 2.4.2(b)所示.

超荧光最先是狄克于 1954 年提出来的,他在研究集合原子系的自发发射时,从理论上揭示了这种称之为超辐射(即超荧光)的

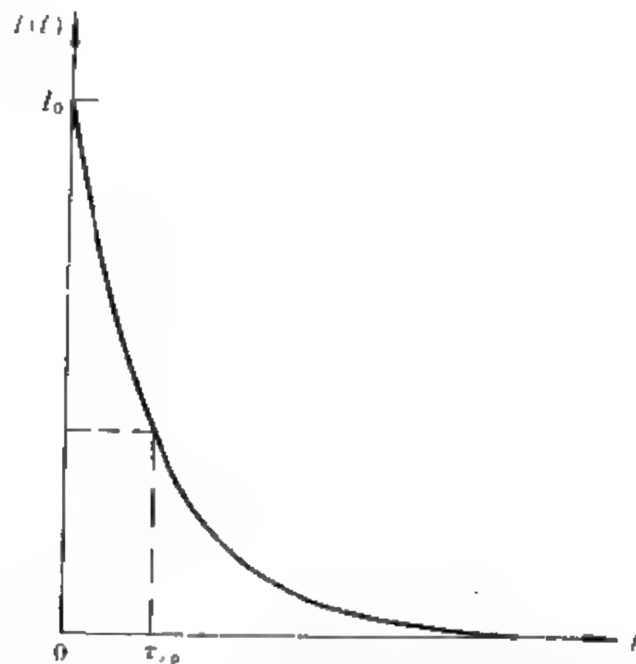


图 2.4.1　N 个受激原子各自独立自发发射系统的发射强度 I 随时间 t 的演化

基本光学效应.由于当时实验条件的限制,不可能形成集合原子的相干自发发射的条件,直到 70 年代初,随着激光技术的发展,出现了在实验上实现超荧光的可能性,因而再次引起人们从理论和实验两方面探讨超荧光的热情. 1973 年,Skribanowitz 及其合作者第一次从实验上观测到了超荧光现象,从而开拓了探讨超荧光的新局面.实验装置如图 2.4.3(a)所示,在一个没有反射镜的柱形腔中充以低压HF气体,通过激光泵浦HF气体,使其由基态 $|g\rangle$ 泵浦到激发态 $|e\rangle$[如图 2.4.3(b)所示],实现系统的粒子数反转,此后,系统由激发态 $|e\rangle$ 自发地衰变到第三态(终态)$|f\rangle$.由于没有反射镜,故系统无反馈,系统自发衰变的脉冲讯号通过检测器观测.实验结果表明,如狄克所预言的那样,观测到了如图 2.4.4 所示的超荧光脉冲.脉冲的强度比通常非相干自发发射系统输出大得多,且正比于 N^2.脉冲在泵浦停止以后的一段延迟时间 T_D 才出现,而脉冲本身宽度 T_R 很小,$T_R \ll T_D$,两者均远小于自发发射寿命 τ_{SP}.此外,输出脉冲有很高的方向性,对于笔状样品,它只

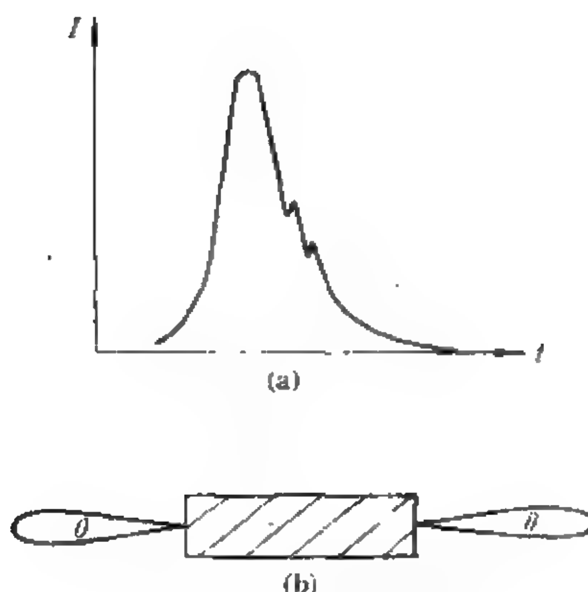


图 2.4.2 超荧光辐射图形
(a) 辐射强度 I 随时间 t 的演化
(b) 辐射强度沿腔轴正负向的分布

在前后两个方向上各分布于一小立体角 λ^2/A 的范围.其中 A 为笔状辐射体的横截面,λ 为辐射波长.理论上如何阐述超荧光的基本特征并揭示其内在规律性呢？下面将采用准经典理论和量子电动力学理论来加以讨论.

在进行理论处理之前,我们首先分析一下产生超荧光的物理过程.集合原子的自发发射之所以产生超荧光是由于它们通过与共同辐射场作用而彼此耦合,从而形成相干衰变.对于实现了粒子数完全反转的系统(即所有原子均处于它们的激发态),在初始时刻($t=0$),它们没有宏观极化,系统处于亚稳态.但由于自发发射和背景热辐射的作用,产生一小的微扰电场,这一小的电场又作为介质中产生附加极化的场源,进而导致更大的极化和更大的极化场源,原子间的偶极关联更强,此后迅速使整个系统实现宏观极化.宏观极化系统中各原子偶极矩之间的强关联,使它们的相位同步,从而导致极大的输出脉冲,峰值的强度与宏观偶极矩的振幅平

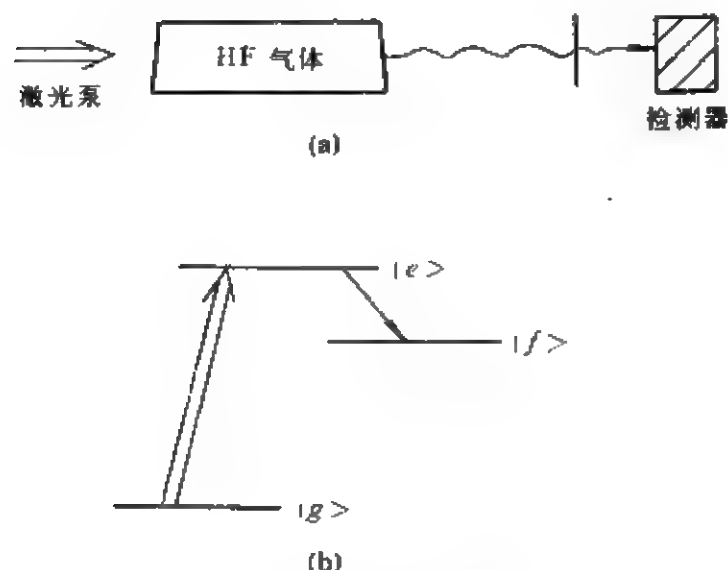


图 2.4.3 超荧光实验原理图
(a) 实验装置示意图
(b) 泵浦和跃迁能级示意图

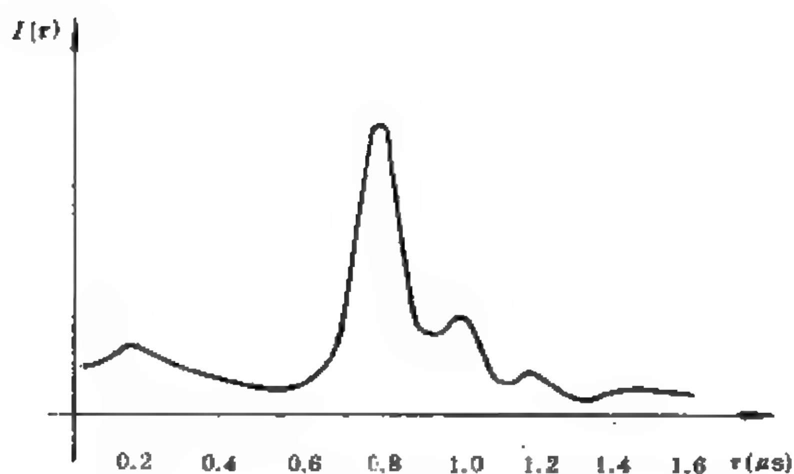


图 2.4.4 实验观测到的超荧光脉冲图形

方成正比，所以超荧光的强度正比于 N^2. 输出超荧光脉冲之后，系统的反转粒子数密度迅速减少，原子很快处于基态，辐射介质的极化消减. 但如果辐射体足够长，消减部分又可由于其他部分的辐射

场再度激发，进而极化，从而再次输出脉冲，但其脉冲强度较低，于是输出脉冲呈现衰减振荡，如图 2.4.5 所示，这种现象称之为超荧光的振铃(rings)效应.

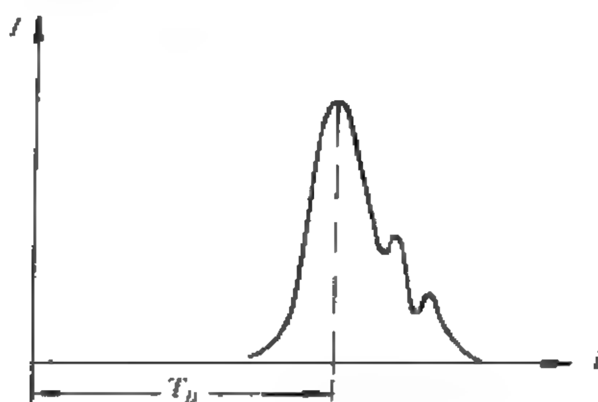


图 2.4.5　超荧光脉冲的振铃效应

振铃效应对偶极子的有序化有一些影响，消除它的方法是将辐射体的长度缩短到一定值 L_C，使得辐射体中的原子辐射光子以后，在它们还未回到稳定基态以前，所有的光子已离开了辐射体，从而没有光子再来激发该介质，这样就不会出现多次激发. 我们称 L_C 为合作长度，因此只有当辐射体长度 L 满足条件

$$L<L_C$$

时，才能消除振铃效应.

第二节　超荧光的准经典理论

现在来讨论 N 个原子集合系统在无外场情况下合作衰变行为的准经典理论描述. 我们知道，所谓准经典理论是指在讨论原子与辐射场相互作用系统时，场采用经典变量，而原子的行为则用量子力学算符来描述. 这里我们设有 N 个频率为 $\omega_l(l=1,2,3,\cdots,N)$的二能级原子，因此描述第 l 个原子与辐射场相互作用的哈密顿量应写为

$$H^{(l)}=\frac{1}{2}\hbar\omega_l\sigma_z^{(l)}-\boldsymbol{D}^{(l)}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)} \tag{2.4.1}$$

式中右边第一项为第 l 个原子的能量，第二项表示偶极矩为 $\boldsymbol{D}^{(l)}$ 的第 l 个原子与所在处的辐射场 $\boldsymbol{E}^{(l)}$ 的相互作用能. 显然偶极矩的期望值为

$$\boldsymbol{D}^{(l)}(t)=\langle e\boldsymbol{q}_l\rangle(t)=\boldsymbol{n}D^{(l)}(t) \tag{2.4.2}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是偶极矩的单位方向矢量. 在第 l 个原子处的场 $\boldsymbol{E}^{(l)}(t)$ 是所有 N 个原子在该处产生的辐射场的叠加：

$$\boldsymbol{E}^{(l)}(t) = \sum_{m=1}^{N}\boldsymbol{E}_{lm}(t) \tag{2.4.3}$$

按照经典电动力学，除第 l 个原子以外，其他 $N-1$ 个偶极子在第 l 个原子处所产生的辐射场为

$$\boldsymbol{E}_{lm}(t)=\left\{3\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}_{lm})}{R_{lm}^5}\boldsymbol{R}_{lm}-\frac{\boldsymbol{n}}{R_{lm}^3}\right\}D^{(m)}-\frac{2\omega_m^2}{3C^3}\boldsymbol{n}\dot{D}^{(m)} \tag{2.4.4}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_{lm}=\boldsymbol{r}_l-\boldsymbol{r}_m, R_{lm}=|\boldsymbol{R}_{lm}|$$

而第 l 个原子在其本身处产生的场为

$$\boldsymbol{E}_{ll}(t)=\frac{4\omega_l^2k_{\max}}{3\pi c^3}\boldsymbol{n}D^{(l)}-\frac{2\omega_l^2}{3c^3}\boldsymbol{n}\dot{D}^{(l)} \tag{2.4.5}$$

这里 $k_{\max}$ 为截止频率. 对于数量级为玻尔半径 a_0 的原子，它能辐射的最小波长 $\lambda=2\pi a_0$，依据 $\lambda\nu=c$，所以其截止频率为 $k_{\max}\approx c/a_0$.

现在我们由方程(2.4.1)式出发来讨论第 l 个原子的时间行为，若在(2.4.1)式中我们把偶极算符选为

$$\boldsymbol{D}^{(l)}=\boldsymbol{n}d\sigma_1^{(l)} \tag{2.4.6}$$

于是在(2.4.1)式中

$$H_1=-\boldsymbol{n}d\sigma_1^{(l)}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)} \tag{2.4.7a}$$

$$H_A=\frac{1}{2}\hbar\omega_l\sigma_3^{(l)} \tag{2.4.7b}$$

在相互作用绘景中，第 l 个原子的时间演化满足薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi^l(t)\rangle=\tilde{H}_1^{(l)}|\Psi^l(t)\rangle \tag{2.4.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1^{(l)}&=\exp(iH_At/\hbar)H_l\exp(-iH_At/\hbar)\\&=-\boldsymbol{nd}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}\exp(i\omega_l\sigma_3^{(l)}t/2)\sigma_1^{(l)}\exp(-i\omega_l\sigma_3^{(l)}t/2)\\&=-d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}[\sigma_+^{(l)}\exp(i\omega_lt)+\sigma_-^{(l)}\exp(-i\omega_lt)]\\&=-d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}[\sigma_1^{(l)}\cos\omega_lt-\sigma_2^{(l)}\sin\omega_lt]\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

这样，如果令原子算符的期望值 $S_i^{(l)}(t)=\langle\sigma_i^{(l)}(t)\rangle$，则可由海森伯方程组得

$$\frac{d}{dt}S_1^{(l)}(t)=-\frac{2}{\hbar}d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}\sin\omega_ltS_3^{(l)}(t) \tag{2.4.10a}$$

$$\frac{d}{dt}S_2^{(l)}(t)=-\frac{2}{\hbar}d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}\cos\omega_ltS_3^{(l)}(t) \tag{2.4.10b}$$

$$\frac{d}{dt}S_3^{(l)}(t)=-\frac{2}{\hbar}d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}\cos\omega_ltS_2^{(l)}(t)+\frac{2}{\hbar}d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}\sin\omega_ltS_1^{(l)}(t) \tag{2.4.10c}$$

所以描述第 l 个原子的布洛赫矢量 $\boldsymbol{S}^{(l)}(t)=(S_1^{(l)},S_2^{(l)},S_3^{(l)})$，随时间演化满足布洛赫方程：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{S}^{(l)}(t)=\boldsymbol{\Omega}^{(l)}\times\boldsymbol{S}^{(l)}(t) \tag{2.4.11}$$

其中转矩矢量为

$$\boldsymbol{\Omega}^{(l)}(t)=-\frac{2}{\hbar}d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{(l)}(\cos\omega_lt\,\boldsymbol{\varepsilon}_x-\sin\omega_lt\,\boldsymbol{\varepsilon}_y) \tag{2.4.12}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_x,\boldsymbol{\varepsilon}_y,\boldsymbol{\varepsilon}_z$ 为转矩 $\boldsymbol{\Omega}^{(l)}(t)$ 的单位矢量. 这里，$\boldsymbol{E}^{(l)}(t)$ 表示在第 l 个原子处的总电场，一般情况下，它由(2.4.4)，(2.4.5)式之和表示. 如果

略去相对较弱的感应场部分而只保留主要的辐射场项，则可近似取

$$\boldsymbol{E}^{(l)}(t)=\frac{2}{3c^3}\boldsymbol{n}\sum_m\omega_m^2\dot{D}^{(m)}(t) \tag{2.4.13}$$

把(2.4.13)式代入(2.4.10)式，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_1^{(l)}&=-\frac{2}{\hbar}d\boldsymbol{n}\cdot\frac{2\boldsymbol{n}}{3C^3}\sum_m\omega_m^2D^{(m)}\sin\omega_l tS_3^{(l)}\\&=-\frac{4d}{3\hbar c^3}S_3^{(l)}\sum_m\omega_m^2d[\sigma_+^{(m)}\exp(i\omega_m t)-\sigma_-^{(m)}\exp(-i\omega_m t)]\\&\quad\times\frac{1}{2i}[\exp(i\omega_l t)-\exp(-i\omega_l t)]i\omega_m\\&=-\frac{4d^2}{3\hbar c^3}S_3^{(l)}\sum_m(\omega_m^3/2)\{\sigma_-^{(m)}\exp[i(\omega_m+\omega_l)t]\\&\quad-\sigma_-^{(m)}\exp[i(-\omega_m+\omega_l)t]-\sigma_+^{(m)}\exp[i(\omega_m-\omega_l)t]\\&\quad+\sigma_-^{(m)}\exp[-i(\omega_m+\omega_l)t]\}\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

取旋波近似，并注意把算符 $\sigma_i(t)$ 用相应的期望值 $S_i(t)$ 取代，则上式简化为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_1^{(l)}=\frac{4d^2}{3\hbar c^3}S_3^{(l)}\sum_m\frac{\omega_m^3}{2}[&S_1^{(m)}\cos(\omega_l-\omega_m)t\\&+S_2^{(m)}\sin(\omega_l-\omega_m)t]\end{aligned} \tag{2.4.15a}$$

同理可把(2.4.10)式中的其它两式转化为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_2^{(l)}=\frac{4d^2}{3\hbar c^3}S_3^{(l)}\sum_m\frac{\omega_m^3}{2}[&S_1^{(m)}\sin(\omega_l-\omega_m)t\\&-S_2^{(m)}\cos(\omega_l-\omega_m)t]\end{aligned} \tag{2.4.15b}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_3^{(l)}=\frac{4d^2}{3\hbar c^3}\{&S_2^{(l)}\sum_m\frac{\omega_m^3}{2}[S_1^{(m)}\sin(\omega_l-\omega_m)t-S_2^{(m)}\cos(\omega_l-\omega_m)t]\\&-S_1^{(l)}\sum_m\frac{\omega_m^3}{2}[S_1^{(m)}\cos(\omega_l-\omega_m)t+S_2^{(m)}\sin(\omega_l-\omega_m)t]\}\end{aligned} \tag{2.4.15c}$$

如果 N 个原子有相同的共振频率，即 $\omega_l=\omega_0$，于是方程组

(2.4.15)式简化为

$$\frac{d}{dt}S_1^{(l)} = \frac{1}{2}\gamma S_3^{(l)}\sum_m S_1^{(m)} \tag{2.4.16a}$$

$$\frac{d}{dt}S_2^{(l)} = \frac{1}{2}\gamma S_3^{(l)}\sum_m S_2^{(m)} \tag{2.4.16b}$$

$$\frac{d}{dt}S_3^{(l)} = -\frac{1}{2}\gamma\left(S_2^{(l)}\sum_m S_2^{(m)} + S_1^{(l)}\sum_m S_1^{(m)}\right) \tag{2.4.16c}$$

其中

$$\gamma = \frac{4d^2}{3\hbar c^3}\omega_0^3 \tag{2.4.17}$$

对方程组(2.4.16)式作和$\sum_l$,并引入集合原子算符:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{S}^{(l)} \tag{2.4.18}$$

则得

$$\frac{d}{dt}S_1 = \frac{1}{2}\gamma S_3\cdot S_1 \tag{2.4.19a}$$

$$\frac{d}{dt}S_2 = \frac{1}{2}\gamma S_3\cdot S_2 \tag{2.4.19b}$$

$$\frac{d}{dt}S_3 = -\frac{1}{2}\gamma(S_1^2 + S_2^2) \tag{2.4.19c}$$

这里S_1、S_2、S_3是集合原子算符$\boldsymbol{S}$的三个分量,方程组(2.4.19)式给出了N个相同共振频率的原子与其自身辐射场作用时,描述原子系的总布洛赫矢量随时间变化所遵循的规律.不难看出,$\boldsymbol{S}^{(l)}\cdot\boldsymbol{S}^{(m)}$是一个运动常量.这是因为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{S}^{(l)}\cdot\boldsymbol{S}^{(m)}) &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{S}^{(l)}\cdot\boldsymbol{S}^{(m)} + \boldsymbol{S}^{(l)}\cdot\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{S}^{(m)}\right)\\ &= (\boldsymbol{\Omega}^{(l)}\times\boldsymbol{S}^{(l)})\cdot\boldsymbol{S}^{(m)} + \boldsymbol{S}^{(l)}\cdot(\boldsymbol{\Omega}^{(m)}\times\boldsymbol{S}^{(m)})\\ &= (\boldsymbol{\Omega}^{(l)} - \boldsymbol{\Omega}^{(m)})\cdot(\boldsymbol{S}^{(l)}\times\boldsymbol{S}^{(m)})\end{aligned}$$

由(2.4.12)式和(2.4.13)式可知,对于$\omega_l = \omega_m$的情况,$\boldsymbol{\Omega}^{(l)} =$

$\boldsymbol{\Omega}^{(m)}$，所以上式给出

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{S}^{(l)}(t)\cdot\boldsymbol{S}^{(m)}(t)]=0 \tag{2.4.20}$$

故 $\boldsymbol{S}^{(l)}\cdot\boldsymbol{S}^{(m)}$ 是一个运动守恒量. 因此

$$\boldsymbol{S}^2(t)=\sum_{l,m}\boldsymbol{S}^{(l)}(t)\cdot\boldsymbol{S}^{(m)}(t)=\sum_{l,m}\boldsymbol{S}^{(l)}(0)\cdot\boldsymbol{S}^{(m)}(0)=\boldsymbol{S}^2(0) \tag{2.4.21}$$

这就是说，描述 N 个相同共振频率的二能级原子的宏观布洛赫矢量的长度，由 N 个独立原子布洛赫矢量 $\boldsymbol{S}^{(l)}(0)$的起始方位决定，因而 $\boldsymbol{S}$ 的长度可以假定为 0 和 N 之间的任何值. 如果假定初始时刻原子已极化，所有 N 个原子的布洛赫矢量指向同一方向，于是 $t=0$ 时，总的布洛赫矢量 $\boldsymbol{S}$ 的振幅正比于 N，即 $S\sim N$. 因此这个时候系统的衰变强度与振幅平方即 N^2 成正比，有极大的脉冲强度，故称之为超辐射. 这里需要指出一点，前面我们已说明要使原子系形成宏观极化，是要有一段延迟自再生时间 T_D 的，有的学者把起始完全极化的合作自发发射称为超辐射，而把需要有延迟时间的合作自发发射称为超荧光. 由于从物理上讲，它们论述的是同一过程，而实际系统合作自发发射也都是有延迟时间的，所以在现代量子光学理论中，一般都不主张这样的分类，而统称为超荧光. 故本章采用这样的共识.

对于 $S=N$ 的情况，我们有

$$S_1^2+S_2^2=N^2-S_3^2 \tag{2.4.22}$$

把上式代入(2.4.19c)式，得

$$\frac{d}{dt}S_3=-\frac{\gamma}{2}(N^2-S_3^2) \tag{2.4.23}$$

因为原子系统的辐射强度 $I(t)$正比于其能量的变化率，所以

$$I(t)=-\frac{d}{dt}\sum_{l=1}^{N}\langle H_A^{(l)}\rangle=-\frac{1}{2}\hbar\,\omega_0\frac{d}{dt}S_3=\frac{1}{4}\hbar\,\omega_0\gamma(N^2-S_3^2) \tag{2.4.24}$$

直接由积分表可查出方程(2.4.24)式的解为

$$S_3(t) = -N\tanh[(t-t_0)/T_R] \tag{2.4.25}$$

其中

$$T_R = (N\gamma/2)^{-1} \tag{2.4.26}$$

把(2.4.25)式代入(2.4.24)式，得到辐射强度：

$$I(t) = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\frac{d}{dt}S_3(t) = I_0\frac{N^2}{4}\mathrm{sech}^2[(t-t_0)/T_R] \tag{2.4.27}$$

方程(2.4.27)式展示的辐射强度随时间的变化关系如图2.4.6所示.

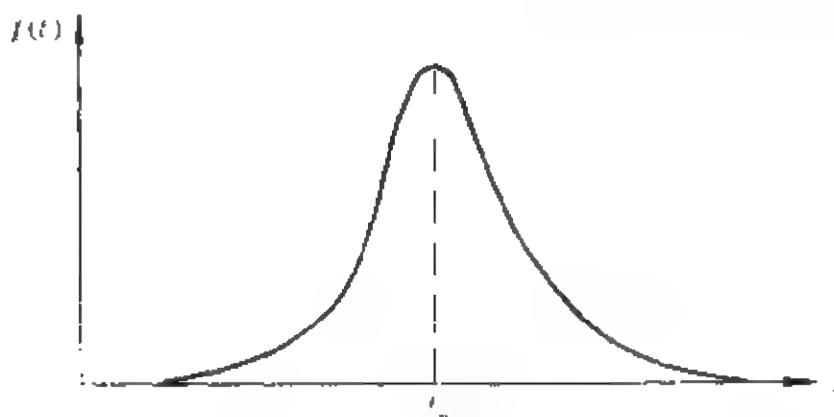


图2.4.6 方程(2.4.27)式展示的辐射强度I随时间t的变化

当$t=t_0$时，辐射强度$I(t)$最大：

$$I(t) = I_0N^2/4 \tag{2.4.28}$$

它与原子数N的平方成正比，所以通常把(2.4.27)式中的t_0称为超荧光脉冲的延迟时间T_D. T_D的数值远大于脉冲衰减时间T_R，即$T_R \ll T_D$.

上面通过准经典理论，我们给出了超荧光的解释，其主要结论与实验一致. 但是需要指出的是，准经典理论在阐述超荧光辐射时

又有它的局限性. 由于

$$S^2(t)=S^2(0)=S_1^2(0)+S_2^2(0)+S_3^2(0) \qquad (2.4.29)$$

是与时间无关的守恒量，所以对于完全极化的原子系，有 $S^2(0)=N^2$，从而由(2.4.22)和(2.4.25)式可得延迟时间满足如下方程：

$$S_1^2(0)+S_2^2(0)=N^2-S_3^2(0)=N^2[1-\tanh^2(T_D/T_R)] \qquad (2.4.30)$$

所以 T_D 的值决定于系统的起始条件，特别重要的是决定于宏观布洛赫矢量横向部分的绝对值. 起始时总的偶极矩越小[$S_1^2(0)+S_2^2(0)$很小]，则由(2.4.30)式可知，延迟时间 T_D 的数值越大，这也就是说，系统完全宏观极化需要的时间越长. 当 $S_1^2(0)+S_2^2(0)=0$ 时，$T_D\to\infty$，这说明出现亚稳态，系统将不衰变，因而不产生超荧光脉冲，这样的理论结果显然是不符合物理实际的. 前面我们已经说明，任何集合原子系统在它们充分激发后，都会由于真空起伏或背景热辐射而导致系统的宏观极化，从而发射超荧光，决不会存在延迟时间 T_D 为无限长的不衰变态. 可见准经典理论的这一结论是不正确的，是理论不完全的反映，它表明准经典理论不能很好地描述起始阶段的量子起伏过程，而这只有在全量子理论框架内加以解决. 因此下面我们来介绍超荧光的全量子理论.

第三节 超荧光的全量子理论

一、描述系统的海森伯方程

在超荧光的准经典描述中，辐射场是经典场量，现在我们转入超荧光的量子理论描述，所以辐射场必须是量子化的场量. 描述 N 个具有不同共振频率 ω_l 的二能级原子与辐射场相互作用系统的哈密顿量，在旋波近似下可写为

$$H=\sum_l \hbar\omega_l S_z^{(l)}+\sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k+\sum_k \varepsilon_k(a_k S_+^{(l)}+a_k^+ S_-^{(l)}) \qquad (2.4.31)$$

其中已设耦合常数与不同原子无关. 如果令原子的本征频率环绕中心频率 ω_0 分布,那么上式可写为

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \hbar\omega_0 \sum_l S_z^{(l)} + \sum_l \hbar(\omega_l - \omega_0) S_z^{(l)} + V$$

$$= H_0 + \Delta + V \tag{2.4.32}$$

这里

$$H_0 = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \hbar\omega_0 \sum_l S_z^{(l)} \tag{2.4.33a}$$

$$\Delta = \sum_l \hbar(\omega_l - \omega_0) S_z^{(l)} \tag{2.4.33b}$$

$$V = \sum_k \varepsilon_k (a_k S_+^{(l)} + a_k^\dagger S_-^{(l)}) \tag{2.4.33c}$$

由系统的哈密顿量(2.4.32)式出发,我们可以讨论原子算符的时间演化规律. 对于方程中的算符,这里我们采用正常序. 所谓正常序,是指把产生算符置于算符乘积的左边,而把湮没算符置于算符乘积的右边的顺序. 在运算过程中,利用算符间的对易关系,我们可以改变算符间的顺序. 一般说来,由于原子算符和场算符彼此间可对易,所以在运算过程中,可以随便改变它们的顺序. 但是,当把场算符分解为真空部分 $a_k(0)$和辐射部分 $a_k(t)$时,由于后者与原子算符有关. 故此时在运算过程中不能随便改变场算符与原子算符的顺序,而必须保持原有的顺序不变. 若需要改变时,也应运用对易关系加以改动. 我们将看到,此时由于乘积算符排列的不同顺序(正常序或反常序),对同一量子系统将可能展现它的不同的物理图像.

下面讨论正常序情况的单原子算符运动方程. 在海森伯绘景中,由哈密顿量(2.4.32)式得

$$\frac{d}{dt} S_z^{(l)} = \frac{i}{\hbar} [H, S_z^{(l)}] = -\frac{i}{\hbar} \sum_k \varepsilon_k (S_+^{(l)} a_k - a_k^\dagger S_-^{(l)}) \tag{2.4.34}$$

其中已运用了原子算符 $S_z^{(l)}$, $S_\pm^{(l)}$间的熟知对易关系. 同理有

$$\frac{d}{dt} S_-^{(l)} = \frac{i}{\hbar} [H, S_-^{(l)}] = -i\omega_l S_-^{(l)} - 2\frac{i}{\hbar} \sum_k \varepsilon_k S_z^{(l)} a_k \tag{2.4.35}$$

$$\frac{d}{dt}S_+^{(l)} = \frac{i}{\hbar}[H, S_+^{(l)}] = i\omega_l S_+^{(l)} - 2\frac{i}{\hbar}\sum_k \varepsilon_k a_k^{\dagger} S_z^{(l)}$$

$$(2.4.36)$$

为使上述方程式有自洽解，必须给出其中场算符的时间关系. 由海森伯方程

$$\frac{d}{dt}a_k = \frac{i}{\hbar}[H, a_k] = -i\omega_k a_k - \frac{i}{\hbar}\varepsilon_k \sum_{l'} S_-^{(l')} \quad (2.4.37)$$

显然此方程有解

$$a_k(t) = a_k(0)\exp(-i\omega_k t) - \frac{i}{\hbar}\varepsilon_k \sum_k \int_0^t S_-^{(l')}(t') \times \exp[-i\omega_k(t - t')]dt' \quad (2.4.38)$$

上式右边积分中的 $S_-^{(l')}(t')$ 可以取零级近似，即由

$$\frac{d}{dt}S_-^{(l')} = \frac{i}{\hbar}[H_0, S_-^{(l')}] = -i\omega_{l'} S^{(l')} \quad (2.4.39)$$

解得

$$S_-^{(l')}(t') = S_-^{(l')}(t)\exp[-i\omega_{l'}(t' - t)] \quad (2.4.40)$$

把(2.4.40)式代入(2.4.38)式，得到

$$\begin{aligned}
a_k(t) &= a_k(0)\exp(-i\omega_k t) - \frac{i}{\hbar}\varepsilon_k \sum_k \int_0^t S_-^{(l')}(t') \\
&\quad \times \exp[-i\omega_{l'}(t' - t)]\exp[-i\omega_k(t - t')]dt' \\
&= a_k(0)\exp(-i\omega_k t) - \frac{i}{\hbar}\varepsilon_k \sum_{l'} S_-^{(l')}(t) \\
&\quad \times \int_t^t \exp[-i(\omega_k - \omega_0)(t' - t)]dt' \\
&= a_k(0)\exp(-i\omega_k t) - \frac{1}{\hbar}\varepsilon_k \sum_{l'} \{i\pi\delta(\omega_k - \omega_{l'}) \\
&\quad + P(\frac{1}{\omega_k - \omega_{l'}})\} S_-^{(l')}(t)
\end{aligned} \quad (2.4.41)$$

上式表明场分解为真空部分和辐射部分，其辐射部分与原子算符有关. 把(2.4.41)式代入(2.4.34)式得

$$\frac{d}{dt}S_z^{(l)} = -\frac{i}{\hbar}\sum_k \epsilon_k (S_+^{(l)} a_k - a_k^+ S_-^{(l)})$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_k \epsilon_k \{S_+^{(l)} \{a_k(0)\exp(-i\omega_k t) - \frac{i\epsilon_k}{\hbar}\sum_{l'}[i\pi\delta(\omega_k - \omega_{l'})$$

$$+ P(\frac{1}{\omega_k - \omega_{l'}})]S_-^{(l')}(t)\} - \{a_k^+(0)\exp(i\omega_k t)$$

$$- \frac{\epsilon_k}{\hbar}\sum_{l'}[-i\pi\delta(\omega_k - \omega_{l'}) + P(\frac{1}{\omega_k - \omega_{l'}})]S_+^{(l')}(t)\}S_-^{(l)}\}$$

(2.4.42)

由于主部函数 $P(\frac{1}{\omega_k - \omega_l})$ 对应兰姆移位，它不影响原子算符的衰变率，故作为近似可略去它们，于是得第 l 个原子的算符 $S_z^{(l)}$ 的朗之万方程：

$$\frac{d}{dt}S_z^{(l)} = -\gamma S_+^{(l)}\sum_{l'}S_-^{(l')} - [S_+^{(l)}F(t)\exp(-i\omega_0 t) + h.c.]$$

(2.4.43)

这里

$$\gamma = 2\pi\frac{1}{\hbar^2}\sum_k \epsilon_k^2\delta(\omega_k - \omega_l) \tag{2.4.44}$$

$$F(t) = \frac{i}{\hbar^2}\sum_k \epsilon_k a_k(0)\exp[-i(\omega_k - \omega_0)t] \tag{2.4.45}$$

其中 γ 表征第 l 个原子的自发衰变寿命. 由于超荧光中，我们假定 N 个原子的本征频率相同，所以这里已设 γ 对于不同的原子是相同的. 因为 $F(t)$ 是正比于真空场的项，所以(2.4.43)式中右边最后一项描述了真空电磁场对第 l 个原子衰变的影响. $F(t)$ 和 $F^+(t)$ 具有如下的统计特性，它对初态的期望值为

$$\langle F(t)\rangle = \langle F^+(t)\rangle = 0 \tag{2.4.46}$$

$$\langle F^+(t)F(t)\rangle = 0 \tag{2.4.47}$$

$$\langle F(t)F^+(t')\rangle = \gamma\delta(t - t') \tag{2.4.48}$$

可见 $F(t)$ 具有类似布朗运动随机力的高斯统计性质. 并且利用

(2.4.46)—(2.4.48)式,容易得到多时相关函数满足

$$\langle F(t_1)F(t_2)\cdots F(t_n)F^+(t_1')F^+(t_2')\cdots F^+(t_m')\rangle = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\langle F(t_1)F(t_2)\cdots F(t_n)F^+(t_1')F^+(t_2')\cdots F^+(t_n')\rangle$$
$$= \sum_p \langle F(t_1)F^+(t_1')\rangle\langle F(t_2)F^+(t_2')\rangle\cdots\langle F(t_n)F^+(t_n')\rangle$$
$$= \gamma^n \sum_p \delta(t_1 - t_1')\delta(t_2 - t_2')\cdots\delta(t_n - t_n') \quad (n = m)$$

式中作和 p 是对所有置换 $n!$ 而言.

类似地,把方程(2.4.41)式代入(2.4.35)和(2.4.36)式,可得

$$\frac{d}{dt}S_-^{(l)} = -i\omega_l S_-^{(l)} + \gamma S_z^{(l)} \sum_{l'} S_-^{(l')} + 2S_z^{(l)} F(t)\exp(-i\omega_0 t) \tag{2.4.49}$$

和

$$\frac{d}{dt}S_+^{(l)} = i\omega_l S_+^{(l)} + \gamma S_z^{(l)} \sum_{l'} S_+^{(l')} + 2S_z^{(l)} F^+(t)\exp(i\omega_0 t) \tag{2.4.50}$$

方程(2.4.49)式可直接给出

$$S_-^{(l)} = S_-^{(l)}(0)\exp(-i\omega_l t)$$
$$+ 2S_z(0)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\exp(-i\omega_l t)\int_0^t \exp[i(\omega_l - \omega_0)t']F(t')dt' \tag{2.4.51}$$

其中已代入了(2.4.44)式中的 γ,故(2.4.49)式右边第二项积分为零.上式的共轭即为(2.4.50)式的解.令初始时刻系统的场为真空场 $|\{0_k\}\rangle$,原子处在 $|\psi\rangle$ 态,即 $t=0$ 时刻,系统的态函数为

$$|\rangle = |\psi, \{0_k\}\rangle \tag{2.4.52}$$

那么把(2.4.51)式及其共轭式代入方程(2.4.43)式,再对初态(2.4.52)式进行平均,得

$$\langle \dot{S}_z^{(l)} \rangle = -\gamma \sum_{l'} \langle S_+^{(l)}(0)S_-^{(l')}(0)\rangle$$
$$= -\gamma\langle S_+^{(l)}(0)S_-^{(l)}(0)\rangle \tag{2.4.53}$$

其中已应用了(2.4.46)—(2.4.48)式.对于单个原子而言,由于

$$S_{+}^{(l)}(0)S_{-}^{(l)}(0)=S_{z}^{(l)}(0)+1/2 \qquad (2.4.54)$$

所以

$$\langle \dot{S}_{z}^{(l)}(0)\rangle=-\gamma \qquad (2.4.55)$$

可见,对于单个原子的衰变来说,在采用乘积算符的正常序描述时,起始阶段的真空场起伏,对其并无贡献.因此,在衰变的起始阶段,我们只能借助于偶极起伏的作用.后面我们将通过采用反常序描述来揭示这一种量子起始过程中真空起伏的作用.

二、超荧光的狄克模式

前面我们对集合原子系中单原子算符的时间行为进行了研究,现在讨论 N 个原子的集合行为.集合原子算符为

$$S_{i}=\sum_{l=1}^{N}S_{i}^{(l)} \qquad (i=z,+,-,x,y) \qquad (2.4.56)$$

设所有原子都有相同本征频率 $\omega_{l}=\omega_{0}$,对方程(2.4.58)式作和:

$$\sum_{l}\langle \dot{S}_{z}^{(l)}\rangle=-\gamma\sum_{l,l'}\langle S_{+}^{(l)}S_{-}^{(l')}\rangle \qquad (2.4.57)$$

并代入(2.4.56)式,得

$$\langle \dot{S}_{z}\rangle=-\gamma\langle S_{+}S_{-}\rangle \qquad (2.4.58)$$

由于总自旋平方为

$$S^{2}=S_{z}^{2}+\frac{1}{2}(S_{+}S_{-}+S_{-}S_{+}) \qquad (2.4.59)$$

再考虑到对易关系

$$[S_{+},S_{-}]=2S_{z} \qquad (2.4.60)$$

有

$$S_{-}S_{+}=S_{+}S_{-}-2S_{z} \qquad (2.4.61)$$

这样依据(2.4.59)和(2.4.61)式,显然有

$$S_+S_- = S^2 - S_z^2 + S_z \qquad (2.4.62)$$

把(2.4.62)式代入(2.4.58)式,可得

$$\langle \dot{S}_z \rangle = -\gamma \langle (S^2 - S_z^2 + S_z) \rangle \qquad (2.4.63)$$

为考虑总系统的原子能量算符随时间的变化,我们需要求解方程(2.4.63)式.通常可选不同的态矢$|\rangle$进行描述,这里先采用狄克态来讨论.所谓狄克态是指S^2和S_z的共同本征态$|l,m\rangle$.因为对于N个原子的系统,当$\omega_k=\omega_0$时,哈密顿量(2.4.32)式中的$\Delta=0$.用集合原子算符(2.4.56)表示的哈密顿量可写为

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \hbar\omega_0 S_z + \sum_k \hbar\varepsilon_k (a_k S_+ + a_k^+ S_-) \qquad (2.4.64)$$

此时,原子系总自旋的平方为守恒量:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S^2 &= \frac{i}{\hbar}[H, S^2] \\ &= \frac{i}{\hbar}\{\omega_0[S_z, \frac{1}{2}(S_+S_- + S_-S_+)] \\ &\quad + \sum_k \varepsilon_k[a_k S_+ + a_k^+ S_-, \frac{1}{2}(S_+S_- + S_-S_+) + S_z^2]\} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (2.4.65)$$

其中已应用了原子算符间的对易关系式及(2.4.59)式.由(2.4.65)式可知

$$\langle S^2(t) \rangle = \langle S^2(0) \rangle = 常数 \qquad (2.4.66)$$

原子系总自旋的平方为一守恒量,表征在系统的时间演化过程中,也就是说N个原子系统从起始的激发态衰变到终态(基态)的过程中,总角动量S^2的本征值l不变,它由初始时刻原子系的激发情况决定.系统在时间演化过程中,只改变自旋z分量S_z的本征值m.对于狄克态$|l,m\rangle$,我们有

$$S^2|l,m\rangle=l(l+1)|l,m\rangle \tag{2.4.67}$$

$$S_z^2|l,m\rangle=m|l,m\rangle \tag{2.4.68}$$

其中 l 的取值为

$$l=\frac{N}{2},\frac{N}{2}-1,\cdots,0 \tag{2.4.69}$$

对于某一具体系统而言，l 取何值完全由起始原子激发的数值决定，其最大值 $l=N/2$，它对应 $t=0$ 时，所有 N 个原子均处于激发态的情况，m 的取值则可取

$$m=l,l-1,\cdots,-(l-1),-l \tag{2.4.70}$$

在 $\langle S_z\rangle$ 的时间演化过程中，m 的数值由 l 变化到 $-l$.

原子系统的跃迁过程遵守选择定则 $\Delta m=\pm1$，所以对于完全激发的原子系统，系统的时间演化对应如图 2.4.7 所示的能级跃迁.

现在再来具体计算在系统的时间演化过程中，原子算符 S_z 的平均跃迁率 $\langle\dot{S}_z\rangle$. 我们选取 S^2 和 S_z^2 有共同本征值的狄克态，而且令 $t=0$ 时，场处于真空态，即令

$$|\rangle=|l,m\{0_k\}\rangle \tag{2.4.71}$$

由(2.4.63)式得

$$\langle\dot{S}_z\rangle=-\gamma[l(l+1)-m(m-1)] \tag{2.4.72}$$

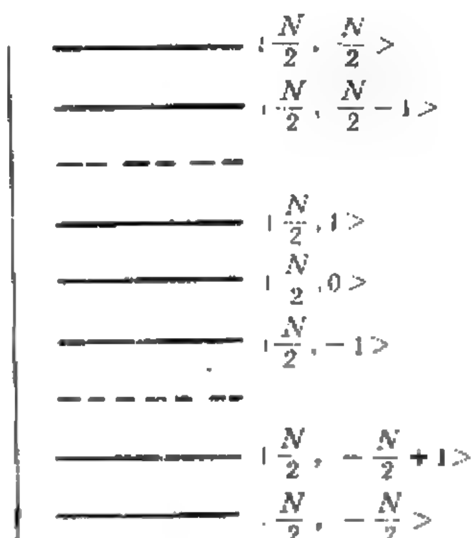


图 2.4.7 $l=N/2$ 时的集合原子态
图中左边的箭头表征 l 守恒情况下，系统态的时间演化方向

由于我们已设 $t=0$ 时，所有原子均处于激发态（这是超荧光系统的基本条件），所以有 $l=N/2$，而 m 的极大值也为 $N/2$. 系统

在时间演化过程中 $l=N/2$ 守恒，但 m 则可由它的极大值 $N/2$ 变化到 $-N/2$. 由(2.4.72)式可见，在不同的跃迁过程中，m 的数值不同，所以衰变率 $\langle\dot{S}_z\rangle$ 也各不相同. 例如，若设 $t=0$ 时，m 也为极大值，$m=l=N/2$，于是由(2.4.72)式可知

$$\frac{d\langle S_z\rangle}{dt}=-\gamma\left[\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)-\left(\frac{N}{2}\right)^2+\frac{N}{2}\right]=-\gamma N \quad (2.4.73)$$

可见，初始时刻系统的平均衰变率正比于 N. 由于 $t=0$ 时各原子彼此间还没有耦合，所以它对应系统的各原子的独立衰变，因而总衰变率为各独立衰变的总和. 此后的衰变过程将使 m 的数值减小，当 m 减小到 $m=0$ 时，如图 2.4.7 中所示的衰变的中间部分，由(2.4.72)式得

$$\frac{d\langle S_z\rangle}{dt}=-\gamma\left[\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\right]\approx\gamma N^2/4 \qquad (2.4.74)$$

此时衰变率达到极大值，它正比于原子数平方 N^2. 这时，由于原子间辐射场的耦合，系统已达到合作衰变而形成超荧光脉冲，我们称这种 l 极大而 $m=0$ 的态为超辐射狄克态 $|N/2,0\rangle$. 随着时间的演化，m 将减小到最小值 $m=-N/2$，由(2.4.72)式我们有

$$\frac{d\langle S_z\rangle}{dt}=0 \qquad (2.4.75)$$

此时衰变率减小到零，系统处于基态.

上面通过选用特殊的狄克态(2.4.71)式，对系统原子算符的衰变过程进行了定性的分析，以便读者更为具体地理解超荧光的形成过程. 现在，我们应用一般的态矢 $|\rangle$ 来讨论(2.4.63)式，以考察总系统的原子能量算符随时间的演化. 选用一般态矢以后，(2.4.63)式可转化为

$$\frac{d\langle S_z\rangle}{dt}=-\gamma\{\langle S^2\rangle-\langle S_z^2\rangle+\langle S_z\rangle\} \qquad (2.4.76)$$

由于 S^2 是守恒量，所以它可以用 $\langle S^2(t)\rangle=\langle S^2(0)\rangle=\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)$

表示，因此上式可写为

$$\frac{d\langle S_z\rangle}{dt}=-\gamma\{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)-\langle S_z^2\rangle+\langle S_z\rangle\} \qquad (2.4.77)$$

若在上式右边括号中作恒等变换，插入$\langle S_z\rangle^2-\langle S_z\rangle^2$，则可转化为

$$\frac{d\langle S_z\rangle}{dt}=-\gamma[\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)-\langle S_z\rangle^2+\langle S_z\rangle]+\gamma\langle S_z^2-\langle S_z\rangle^2\rangle \qquad (2.4.78)$$

显然(2.4.78)式右边第二项对应原子算符 S_z 的起伏. 计及起伏项以后，方程(2.4.78)式的解是十分复杂的，而且从物理效应上看，S_z 的起伏往往导致 $S_z(t)$时间行为的一些修正. 所以作为近似，可先在(2.4.78)式的右边略去对应原子算符起伏的项，以后再考虑它对原子行为的修正. 略去起伏项以后，方程(2.4.78)式成为

$$\begin{aligned}\frac{d\langle S_z\rangle}{dt}&=-\gamma[\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)-\langle S_z\rangle^2+\langle S_z\rangle]\\&=-\{(\frac{N}{2}+\langle S_z\rangle)(\frac{N}{2}-\langle S_z\rangle+1)\}\end{aligned} \qquad (2.4.79)$$

对上式积分(或查表)可得

$$\langle S_z(t)\rangle=-\frac{N}{2}\tanh\left(\frac{t-T_D}{T_R}\right) \qquad (2.4.80)$$

其中

$$T_D=\frac{1}{2}T_R\ln N \qquad (2.4.81)$$

$$T_R=\frac{2}{N\gamma} \qquad (2.4.82)$$

方程(2.4.80)式给出的原子算符 S_z 的期望值的时间行为如图 2.4.8 所示. 由(2.4.80)式可得系统的辐射强度为

$$I(t)=-\hbar\omega_0\langle S_z\rangle=I_0\frac{N^2}{4}\mathrm{sech}^2[(t-T_D)/T_R] \qquad (2.4.83)$$

上式揭示出正比于原子数平方 N^2 的超荧光脉冲过程，辐射强度 I

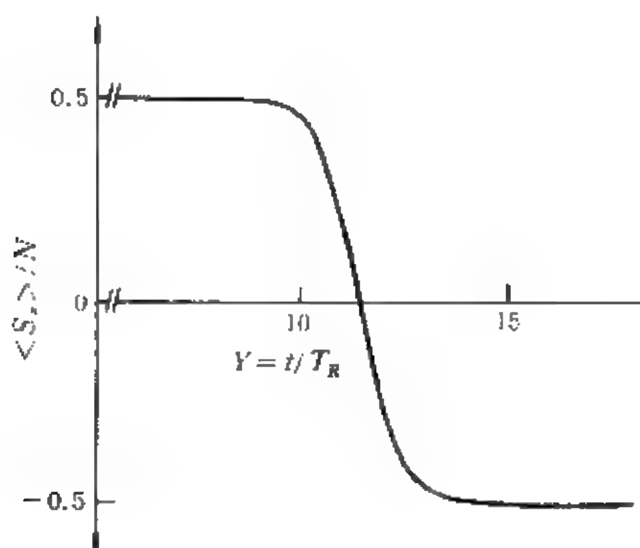


图 2.4.8 (2.4.80)式表示的$\langle S_z\rangle$随时间 t 的变化

(t)与时间的依赖关系如图 2.4.6 所示，脉冲衰变时间 $T_R \ll T_D$，但延迟时间 T_D 与准经典理论处理情况不同，它不再由初始极化状态随机地决定，而是具有确定的值，它由(2.4.81)式决定，且不再出现发散情况.

三、超荧光的量子统计特性

1. 集合原子的朗之万方程及真空涨落的作用

超荧光是集合原子系统的合作自发发射效应，为精确地考察这种效应，需要注意系统的量子统计特性，计及量子起伏等效应，下面我们先来探讨描述集合原子系统的量子朗之万方程，并讨论真空涨落的作用.

我们知道，描述第 l 个原子的算符 $S_z^{(l)}$，$S_-^{(l)}$和 $S_+^{(l)}$的时间演化由方程(2.4.43)，(2.4.49)和(2.4.50)式表示，引入集合原子算符(2.4.56)式，于是由方程(2.4.49)，(2.4.50)式可得知 N 个原子的集合算符 S_-和 S_+满足的朗之万方程为

$$\frac{d}{dt}S_- = -i\omega_0 S_- + \gamma S_- S_z + 2F(t)S_z\exp(-i\omega_0 t) \quad (2.4.84)$$

和

$$\frac{d}{dt}S_+=i\omega_0S_++\gamma S_zS_++2F^+(t)S_z\exp(i\omega_0t) \quad (2.4.85)$$

这里随机力 $F(t)$和 $F^+(t)$由(2.4.45)式表示，它对应真空场对原子起始态行为的影响.或者说，它反映真空场涨落对原子行为的影响，它的统计特性由方程(2.4.46)—(2.4.48)式给出，由(2.4.43)式可得集合原子算符 S_z 满足的朗之万方程为

$$\frac{d}{dt}S_z=-\gamma S_-S_+-[F(t)S_+\exp(-i\omega_0t)+h.c.]$$

$$(2.4.86)$$

应该指出的是，在得到上述方程时，我们已采用了算符的反常序，也就是说方程中的所有算符乘积项中的产生算符都置于各个乘积项的右边，而把湮没算符置于算符乘积的左边，这样做的目的是为了有利于揭示超荧光起始阶段真空场涨落的效应.

对于运动方程(2.4.84)和(2.4.85)式，如果我们在起始阶段的线性区域考虑，此时可假定

$$S_z(t)\approx S_z(0) \quad (2.4.87)$$

这样朗之万方程(2.4.84)式给出的解为

$$S_-(t)=\{S_-(0)+2S_z(0)\int_0^t\exp[-\gamma S_z(0)t']F(t')dt'\}$$

$$\times\exp\{[-i\omega_0+\gamma S_z(0)]t\} \quad (2.4.88)$$

这里已应用了

$$[S_z(0),F(t)]=0 \quad (2.4.89)$$

同样有

$$S_+(t)=\{S_+(0)+2S_z(0)\int_0^t\exp[-\gamma S_z(0)t']F^+(t')dt'\}$$

$$\times\exp\{[i\omega_0+\gamma S_z(0)]t\} \quad (2.4.90)$$

把(2.4.88)和(2.4.90)式取代方程(2.4.86)式右边的 $S_-(t)$和

$S_+(t)$，就可得知起始阶段原子系的算符 S_z 随时间的演化规律. 令起始时原子均处于激发态，而辐射场为真空态，那么可令初始态为 $|\frac{N}{2},\{0_k\}\rangle$. 用这样的初态对 S_z 的运动方程作量子平均，则方程(2.4.86)式右边的第一项给出

$$
\begin{aligned}
&\langle S_-(t)S_+(t)\rangle \\
&\quad = \langle S_-(0)S_+(0)\rangle \\
&\qquad + 4\langle S_z^2(0)\int_0^t\int_0^{t'}\exp[-\gamma S_z(0)(t'+t'')] \\
&\qquad \times F(t')F^+(t'')\rangle dt'dt''\exp[2\gamma S_z(0)t] \\
&\quad = N^2e^{N\gamma t}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\exp[-\frac{1}{2}N\gamma(t'+t'')]\langle F(t')F^+(t'')\rangle \\
&\quad = N^2e^{N\gamma t}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\exp[-\frac{1}{2}N\gamma(t'+t'')]\gamma\delta(t'-t'') \\
&\quad = N^2e^{N\gamma t}\int_0^t \gamma e^{-N\gamma t'}dt' = N(e^{N\gamma t}-1) \qquad (2.4.91)
\end{aligned}
$$

方程(2.4.86)式右边第二项为

$$
\begin{aligned}
&\langle F(t)S_+\exp(-i\omega_0 t)+h.c.\rangle \\
&\quad = N\int_0^t \exp[\frac{1}{2}N\gamma(t-t')]\langle F(t)F^+(t')+h.c.\rangle dt' \\
&\quad = N\int_0^t \exp[-N\gamma(t-t')]\gamma\delta(t-t')dt' \\
&\quad = N\gamma \qquad (2.4.92)
\end{aligned}
$$

将方程(2.4.91)和(2.4.92)式代入方程(2.4.86)式得

$$\frac{d}{dt}\langle S_z\rangle = -N\gamma(e^{N\gamma t}-1)-N\gamma = -N\gamma e^{N\gamma t} \qquad (2.4.93)$$

从而可知，在超荧光的起始阶段，由于真空场涨落 $\langle F(t)\rangle$ 的作用，集合原子系辐射的强度将具有如

$$I(t)\propto I_0Ne^{N\gamma t} \qquad (2.4.94)$$

的形式，这与采用正常序情况下所得到的(2.4.45)和(2.4.73)式不同. 可见采用反常序运算，能较好地揭示真空场涨落在集合原子衰变的起始过程中的重要作用. 如果我们在方程(2.2.86)式中，略

去正比于真空场 $F(t)[F^{+}(t)]$ 的项，也就是不计及真空场的作用，那么由(2.4.91)式中看出，在起始阶段 $t=0^{+}$ 的区域

$$\langle \dot{S}_z \rangle |_{t=0^+} = 0 \tag{2.4.95}$$

这也就是说，充分激发的原子系将不衰变. 它与准经典理论的结果类似，系统处于亚稳态. 这显然不符合实际情况，可见真空场的作用是不能忽略的.

另外还应指出的是，如果在初始时刻，所有原子处于基态，即初始态函数为 $|-\frac{N}{2},\{0_i\}\rangle$，那么方程(2.4.93)式的右边应等于 $-N\gamma$. 于是方程(2.4.86)式对初始的期望值在起始阶段 $t=0$ 时，右边对应偶极子涨落的第一项和对应真空场涨落的第二项彼此相消，所以 $\langle \dot{S}_z \rangle_{t=0}=0$. 这说明处于基态的原子系虽然也有原子偶极子涨落和真空场涨落存在，但系统仍处于稳态.

2. *原子的 P 表示*

原子系的统计性质也可以通过概率分布函数来描述. 普遍说来，若有原子算符 S_-, S_z, S_+ 的函数 $Q(S_-, S_z, S_+)$，它们可以展开为幂级数：

$$Q^{(a)}(S_-, S_z, S_+) = \sum_{r_1, r_2, r_3} Q^{(a)}_{r_1, r_2, r_3} S_-^{r_1} S_z^{r_2} S_+^{r_3} \tag{2.4.96}$$

上指标 (a) 表明我们应用反常序，若用上指标 (N)，则表明采用正常序. 相应地，我们也可定义一个与(2.4.96)式相联系的 C 数函数，即

$$Q^{(a)}(\beta, m, \beta^*) = \sum_{r_1, r_2, r_3} Q^{(a)}_{r_1, r_2, r_3} \beta^{r_1} m^{r_2} \beta^{*r_3} \tag{2.4.97}$$

这里 β 和 β^* 为非厄米算符 S_- 和 S_+ 对应的复参量，而 m 为厄米算符 S_z 对应的实参量. 或者应用 δ 函数，我们可以把(2.4.96)式形式上写为

$$\begin{aligned} &Q^{(a)}(S_-, S_z, S_+) \\ &= \iiint \overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*) \delta(\beta - S_-(t)) \delta(m - S_z(t)) \\ &\times \delta(\beta^* - S_+(t)) d\beta dm d\beta^* \end{aligned} \tag{2.4.98}$$

这里 δ 函数可采用下式：

$$\delta(\beta_i - S_i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta_i(\beta_i - S_i)} d\zeta_i \qquad (2.4.99)$$

若 S_i 是非厄米算符时应为

$$\begin{aligned}&\delta(\beta_i - S_i)\delta(\beta_i - S_i^+)\\&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint e^{-i\zeta_i(\beta - S_i)} e^{-i\zeta_i^*(\beta^* - S_i^+)} d^2\zeta_i\end{aligned} \qquad (2.4.100)$$

其中

$$d^2\zeta_i = d(\mathrm{Re}\zeta_i)d(\mathrm{Im}\zeta_i) \qquad (2.4.101)$$

因此，(2.4.98)式可写为

$$\begin{aligned}Q^{(a)}(S_-, S_z, S_+) = &\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*) d\beta dm d\beta^*\\&\times \iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \exp[-i\zeta_1(\beta - S_-)]\\&\times \exp[-i\zeta_2(m - S_z)]\exp[-i\zeta_3(\beta^* - S_+)]\end{aligned} \qquad (2.4.102)$$

若改变上式中的积分顺序，它又可写为

$$\begin{aligned}Q^{(a)}(S_-, S_z, S_+) = &\iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \exp(i\zeta_1 S_-)\\&\times \exp(i\zeta_2 S_z)\exp(i\zeta_3 S_+) F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\end{aligned} \qquad (2.4.103)$$

其中 $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$是 C 数函数 $\overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*)$的傅里叶变换：

$$\begin{aligned}F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = &\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint d\beta dm d\beta^* \overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*)\\&\times \exp[-i(\zeta_1\beta + \zeta_2 m + \zeta_3\beta^*)]\end{aligned} \qquad (2.4.104)$$

它的逆变换也给出原子算符 C 数函数 $\overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*)$本身，即

$$\begin{aligned}\overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*) = &\iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \exp[i(\zeta_1\beta + \zeta_2 m + \zeta_3\beta^*)]\\&\times F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\end{aligned} \qquad (2.4.105)$$

如果算符函数Q是原子系在薛定谔绘景中的密度算符 $\rho(S_-, S_z, S_+, t)$，则由(2.4.103)式知

$$\rho^{(a)}(S_-,S_z,S_+) = \iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \exp(i\zeta_1 S_-)\exp(i\zeta_2 S_z)\exp(i\zeta_3 S_+) \times F(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \quad (2.4.106)$$

这里

$$F(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint d\beta dm d\beta^* \rho^{(a)}(\beta,m,\beta^*) \times \exp[-i(\zeta_1\beta + \zeta_2 m + \zeta_3\beta^*)] \quad (2.4.107)$$

应用原子系的密度函数 $\rho(t)$ 可以求得原子系的任意算符函数 Q 的期望值，所以

$$\langle Q^{(a)}(S_-,S_z,S_+,t)\rangle = \mathrm{Tr}[\rho(t)Q^{(a)}(S_-,S_z,S_+)] \quad (2.4.108)$$

代入(2.4.103)式，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle Q^{(a)}(S_-,S_z,S_+,t)\rangle \\
&= \langle \iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \exp(i\zeta_1 S_-)\exp(i\zeta_2 S_z) \\
&\quad \times \exp(i\zeta_3 S_+)F(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\rangle \\
&= \iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 C(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)F(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \quad (2.4.109)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
C(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,t) &= \langle \exp(i\zeta_1 S_-)\exp(i\zeta_2 S_z)\exp(i\zeta_3 S_+)\rangle \\
&= \mathrm{Tr}[\rho(t)\exp(i\zeta_1 S_-)\exp(i\zeta_2 S_z)\exp(i\zeta_3 S_+)]
\end{aligned} \quad (2.4.110)$$

称为原子算符的特征函数，而 $F(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ 是由(2.4.104)式给出的原子算符 C 数的傅里叶变换式. 方程(2.4.109)式表明，我们已把求原子算符函数 $Q^{(a)}(S_-,S_z,S_+)$ 的量子期望值的运算转化为相应 C 数函数的积分运算.

我们也可采用另一种方法，将对原子算符期望值的运算转化为 C 数函数的运算. 事实上，对(2.4.98)式求原子算符的量子期望值，得

$$\langle Q^{(a)}(S_-,S_z,S_+)\rangle$$

$$= \iiint \overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*)\langle\delta(\beta - S_-(t))$$
$$\times \delta(m - S_z(t))\delta(\beta^* - S_+(t))\rangle d\beta dm d\beta^*$$
$$= \iiint \overline{Q}^{(a)}(\beta, m, \beta^*) P^{(a)}(t) d\beta dm d\beta^* \qquad (2.4.111)$$

这里 $P^{(a)}(t)$ 称为描述原子系的准概率分布函数，这种表示又称为原子算符的 P 表示：

$$P^{(a)}(t) = \langle\delta(\beta - S_-(t))\delta(m - S_z(t))\delta(\beta^* - S_+(t))\rangle$$
$$= \mathrm{Tr}[\rho(t)\delta(\beta - S_-)\delta(m - S_z)\delta(\beta^* - S_+)] \qquad (2.4.112)$$

应用(2.4.99)式，上式得

$$P^{(a)}(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \langle \exp(i\zeta_1 S_-)$$
$$\times \exp(i\zeta_2 S_z)\exp(i\zeta_3 S_+)\rangle \exp[-i(\zeta_1\beta - \zeta_2 m + \zeta_3\beta^*)]$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$
$$\times \exp[-i(\zeta_1\beta + \zeta_2 m + \zeta_3\beta^*)] C(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) \qquad (2.4.113)$$

其中已应用了原子算符的特征函数表达式(2.4.110)式.(2.4.113)式表明，原子系的准概率分布函数是原子算符特征函数(2.4.111)式的傅里叶变换. 也就是说，通过原子算符特征函数(2.4.111)式的傅里叶变换，可以得到原子准概率分布的 P 表示 $P^{(a)}(t)$.

若展开特征函数

$$C^{(a)}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) = \langle \exp(i\zeta_1 S_-(t))\exp(i\zeta_2 S_z(t))\exp(i\zeta_3 S_+(t))\rangle$$
$$= \sum_{p,q,r} \frac{1}{p!q!r!} \langle (i\zeta_1 S_-(t))^p$$
$$\times (i\zeta_2 S_z(t))^q (i\zeta_3 S_+(t))^r \rangle \qquad (2.4.114)$$

仍考虑起始阶段的线性区域，即应用(2.4.87)和(2.4.89)式，并将(2.4.88)式代入上式，将发现只有正比于随机力的部分不为零、最后(2.4.114)式变成为

$$C^{(a)}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,t) = \exp\left(i\zeta_2 \frac{N}{2}\right)\exp[-|\zeta_1|^2\langle S_-(t)S_+(t)\rangle]$$
$$= \exp\left[i\zeta_2 \frac{N}{2} - |\zeta_1|^2\langle S_-(t)S_+(t)\rangle\right] \tag{2.4.115}$$

其中已考虑到 $\zeta_3=\zeta_1^*$. 若再对特征函数(2.4.115)式进行傅里叶变换,就能得到准概率分布函数:

$$P^{(a)}(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint d\zeta_2 d^2\zeta_1 \exp[-i\zeta_2 m - i(\zeta_1\beta + \zeta_1^*\beta^*)]$$
$$\times \exp\left[i\zeta_2 \frac{N}{2} - |\zeta_1|^2\langle S_-(t)S_+(t)\rangle\right]$$

利用关系式

$$\int d\zeta_2 \exp\left[-i\zeta_2\left(\frac{N}{2} - m\right)\right] = \delta\left(m - \frac{N}{2}\right)$$

则有

$$P^{(a)}(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint d^2\zeta_1 \exp[-i(\zeta_1\beta + \zeta_1^*\beta^*)$$
$$- |\zeta_1|^2\langle S_-(t)S_+(t)\rangle]$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty r dr \exp[-2ir|\beta| - r^2\langle S_-(t)S_+(t)\rangle]$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty r \exp\left[-\langle S_-(t)S_+(t)\rangle\left(r - \frac{i|\beta|}{\langle S_- S_+\rangle}\right)^2\right]$$
$$\times e^{-|\beta|^2/\langle S_- S_+\rangle} dr$$
$$= \frac{1}{2\pi\langle S_- S_+\rangle} e^{-|\beta|^2/\langle S_- S_+\rangle} \tag{2.4.116}$$

其中已令 $r=|\zeta_1|$,并应用了公式

$$\int_0^\infty r e^{-ar^2} dr = \frac{1}{2a} \tag{2.4.117}$$

方程(2.4.116)式的结果表明,受激原子系的初始阶段,原子系统的概率分布函数具有布朗运动的高斯分布特征. 若注意到其中原子算符的横向分量乘积的期望值由(2.4.91)式表示,则可见准概率分布函数 $P^{(a)}(t)$[(2.4.116)式]的数值将随着时间的增加而减

小，也就是说其高斯分布特性将减少，系统向着经典行为演化. 所以真空场涨落的作用不仅是触发充分激发的原子系统起始衰变的重要根源，而且也是起始阶段使系统呈现布朗随机运动特征的基本因素. 不过，随着集合原子系自身合作辐射作用的增强，系统将会呈现类似经典的相干辐射行为.

3. 热辐射场的触发作用

如果假定起始时刻辐射场不是真空场，而是有非零的热平衡单模光场存在，并且其频率与二能级原子的本征频率共振. 这种情况，与里德堡原子的超辐射情况相关. 此时，与热辐射场相互作用的二能级原子系集合算符 S_-，S_+ 和 S_z 的运动方程仍由(2.4.34)—(2.4.36)式描述，热辐射场对原子系的作用仍由随机力 $F(t)$[(2.4.45)式]表征，由第一篇第三章可知，热平衡时辐射场的密度算符为

$$\rho = \sum_{n_k} P\{n_k\} |\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}| \qquad (2.4.118)$$

这里的概率分布 $P_{\{n_k\}}$应为

$$P_{\{n_k\}} = \prod_{k} (\bar{n}_k)^n/(1+\bar{n}_k)^{1+n} \qquad (2.4.119a)$$

$$\bar{n}_K = [\exp(\hbar\omega_k/k_B T) - 1]^{-1} \qquad (2.4.119b)$$

于是应用(2.4.118)式，可得知随机力具有统计性质：

$$\langle F(t)\rangle = \langle F^+(t)\rangle = 0 \qquad (2.4.120a)$$

$$\langle F(t)F^+(t')\rangle = (\bar{n}_0 + 1)\gamma\delta(t-t') \qquad (2.4.120b)$$

$$\bar{n}_0 = [\exp(\hbar\omega_0/k_B T) - 1]^{-1} \qquad (2.4.120c)$$

比较(2.4.120)式和(2.4.48)式可知，此时已用$(\bar{n}_0+1)\gamma$代替了原来(2.4.48)式中的γ，但随机力$F(t)$的高斯特性并不改变，这样前面的讨论可以不作大的改动. 所以如同真空场的涨落所引起的作用类似，热光场的效应仅在原子系统衰变的起始阶段起作用. 首先它也是触发受激原子系衰变的根源. 另一方面在讨论算符的准概率分布 $P^{(c)}(t)$以后，也会得到(3.4.116)式所示的结果. 不过由

于随机力的关联应由(2.4.120)式描述，此时量子期望值$\langle S_-S_+\rangle$不由(2.4.91)式给出，而应是

$$\langle S_-(t)S_+(t)\rangle = N(\bar{n}_0+1)(e^{N\gamma t}-1) \quad (2.4.121)$$

显然它仍与(2.4.91)式有类似的时间演化规律，所以不改变其统计特性. 可见热光场的效应，除了对受激原子系起始衰变有触发作用以外，在衰变的起始阶段，它还是加速原子系统布朗随机运动过程的重要根源.

第四节　超荧光拍

一、超荧光拍的基本特征

上面在讨论超荧光发射系统中，我们假定受激原子具有相同的本征跃迁频率，然而如果受激原子系统中原子的能级有微小分裂，因而原子起始时可能布居在两个靠近的高能态上，如图 2.4.9(a)所示，此后原子各自独立地衰变到不同或相同的低能态上，如图 2.4.9(a)或 2.4.9(b)所示. 也有可能出现处于相同激发态的原子衰变到不同低能态上的情况，如图 2.4.9(c)所示. 这些情况都对应两群具有不同共振频率的原子，彼此独立地合作衰变. 这种不同频率辐射源的衰变，将发生瞬态相干作用，从而导致超荧光输出过程中的量子拍效应，即呈现超荧光拍.

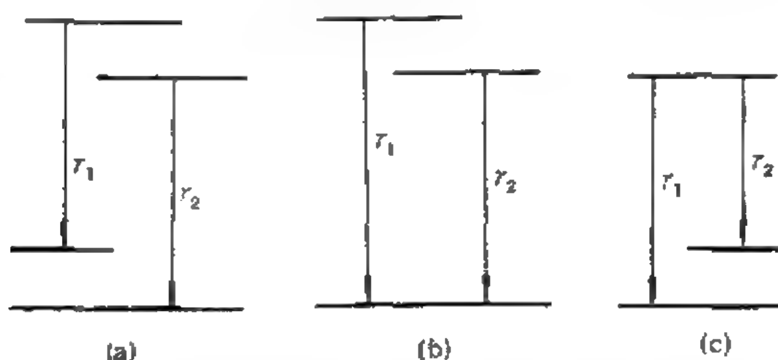


图 2.4.9　导致超辐射拍的三种类型跃迁

(a) 混合型跃迁；(b) "V"型跃迁；(c) "Λ"型跃迁

1976 年，Verhen 首次从实验上观察到了超荧光拍现象. 他们在观察用脉冲激光激发后的铯(Cs)原子时，发现在如图 2.4.10

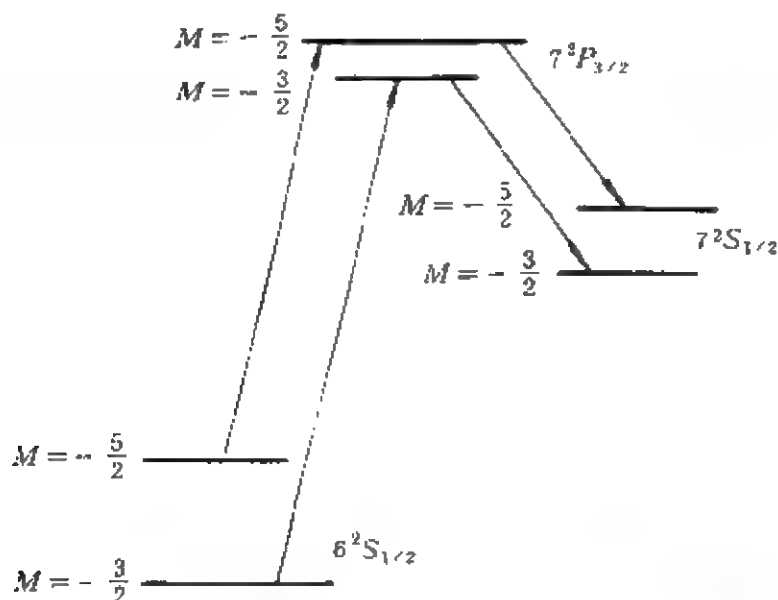


图 2.4.10 铯(Cs)原子的超荧光拍跃迁，$7^2P_{3/2}\to 7^2S_{1/2}$的超精细结构衰变

所示的 $7^2P_{3/2}\to 7^2S_{1/2}$超精细结构的衰变中，呈现出超荧光拍效应. 后来 Ryschka 等人又观测了 Cs 原子的 $5^2D_{3/2}\to 6^2P_{1/2}$超精细结构

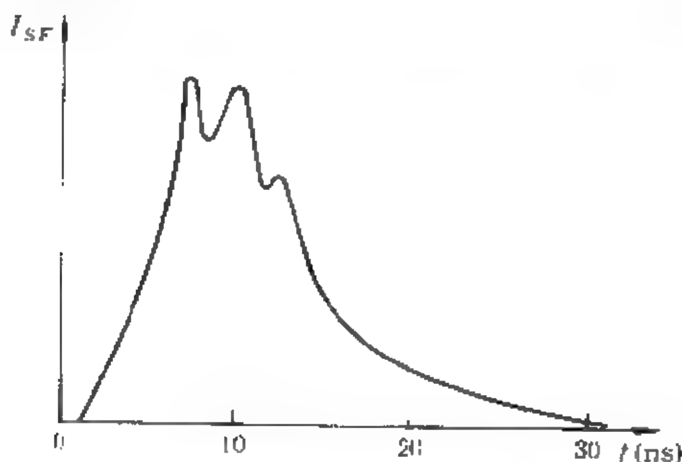


图 2.4.11 超荧光拍的实验观测结果图形

的超荧光衰变，得到形如图 2.4.11 所示的超荧光拍. 实验结果表明，不同共振频率(频率为 ω_1 和 ω_2)的两群原子的超荧光衰变发生瞬态相干效应，呈现超荧光拍，其输出脉冲振幅受两源差频 $\delta\omega=$

$\omega_1-\omega_2$ 调制.

单原子自发发射的量子拍现象早已为实验所观察，它要求原子始态为分裂原子态的叠加态，然后衰变到共同的终态，所以它能揭示出原子始态的能级分裂. 超荧光拍现象则不同，它是两群不同频率的原子独立超荧光衰变的相干效应，所以它不仅能反映原子始态的能级分裂，而且还能反映原子终态的能级分裂，特别是由于超荧光脉冲是很强的讯号脉冲，而且具有很强的方向性，所以把超荧光拍应用于高分辨率频谱技术，可能有很重要的意义.

二、狄克模式的超荧光拍

现在从理论上讨论多原子系统产生超荧光拍的情况. 假设系统由两群数目相等而本征频率为 ω_1 和 ω_2($\omega_1\neq\omega_2$)的二能级原子组成，令系统总的原子数为 N，对于每一群原子，可分别采用集合原子算符 S_1 和 S_2 来描述

$$S_\eta=\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}}S^{(\eta,l)}\qquad(\eta=1,2)\tag{2.4.122}$$

它们的分量为

$$S_{\eta,q}=\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}}S_q^{(\eta,l)}\qquad(q=x,y,z,+,-)\tag{2.4.123}$$

式中 $S_q^{(\eta,l)}$ 表示频率为 ω_η 的第 l 个原子算符的 q 分量. 这样，描述系统的哈密顿量在旋波近似下可写为

$$H=H_0+\Delta+V\tag{2.4.124}$$

其中

$$H_0=\sum_k\hbar\,\omega_k a_k^+a_k+\frac{1}{2}\hbar\,(\omega_1+\omega_2)\sum_l(S_z^{(1,l)}+S_z^{(2,l)})\tag{2.4.125}$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\hbar\,(\omega_1-\omega_2)\sum_l(S_z^{(1,l)}-S_z^{(2,l)})\tag{2.4.126}$$

$$V=\sum_k[e_1(k,l)+e_2(k,l)]\tag{2.4.127}$$

$$e_1(k,l) = \varepsilon_k a_k S_+^{(1,l)} + h.c. \tag{2.4.128a}$$

$$e_2(k,l) = \varepsilon_k a_k S_+^{(2,l)} + h.c. \tag{2.4.128b}$$

为了解整个系统的行为，我们先来讨论每个 k 模式的光子数算符 $p(k)=a_k^+ a_k$，以及每一个原子与k模式光场的相互作用能 $e_1(k,l)$和 $e_2(k,l)$等算符期望值的时间演化. 注意到系统具有左右对称性，可以采用如下的符号规定：

$$p(|k|)=\frac{1}{2}[p(k)+p(-k)] \tag{2.4.129}$$

$$e(|k|,\eta,l)=\frac{1}{2}[e(k,\eta,l)+e(-k,\eta,l)] \qquad (\eta=1,2) \tag{2.4.130}$$

光子数算符 $p(|k|)$的海森伯运动方程为

$$\hbar\frac{dp(|k|)}{dt} = -i[p(|k|),H] = \sum_{\eta,l}\bar{e}(|k|,\eta,l) \tag{2.4.131}$$

其中

$$e(|k|,\eta,l) = \frac{1}{2}[\bar{e}(k,\eta,l) + \bar{e}(-k,\eta,l)] \tag{2.4.132a}$$

$$\bar{e}(|k|,\eta,l) = -i(\varepsilon_k a_k S_+^{(\eta,l)} - h.c.) \tag{2.4.132b}$$

$e(|k|,\eta,l)$和 $\bar{e}(|k|,\eta,l)$的运动方程分别为

$$\hbar\frac{de(|k|,\eta,l)}{dt} = -\hbar(\Omega_k - \delta\omega_\eta)\bar{e}(|k|,\eta,l) - |\varepsilon_k|^2\sum_{m,\xi}S(\eta,l,\xi,m) \tag{2.4.133}$$

$$\hbar\frac{d\bar{e}(|k|,\eta,l)}{dt} = -\hbar(\Omega_k - \delta\omega_\eta)e(|k|,\eta,l) + 2|\varepsilon_k|^2(S_z^{(\eta,l)} + 1/2) + |\varepsilon_k|^2\sum_{m,\xi}(1-\delta_{\eta,l;\xi,m})S(\eta,l,\xi,m) \tag{2.4.134}$$

其中

$$\Omega_k=\omega_k-\omega_0,\omega_0=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2),\delta\omega_\eta=\omega_\eta-\omega_0 \quad (2.4.135)$$

$$\xi=1,2; \qquad m=1,2,\cdots,N/2$$

并且

$$S(\eta,l;\xi,m)=S_+^{(\eta,l)}S_-^{(\xi,m)}+h.c. \quad (2.4.136a)$$

$$\overline{S}(\eta,l;\xi,m)=i(S_+^{(\eta,l)}S_-^{(\xi,m)}-h.c.) \quad (2.4.136b)$$

此外由算符 $S_z^{(\eta,l)}$ 的海森伯方程给出

$$\hbar\frac{d}{dt}S_z^{(\eta,l)}=-2\sum_{k>0}\bar{e}(|k|,\eta,l) \quad (2.4.137)$$

事实上,我们需要了解的系统信息,主要是系统辐射强度的时间行为,这就是说,如果我们得知

$$\langle S_z\rangle=\sum_{\eta,l}\langle S_z^{(\eta,l)}\rangle \quad (2.4.138)$$

的时间演化表达式,那么我们也就得知系统的辐射强度分布情况.因此需要由方程(2.4.137)式求解$S_z^{(\eta,l)}(t)$.为此必须先求得$\bar{e}(|k|,\eta,l)$的表达式.把方程(2.4.134)式再次求导数,得

$$\begin{aligned}\hbar\frac{d^2}{dt^2}\bar{e}(|k|,\eta,l)=&-(\Omega_k-\delta\omega_\eta)\frac{d}{dt}e(|k|,\eta,l)+2|\varepsilon_k|^2\frac{d}{dt}(S_z^{(\eta,l)}\\&+\frac{1}{2})+|\varepsilon_k|^2\sum_{l,m}(1-\delta_{\eta,l;\xi,m})\frac{d}{dt}S(\eta,l,\xi,m)\\=&\hbar(\Omega_k-\delta\omega_\eta)^2\bar{e}(|k|,\eta,l)-|\varepsilon_k|^2(\Omega_k-\delta\omega_\eta)\\&\times\sum_{m,\xi}\overline{S}(\eta,l,\xi,m)+2|\varepsilon_k|^2\frac{d}{dt}[S_z^{(\eta,l)}+\frac{1}{2}\\&+\sum_{m,\xi}(1-\delta_{\eta,l;\xi,m})S(\eta,l,\xi,m)]\end{aligned}$$

(2.4.139)

由于上式中含 ε_k^2 的项可以作为微扰部分,方程中的主要部分

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{e}(|k|,\eta,l)=(\Omega_k-\delta\omega_\eta)^2\bar{e}(|k|,\eta,l) \quad (2.4.140)$$

的通解为

$$\bar{e}(|k|,\eta,l)=A\sin(\Omega_k-\delta\omega_\eta)t \qquad (2.4.141)$$

考虑到初始条件

$$\langle\bar{e}(|k|,\eta,l)\rangle|_{t=0}=\langle\sum_l\bar{e}(|k|,\eta,l)\rangle|_{t=0}=0$$

(2.4.142)

和

$$\langle e(|k|,\eta,l)\rangle|_{t=0}=2|\epsilon_k^2|\hbar^{-1} \qquad (2.4.143)$$

于是可得方程(2.4.139)式的解的期望值为

$$\begin{aligned}\langle\bar{e}(|k|,\eta,l)\rangle &= |\epsilon_k^2|\hbar^{-1}\int_0^t dt'\frac{\sin(\Omega_k-\delta\omega_\eta)(t-t')}{\Omega_k-\delta\omega_\eta}\\ &\times\frac{d}{dt}\left[2(\langle S_z^{(\eta)}\rangle+1/2)+\left(\frac{N}{2}-1\right)\langle S(\eta,\eta)\rangle+\frac{N}{2}\langle S(\eta,\xi)\rangle\right]\\ &-|\epsilon_k^2|\hbar^{-1}\int_0^t dt'[\sin(\Omega_k-\delta\omega_\eta)(t-t')]\langle S(\eta,\xi)\rangle\\ &+2|\epsilon_k^2|\hbar^{-1}\frac{\sin(\Omega_k-\delta\omega_\eta)t}{\Omega_k-\delta\omega_\eta} \qquad (\eta\neq\xi)\end{aligned} \qquad (2.4.144)$$

把上式对所有辐射场模式作和过渡为连续谱求积分，于是由方程(2.4.137)式得到

$$\begin{aligned}T_{1,l}\frac{d}{dt}\langle S_z^{(\eta)}\rangle &= -(\langle S_z^{(\eta)}\rangle+1/2)-\frac{1}{2}\\ &\times\left[\left(\frac{N}{2}-1\right)\langle S(\eta,\eta)\rangle+\frac{1}{2}N\langle S(\eta,\xi)\rangle\right] \quad (\eta\neq\xi)\end{aligned}$$

(2.4.145)

其中 $T_{1,l}$ 是单个原子的衰变寿命.

当 $\omega_1=\omega_2$ 时，系统已不再分离为两群本征频率不同的原子，而成为 N 个本征跃迁频率相同的原子的合作辐射情况，也就是呈现超荧光辐射. 事实上，此时系统总自旋算符 S 是运动守恒量，因此总自旋横向分量的期望值可定义为

$$\langle S_\perp^2\rangle=\sum_{\substack{\eta,l\\ \xi,m}}\langle S_\perp^{(\eta,l)}\cdot S_\perp^{(\xi,m)}\rangle \qquad (2.4.146)$$

并能写成为

$$\langle S_{\perp}^{2}\rangle=\frac{1}{2}N\left(\frac{1}{2}N+1\right)-\langle S_{z}^{2}\rangle \tag{2.4.147}$$

这样，若在方程(2.4.145)式中对所有原子作和，并应用方程(2.4.136)和(2.4.147)式，且取近似$\langle S_z^2\rangle=\langle S_z\rangle^2$，即可得熟知的超荧光方程(2.4.63)式：

$$T_{1d}\frac{d}{dt}\langle S_z\rangle=-\left(\langle S_z\rangle+\frac{1}{2}N\right)-\left(\frac{1}{4}N^2-\langle S_z\rangle^2\right) \tag{2.4.148}$$

然而，当$\omega_1\neq\omega_2$时，由哈密顿量(2.4.124)式可知，系统的总自旋平方

$$\boldsymbol{S}^2=\boldsymbol{S}_1^2+\boldsymbol{S}_2^2+2\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 \tag{2.4.149}$$

不再是守恒量，这是因为

$$[H,\boldsymbol{S}^2]=[\Delta,2\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2]\neq0 \tag{2.4.150}$$

但是各群原子的总自旋平方$\boldsymbol{S}_1^2$和$\boldsymbol{S}_2^2$仍然是守恒量，因此方程(2.4.147)式应写为

$$\langle \boldsymbol{S}_{\perp}^{2}\rangle=\langle \boldsymbol{S}^{2}\rangle-\langle \boldsymbol{S}_{z}^{2}\rangle \tag{2.4.151}$$

此时，$\langle \boldsymbol{S}^2\rangle$是时间的函数.

由于S_1^2和S_2^2是运动守恒量，所以系统集合原子态的时间演化过程中将具有形式$|S_1,S_2,m_1,m_2\rangle$，其中S_1和S_2分别为两群原子角动量平方的量子数，此时为$S_1=S_2=\frac{1}{4}N$，m_1和m_2则分别为两角动量z分量的量子数. 显然，与超荧光的情况不同，在那里系统的演化如图 2.4.7 所示. 但现在的情况要复杂得多，因为依据角动量叠加规则，总系统的态矢量能写为$|S,m_1,m_2\rangle$，此时总角动量平方算符的量子数S在保持S_1,S_2起始值不变的情况下，仍可以有$S=|S_1-S_2|,|S_1-S_2|+1,\cdots,S_1+S_2-1,S_1+S_2$，其数值则可能为$0,1,2,\cdots,N$的任何值. 所以系统在演化过程中可以处在$S$的值比$N/2$小的态，甚至出现处于$S=0$的态. 由于系统的辐射强

度极强地依赖于 S 的值，因此可以看出，在 $\omega_1 \neq \omega_2$ 的情况下，总系统的辐射强度将会出现很大的变化.

在(2.4.145)式中对所有原子作和后，若代入(2.4.147)式则可得方程

$$T_{1,I}\frac{d\langle S_z\rangle}{dt} = -\left(\langle S_z\rangle + \frac{1}{2}N\right) - \left(\langle S^2\rangle - \langle S_z\rangle^2 - \frac{N}{2}\right) \tag{2.4.152}$$

或

$$\frac{d\langle S_z\rangle}{dt} = -\gamma\left(\langle S^2\rangle - \langle S_z\rangle^2 + \langle S_z\rangle\right) \tag{2.4.153}$$

其中

$$\gamma = 1/T_{1I}$$

显然为求解此方程，必须知道时间函数 $\langle S^2\rangle$ 的表示.

由(2.4.149)式知道，由于 S_1^2 和 S_2^2 是守恒量，所以 $\langle S^2\rangle$ 的时间变化决定于 $S_1 \cdot S_2$ 的时间变化，即决定于 $S(\eta,\xi)$[(2.4.136)式]的时间演化. $S(\eta,\xi)$ 的时间演化由它的海森伯方程给定. 通过相关的运算(有兴趣的读者可详见参考文献[10])最后可得 $\langle S^2\rangle$ 满足的二阶微分方程：

$$\frac{d^2\langle S^2\rangle}{dt^2} - \gamma\langle S_z\rangle\frac{d\langle S^2\rangle}{dt} + (\omega_1-\omega_2)^2\left[\langle S\rangle^2 - \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\right]$$
$$= \frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{2}\left[\langle S_z\rangle^2 - \left(\frac{N}{2}\right)^2\right] \tag{2.4.154}$$

求解方程(2.4.153)和(2.4.154)式可给出原子算符期望值 $\langle S_z(t)\rangle$ 的时间演化，从而得知系统的辐射强度 $I(t)\left(\propto \frac{d}{dt}\langle S_z\rangle\right)$ 随时间的分布. 下面我们给出方程组的数值解(通过计算机运算的结果)，如图 2.4.12 所示. 图中给出频差参量 $A=2T_R\delta\omega$ 分别取不同数值时的四条曲线，其中曲线(a)表示频差 $\delta\omega=\omega_1-\omega_2$ 比较小时，辐射强度随时间演化呈现的超荧光情况. 随着频差 $\delta\omega$ 的增加，如图 2.4.12 曲线(b)和(c)所示，系统出现明显的超荧光拍现象，拍频也随之增加，但拍的振幅变化幅度减小. 当频差 $\delta\omega$ 很大时，如

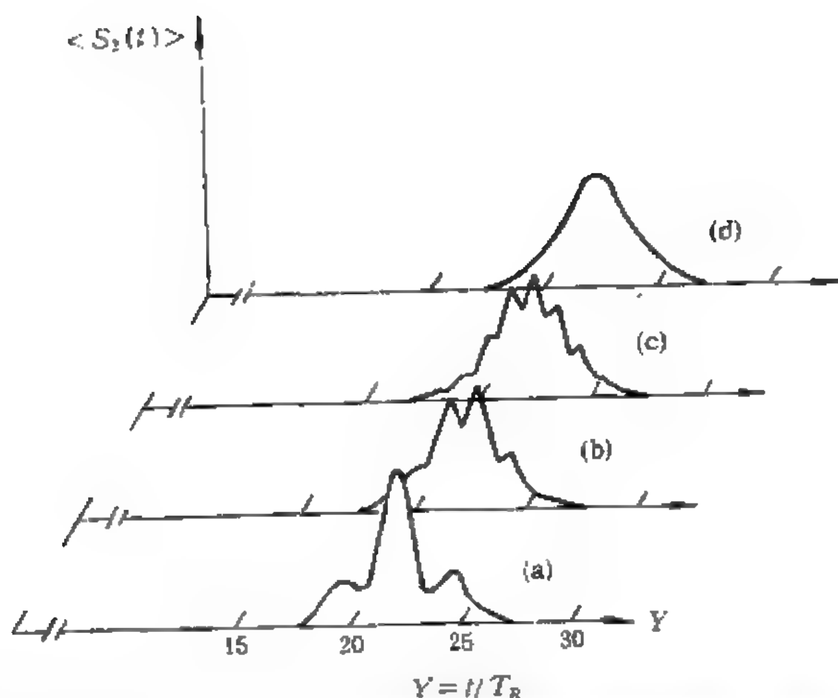


图 2.4.12　由(2.4.153)和(2.4.154)式的解得知的系统辐射强度 I 随时间 t 的演化
(a) $A=2$; (b) $A=4$; (c) $A=6$; (d) $A=\infty$

图 2.4.12 中曲线(d)所示，此时拍现象消失，呈现非相干独立辐射. 应当指出，图 2.4.12 所示的理论结果，与超荧光拍的实际结果形状上比较相符. 有关辐射强度、拍幅和拍频的变化与两源频差 $\delta\omega$ 的关系的基本结论也和实际结果相一致，但没有达到和实验结合精确相符的程度，特别是有关超荧光拍中量子涨落等方面的研究也有待于进一步深入探讨.

参　考　文　献

[1] C. Leonardi, F. Persico and G. Vetri, Dickel model and theory of driven and spontaneous emission, La Rivista de Nuovo Cimento, 1986.

[2] 彭金生，共振荧光与超荧光，科学出版社，1993.

[3] N. E. Rehler and J. H. Eberly, *Phys. Rev.*, **A3**, 1735 (1971).

[4] N. Skrianowitz, F. P. Herman, J. C. Mcgillivrag and M. S. Feld, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 309 (1973).

[5] R. Banifacio and L. A. Lugiato, *Phys. Rev.*, **A11**, 1507; **A12**, 587 (1975).

[6] Q. H. F. Verhenm, H. J. Hispoors and H. M. Gibbs, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 764 (1977).

[7] M. Gross, J. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 1711 (1978).
[8] M. Gross and S. Haroche, *Phys. Rep.*, **93**, 301 (1982).
[9] Q. H. F. Verhen and H. M. Gibbs, In Dissipative Systems in Quantum Optics, Springer, 1982.
[10] C. Leonardi, 彭金生, A. Vaglica, *J. Phys.*, **B15**, 4017 (1982).
[11] 彭金生,华中师范学院学报,**18**,24 (1984).
[12] 彭金生,物理学报,**33**,884 (1984).
[13] 彭金生,华中师范大学学报,**20**, 36 (1986).
[14] C. H. Keitel, M. O. Scully and G. Sussmann, *Phys. Rev.*, **A45**, 3242 (1992).
[15] R. Michalska-Trautman, *Phys. Rev.*, **A46**, 7270 (1992).
[16] F. Haake and M. I. Kolobov, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 995 (1993).

第五章　光学双稳态

量子光学中另一个十分重要的课题——光学双稳态是由Szöke 等人于 1969 年最先从理论上提出来的，随后于 1976 年 Gibbs 等人从实验上首次观察到光学双稳态现象. 由于光学双稳器件在光通讯、光计算机等方面有着广阔的应用前景，所以这些年来，在理论和实验方面都对光学双稳态开展了大量的研究工作. 至今有关光学双稳态的理论结构已比较完善，在实验技术上，特别是对于光学双稳态器件的制备和应用方面的研究工作则力图不断实用和完善.

本章中我们首先简要介绍光学双稳态的基本性质和它的产生机理，然后着重讨论光学双稳态的量子理论描述.

第一节　光学双稳态的基本性质和它的产生机理

当激光场通过由大量原子、分子组成的介质系统时，由于光与介质物质的相互作用，将使输出光场的强度发生非线性变化，出现给定的一种输入光强下，存在两种可能的输出光强状态，称为光学双稳态. 例如强度为 I_i 的激光场入射到如图 2.5.1 所示的充有非线性介质的法布里-珀罗光学腔时，输出光强 I_T 与输入光强 I_i 可

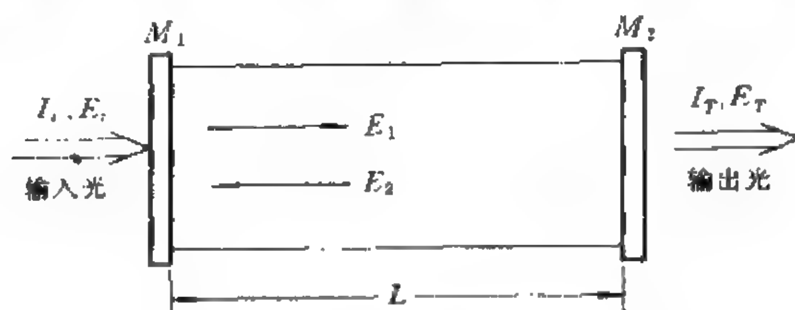


图 2.5.1　光学双稳态装置示意图

以呈现如图 2.5.2 所示的特征.

图 2.5.2 表明，当输入光强 I_i 不太大时，由于介质对光场的吸收和色散作用，使得输出光强 I_T 比输入光强 I_i 较小，随着输入光强的增加，输出光强也随之增加，如 OA 线段所示. 但当输入光强 I_i 增大到等于 I_B 时，此时输出光强突然非线性地跃变到 I'_C. 此后输出光强 I_T 随输入光强 I_i 的增加沿 CE 线稳定增加. 显然由于此时介质对输入光的吸收和色散已达到饱和状态，所以输出光强随输入光强的增加线性增加，且 CE 线段比 OB 线段有较大的斜率. 如果再减小输入光强，此时输出光强将沿 EC 线段线性减小，当输入光强减小到 I_B 时，输出光强并不立刻跃回到 I'_B 而是继续沿 ECD 线性地减小. 但是当输入光强减小到 I_A 时，输出光强则突然跃迁到 I'_A，此后随着输入光强 I_i 的减小，输出光强稳定地在 AO 线段上线性地减小. 由上可以看出，$ABCD$ 所示的区域内，对于输入光强的一个值，存在两个稳定的输出值，也就是产生了光学双稳态. 输出光信号究竟处于哪个稳定的状态与输入光信号变化过程的方向有关. 显然，在双稳区域中，如果给输入光束再附加一个正向加强脉冲光信号，那么输出光信号将会稳定在上面的分支(CE)上，反之若给输入光束附加的是反向脉冲光信号，那么输出光信号就会稳定在下面的分支(AO)上. 可见，利用光学双稳态的这一基

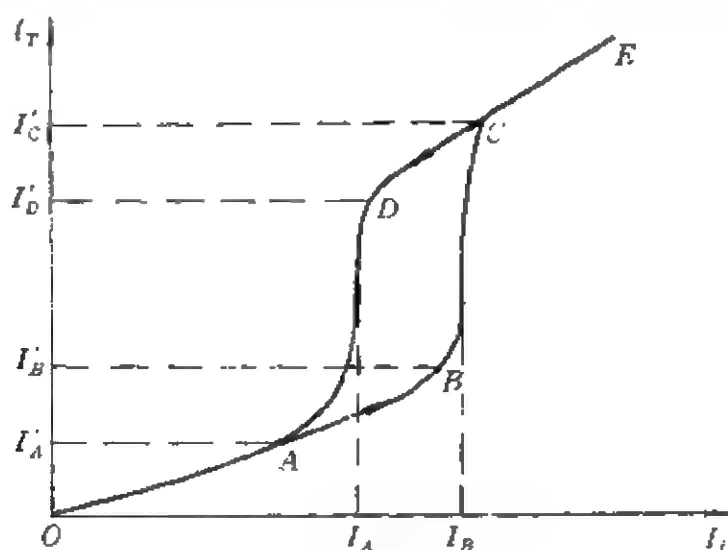


图 2.5.2　光学双稳态示意图

本特性，可实现光学开关、“门”信号和光学放大等功能而在光通讯、光计算机和集成光学等领域得到广泛的应用.

下面我们对输入激光经图 2.5.1 所示的法布里-珀罗腔体后，输出光场与输入光场的关系作一具体的解析分析.

当一束连续输出的激光注入到频率与激光频率共振或近共振的光学腔体时，入射光场会被腔体两端的透镜透射和反射. 如果腔体是一空腔，这时输出光场的强度 $I_T=|E_T|^2$ 正比于入射光场的强度 I_i，E_T 表示输出光场的振幅. 但是当腔体中填满介质原子后，介质原子和光场的作用将导致对光场的吸收和色散，使得输出光场量 E_T 变成输入光场量 E_i 的非线性函数，因而输出光场强度 I_T 就会非线性地随着入射光强 I_i 变化. 假设图 2.5.1 所示的腔体两端镜面的性质相同，并且对光场无损耗作用，反射系数 R 和透射系数 T 分别定义为

$$R=|\rho|^2,\qquad T=|\tau|^2 \tag{2.5.1}$$

式中 ρ 和 τ 是与 R 和 T 相对应的反射和透射幅，E_1 和 E_2 分别是腔体中的正向和反向传播电场. 由边界条件可知 E_1，E_2，E_T 及 E_i 之间满足

$$E_1=\tau E_i+\rho E_2 \tag{2.5.2}$$

$$E_T=\tau E_1 \tag{2.5.3}$$

$$E_2=\rho E_1\exp(2ikL-\alpha L) \tag{2.5.4}$$

这里已假设腔中介质原子性质相同且均匀填充在腔体中. 式中 k 为腔中光场的传播常数，它满足 $k=n\omega_L/c$，ω_L 为入射光场的频率，n 代表介质的折射率，因此，(2.5.4)式中的 $2kL$ 描述的是 E_1 和 E_2 之间的位相差，α 代表腔中介质对光场的单位长度未饱和吸收系数. 由于 E_T 随 E_1 线性变化，因此下面我们仅讨论 I_1 与 I_i 之间的变化关系.

由(2.5.2)和(2.5.4)式可知

$$E_1=\tau E_i/[1-\rho^2\exp(2ikL-\alpha L)] \tag{2.5.5}$$

显然，如果 α 和 k 是腔中光强的非线性函数，那么 I_1 与 I_i 之间就有一种非线性依赖关系.

现在假设腔体中所填充的介质是一种纯吸收介质，它对光场无色散作用，即腔中光场的传播系数 k 是一与腔中光强无关的常数，吸收系数 α 则随光强非线性变化. 这种情况下可以通过调节腔体长度，使得 $\rho^2 e^{2ikL}=|\rho|^2=R$. 进一步地，为简单起见，假设 $\alpha L \ll 1$，从而可忽略腔中光场在横向的变化，那么(2.5.5)式简化为

$$E_1=\tau E_i/[1-R(1-\alpha L)] \tag{2.5.6}$$

于是 I_1 与 I_i 满足如下关系式：

$$I_1=TI_i/[1-R(1-\alpha L)]^2 \tag{2.5.7}$$

若定义无量纲因子

$$C=R\alpha L/(1-R) \tag{2.5.8}$$

则(2.5.7)式变为

$$I_1=I_i/[T(1+C)^2] \tag{2.5.9}$$

式中已利用 $R+T=1$.

如果腔中介质原子(如二能级原子)与光场发生的是单光子相互作用，由本篇第三章第三节可以证明，未饱和吸收系数 α 与腔中光强之间满足

$$\alpha=\alpha_0/[1+(I_1+I_2)/I_s] \tag{2.5.10}$$

式中 α_0 为饱和吸收系数，I_s 是与 α_0 相对应的饱和光强. 在长时极限下，腔中正向传播光强与反向传播光强近似相等，即 $I_1\approx I_2$，从而无量纲因子变为

$$C=C_0/(1+2I_1/I_s) \tag{2.5.11}$$

式中 $C_0=R\alpha_0 L/(1-R)$. 将(2.5.11)式代入(2.5.9)式，则

$$I_i=TI_1[1+C_0/(1+2I_1/I_s)]^2 \tag{2.5.12}$$

注意到(2.5.3)式，即 $I_T = TI_1$，我们就解析地得到了输出光强 I_T 与输入光强 I_i 之间满足的关系式：

$$I_i = I_T\{1 + C_0/[1 + 2I_T/(TI_s)]\}^2 \qquad (2.5.13)$$

图 2.5.3 绘出了按(2.5.13)式给出的 I_T 与 I_i 之间的依赖关系. 它表明，当 C_0 较小时，即腔中介质的饱和吸收系数较小时，透射光强 I_T 与入射光强 I_i 之间几乎始终是一种线性依赖关系，但当 C_0 增大到某一值后(如图 2.5.3 中 $C_0 \geqslant 10$)，I_T 与 I_i 之间变化曲线的形状类似于“S”形. 显然，在“S”形的两端，即透射光强 I_T 随入射光强 I_i 的变化率 $dI_T/dI_i > 0$ 的部分，I_T 有两个稳定的分支. 这就是说，当 C_0 大于某一值后，在入射光强 I_i 的某一值域，透射光强 I_T 可以有两个不同的稳定值域，即系统的输出光可以有两个不同的稳定状态，也就是形成了光学双稳态. 在图 2.5.3 中“S”形的中间部分，$dI_T/dI_i < 0$，系统在这一分支是不稳定的，如果初始时系统处在这一分支，那么随着入射光强的微小变化，系统就会很快地跃变到两个稳定分支中的一支. 利用光学方法使处于 S 形部分的系统，通过调制入射光场量，使系统进入一个稳定分支态，从而可实现如前所述的光学“开关”等作用. 由于这里所讨论的介质对腔中光场只有吸收作用，因此这种光学双稳态又称为吸收型光学双稳态.

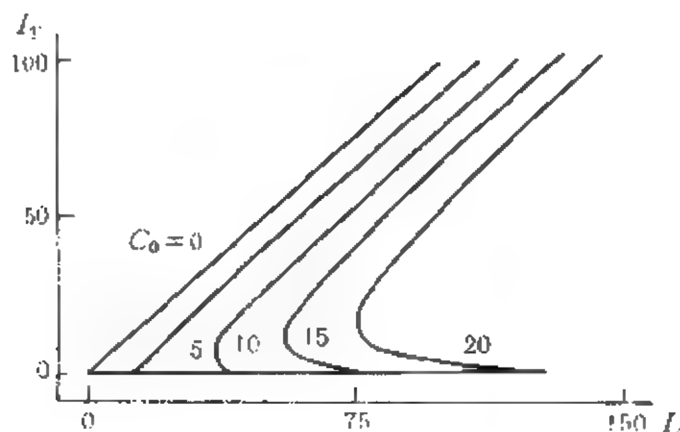


图 2.5.3 (2.5.13)式给出的输出光强 I_T 与输入光强 I_i 的依赖关系

从物理根源的角度看,出现吸收型光学双稳态的原因是腔中介质对光场的非线性吸收和反馈的共同作用.当入射光强较弱时,腔中介质对光场的未饱和吸收使得输出与输入呈线性关系,随着入射光强增大到一定程度,介质原子对光场的吸收饱和,使得腔内光强变强.腔内光强越强,则吸收作用越小,腔内光强就更强,这是一种正反馈过程,当入射光强达到特定值时,输出光强的增长斜率变为非常大,发生从下分支到上分支的跃变.

以上讨论了吸收型光学双稳态的基本原理.如果在法布里-珀罗腔中所填充的介质对光场具有色散作用,那么输出光强 I_T 与输入光强 I_i 之间又具有什么样的关系呢?下面再来分析这一情况.

如果腔中介质对腔中光场只有色散作用而无吸收作用,即 $\alpha=0$,折射率 n 依赖于腔中光强,在这种情况下,(2.5.5)式变为

$$E_1=\tau E_i/(1-\rho^2e^{2ikL})=\tau E_i/(1-Re^{i\delta}) \qquad (2.5.14)$$

这里已令

$$\rho^2=Re^{i\varphi} \qquad (2.5.15)$$

$$\delta=\varphi+2n(I)\omega_L L/c \qquad (2.5.16)$$

式中折射率 $n(I)$ 是腔中光强的函数.对于典型的色散介质——克尔介质,其折射率为

$$n(I)=n_0+n_2 I \qquad (2.5.17)$$

式中 n_0,n_2 是与 I 无关的常数.将(2.5.16),(2.5.17)式代入(2.5.14)式,得到 I_1 与 I_i 之间的关系式为

$$T'=I_1/I_i=T^{-1}/[1+(4R^2/T^2)\sin^2(\delta/2)] \qquad (2.5.18)$$

其中已利用了 $I=I_1+I_2\approx 2I_1$,并且相移因子 δ 为

$$\delta=\varphi+2n_0\omega_L L/c+4n_2\omega_L LI_1/c=\delta_0+(4n_2\omega_L L/c)I_1 \qquad (2.5.19)$$

显然 T' 是考虑腔中色散介质(克尔介质)影响的透射系数,它在 δ

$=2m\pi(m=0,1,2,\cdots)$处具有最大的峰值，如图 2.5.4 所示. 由于总可以选择适当的参数(如 R,T,n_2,L 等)使得峰宽很窄，这样就可以在 $\delta=2m\pi$ 峰值附近将 $\sin(\delta/2)$ 展开成级数，并且只取一次幂项就足够精确，即令

$$\sin(\delta/2)=(\delta-2m\pi)/2=\varphi_0+(2n_2\omega_L L/c)I_1 \quad (2.5.20)$$

式中 $\varphi_0=(\delta_0-2m\pi)/2$. 将(2.5.20)式代入(2.5.18)式，则 I_1 与 I_i 之间满足

$$I_i=\{1+4R^2[\varphi_0+(2n_2\omega_L L/c)I_1]^2/T^2\}I_1 \quad (2.5.21)$$

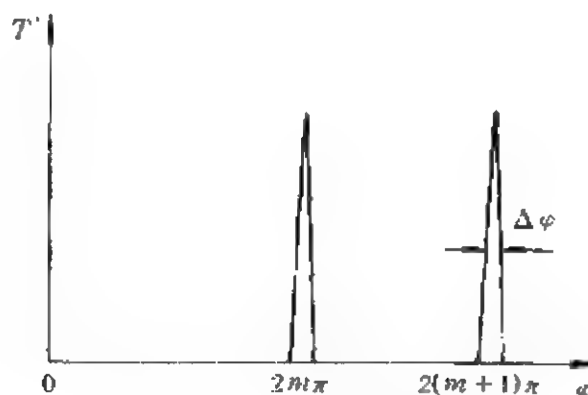


图 2.5.4 T'-φ 关系曲线

这是一个三次代数方程. 注意到 $I_T=TI_1$，也可得到输出光强 I_T 与输入光强 I_i 之间具有双稳态的函数关系. 如图 2.5.5 所示，不同的初始相位 φ_0 可得到不同值域的双稳曲线. 由于此时腔中介质是纯色散型的，因此通常把这类光学双稳态称为色散型光学双稳态.

色散型光学双稳态的产生机理可以这样理解，由于介质的折射率 n 线性地依赖于腔中光强 I，因此腔体的谐振波长就与 I 有关，谐振波长与入射激光的波长 λ_L 间的差值又影响入射光的透射系数 T'，使得腔中的光强 I 发生变化，显然这是一种反馈过程. 因此同吸收型光学双稳态一样，产生色散型光学双稳态的物理根源是由于光场与介质的非线性相互作用和光学反馈的共同影响.

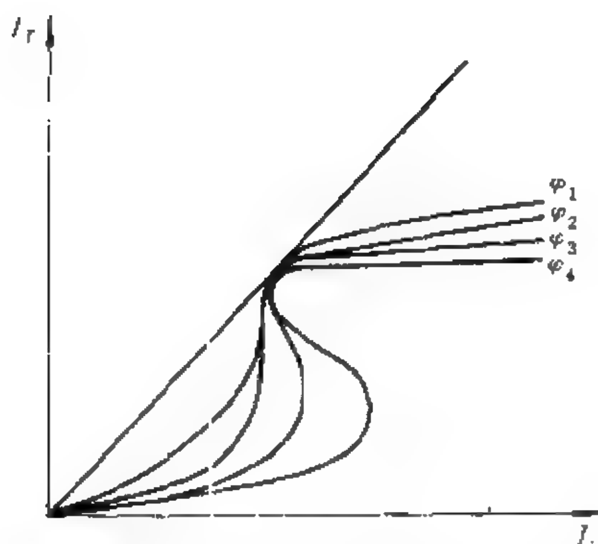


图 2.5.5 不同 φ_0 值时的色散型双稳特性曲线

光学双稳态除以上介绍的两种基本类型以外，还有一种色散和吸收混合型，这种光学双稳态是同时考虑腔中介质对光场的吸收和色散作用，其基本原理和上面的讨论是相似的，因此这里不再介绍.

第二节 色散型光学双稳态的量子理论描述

上一节我们一般地讨论了光学双稳态的基本性质，并从解析上论证了它的产生机理，那么如何应用量子理论精确地描述光学双稳态呢?本节就来回答这一问题. 这里仅以色散型的光学双稳态为例，介绍描述光学双稳态的量子理论.

一、描述光学双稳系统的哈密顿量

我们假设频率为 ω_0 的腔体中放置一色散型的非线性介质. 由非线性光学的理论知道，与腔中单模辐射场相互作用的非线性介质的极化强度可以表示为

$$\boldsymbol{P}=\chi^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}+\chi^{(2)}:\boldsymbol{EE}+\chi^{(3)}\vdots\boldsymbol{EEE}+\cdots \qquad (2.5.22)$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为介质的极化强度，E 为单模辐射场的电分量，$\chi^{(n)}$ 是介质的 $n+1$ 阶极化张量. 由介质中的麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}) \tag{2.5.23}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

可知，与非线性介质作用的辐射场的能量密度满足

$$c\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{2.5.24}$$

由于 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 是坡印亭矢量，(2.5.24)式说明，从单位体积内流出电磁能的速率等于所贮存的电磁能量密度减小的速率. 将(2.5.22)式代入(2.5.24)式可得

$$c\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=-\frac{\partial}{\partial t}U(\boldsymbol{r},t) \tag{2.5.25}$$

式中

$$U(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)-\frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{E}\cdot\chi^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{2}{3}\boldsymbol{E}\cdot\chi^{(2)}:\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}$$

$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\chi^{(3)}\vdots\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}+\cdots\Big) \tag{2.5.26}$$

是瞬时电磁能量密度. 于是辐射场与非线性色散介质的相互作用哈密顿量可以表示为

$$H=:\int d^3\boldsymbol{r}\{|\boldsymbol{B}|^2/(2\mu_0)+\boldsymbol{E}\cdot[(\varepsilon_0+\chi^{(1)})\cdot\boldsymbol{E}/2+\chi^{(2)}:\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}/3$$

$$+\chi^{(3)}\vdots\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}/4+\cdots]\}: \tag{2.5.27}$$

这里"::"表示正常序. 如果介质的三阶极化效应占据主要地位（即

$$H=:\int d^3\boldsymbol{r}\{|\boldsymbol{B}|^2/(2\mu_0)+\boldsymbol{E}\cdot[(\varepsilon_0+\chi^{(1)})\cdot\boldsymbol{E}/2+\chi^{(3)}\vdots\boldsymbol{EEE}/4]\}:$$

(2.5.28)

下面我们对哈密顿量(2.5.28)式进行量子化. 由于腔中场算符 $\boldsymbol{E}$ 可以展开为

$$\boldsymbol{E}=i(\hbar\omega_c/2\varepsilon_0)^{1/2}[a\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\exp(-i\omega_c t)-a^+\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{r})\exp(i\omega_c t)]$$

(2.5.29)

这里函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$满足归一化条件:

$$\int\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{r})\cdot(1+\chi^{(1)}/\varepsilon_0)\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}=1 \qquad (2.5.30)$$

将(2.5.29)式代入(2.5.28)式,并利用(2.5.30)式,在旋波近似下, 即忽略掉 $a^4\exp(-i4\omega_c t)$, $a^{+3}a\exp(2i\omega_c t)$ 等高阶项后, (2.5.28)式变为

$$H=\hbar\omega_c a^+a+\hbar\chi''a^{+2}a^2 \qquad (2.5.31)$$

这里

$$\chi''=(3\hbar\omega_c^2/8\varepsilon_0^2)\int d^3\boldsymbol{r}\chi^{(3)}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^4 \qquad (2.5.32)$$

这样我们就得到了腔场与非线性介质相互作用哈密顿量的量子化描述.

对于如图 2.5.1 所示的系统,如果入射光场是一强激光场,那么它可用经典电磁场描述,因而入射光场对腔场的驱动可以用哈密顿量

$$V=i\hbar[a^+E(t)\exp(-i\omega_L t)-aE^*(t)\exp(i\omega_L t)]$$

(2.5.33)

表示. 考虑到腔体对腔场的损耗,则整个系统的哈密顿量表示为

$$H=\hbar\omega_c a^+a+\hbar\chi''a^{+2}a^2+i\hbar[a^+E(t)\exp(-i\omega_L t)-aE^*(t)\cdot\exp(i\omega_L t)]+\sum_k\omega b_k^+b_k+\sum_k\varepsilon_k(a^+b_k+ab_k^+)$$

(2.5.34)

式中b_i,b_i^+表示热库算符,ω_L表示激光场的频率,$E(t)$则为激光场的幅值.下面我们从(2.5.34)式出发,讨论系统的光学双稳性质.

二、系统的光学双稳性质

如果我们假设图2.5.1所示的镜面M_2是全透射的,那么算符a的期望值就代表透射光场的幅值,为得知$\langle a\rangle$,必须知道描述系统的密度算符,为此需要求解系统的密度矩阵方程.在相互作用绘景中,由(1.5.89)式可知

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -i\Delta\omega[a^+a,\rho] - i\chi''[a^{+2}a^2,\rho] + [E(t)a^+ - E^*(t)a,\rho] + \kappa'(2a\rho a^+ - \rho a^+a - a^+a\rho) \quad (2.5.35)$$

这里已令热库处于真空态,式中$\Delta\omega=\omega_c-\omega_L$表征入射激光场与腔场之间的失谐量.将透射场的平均振幅记为

$$\alpha=\langle a\rangle=\mathrm{Tr}(\rho a) \quad (2.5.36)$$

则由(2.5.35)式可得α随时间的演化方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha=-i\Delta\omega\alpha-2i\chi''\langle a^+a^2\rangle-E(t)-\kappa'\alpha \quad (2.5.37)$$

同(2.4.78)—(2.4.79)式一样,这里略去涨落值$\langle a^+a^2\rangle-\langle a^+\rangle\langle a\rangle^2$,即假设

$$\langle a^+a^2\rangle=\langle a^+\rangle\langle a\rangle^2=\alpha^*\alpha^2 \quad (2.5.38)$$

那么(2.5.37)式简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha=-i\Delta\omega\alpha-2i\chi''\alpha^*\alpha^2+E(t)-\kappa'\alpha \quad (2.5.39)$$

同理可得$\alpha^*=\langle a^+\rangle$满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha^*=i\Delta\omega\alpha^*+2i\chi''\alpha\alpha^{*2}+E^*(t)-\kappa'\alpha^* \quad (2.5.40)$$

由于α,α^*是两独立变量,因此可以将方程(2.5.39)和(2.5.40)式写成矩阵形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\alpha \\ \alpha^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E(t)-(\kappa'+i\Delta\omega)\alpha-2i\chi''\alpha^*\alpha^2 \\ E^*(t)-(\kappa'-i\Delta\omega)\alpha^*+2i\chi''\alpha\alpha^{*2}\end{bmatrix} \tag{2.5.41}$$

通常情况下，我们关心的是透射光场的稳定输出，即只关心方程组(2.5.41)式的稳态解.显然由(2.5.41)式可知，透射光场场量的稳态解为

$$\begin{aligned}E&=(\kappa'+i\Delta\omega)\alpha+2i\chi''\alpha^*\alpha^2 \\ E^*&=(\kappa'-i\Delta\omega)\alpha^*-2i\chi''\alpha\alpha^{*2}\end{aligned} \tag{2.5.42}$$

如果定义正比于透射光强$|E_T|^2$的平均光子数为

$$n=\alpha^*\alpha \tag{2.5.43}$$

以下为书写简单起见，即将n称为透射光强，那么由(2.5.42)式可知，入射场强与透射场强之间满足关系式

$$|E|^2=n[\kappa'^2+(\Delta\omega+2n\chi'')^2] \tag{2.5.44}$$

显然上式与(2.5.21)式的形式相似.图2.5.6给出了在κ'，χ''及$\Delta\omega$取不同值时，n与$|E|^2$间的依赖关系.很显然，稳态情况下透

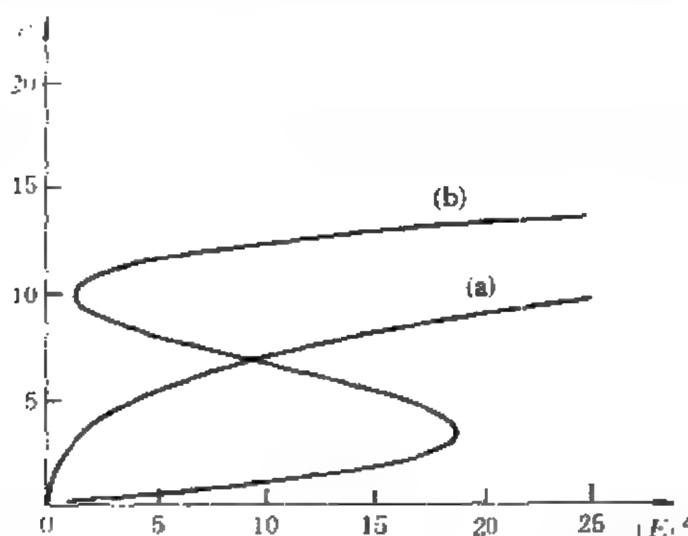


图 2.5.6 $\Delta\omega$，κ'，χ''取不同值时，n随$|E|^2$变化的曲线

(a) $\Delta\omega=0.5$，$\kappa'=1$，$\chi''=0.2$；

(b) $\Delta\omega=-10$，$\kappa'=1$，$\chi''=0.2$

射光强n的行为强烈依赖于κ'，χ''及$\Delta\omega$的不同取值.图中表明在

$\kappa'=1, \chi''=0.5, \Delta\omega=-10$ 时，系统出现了双稳现象．而在 $\kappa'=1$，$\chi''=0.2, \Delta\omega=0.5$ 时，透射光强不具有双稳性质．那么系统在什么情况下才会出现稳定的双稳性质呢？下面我们利用稳态线性化分析方法来讨论系统的稳定性．

由于系统量子涨落的存在，因此在稳态情况下，系统的物理量会在其稳态解附近有一小的涨落．稳态线性化分析方法的思想是在稳态解的领域内引入一小的涨落，即令

$$\alpha(t)=\alpha_0+\alpha_1(t) \tag{2.5.45}$$

式中 α_0 为方程组(2.5.41)式的稳态解，$\alpha_1(t)$ 反映小的涨落项．将(2.5.45)式及其共轭一并代入非线性方程组(2.5.41)式，并且只保留至 α_1，(t) 的一次幂项，则得到关于 $\alpha_1(t)$ 的线性方程组：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_1^*(t)\end{bmatrix}&=-\begin{bmatrix}\kappa+4\chi n & 2\chi\alpha_0^2\\ 2\chi^*\alpha_0^{*2} & \kappa^*+4\chi^* n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_1^*(t)\end{bmatrix}\\ &=-A\begin{bmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_1^*(t)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.5.46}$$

式中 $\chi=i\chi''$，$\kappa=\kappa'+i\Delta\omega$，由微分方程的理论知道，要使非线性微分方程组(2.5.41)式有稳定的解，应满足以下条件：

$$\mathrm{Tr}(A)>0 \tag{2.5.47a}$$

$$\mathrm{Det}(A)>0 \tag{2.5.47b}$$

由(2.5.46)式可知

$$\mathrm{Tr}(A)=2\kappa' \tag{2.5.48}$$

$$\mathrm{Det}(A)=12|\chi|^2n^2+4n(\chi\kappa^*+\chi^*\kappa)+|\kappa|^2 \tag{2.5.49}$$

由于 κ' 反映腔体对腔场的损耗，其值恒大于零，即 $\kappa'>0$，这就是说 $\mathrm{Tr}(A)>0$．为使(2.5.49)式满足(2.5.47b)式，n 的取值应满足

$$n>n_+ \quad 或 \quad n<n_- \tag{2.5.50}$$

式中

$$n_{\pm}=\frac{-2\Delta\omega\pm\sqrt{(\Delta\omega)^2-3\kappa'^2}}{6\chi''} \tag{2.5.51}$$

由于 $n_{\pm}$ 必须是实数并且均须大于零，由(2.5.51)式知，κ'，χ'' 及 $\Delta\omega$ 应满足条件

$$\begin{aligned}(\Delta\omega)^2 &> 3\kappa'^2\\ \Delta\omega\chi'' &< 0\end{aligned} \tag{2.5.52}$$

这就是说，在参量 κ'，χ'' 及 $\Delta\omega$ 满足(2.5.52)式时，系统的透射光强将出现稳定的双稳态. 很显然，图 2.5.6 所示的 $\kappa'=1$，$\chi''=0.5$，$\Delta\omega=-10$ 满足(2.5.52)式，因而图中显示出透射光强有两个稳定的透射支.

由(2.5.44)式知，透射光强 n 正比于输出光强 I_T，所以输出光强有两个稳定的值. 可见上述量子理论的结果表明，若在法布里-珀罗腔中填充非线性色散介质，在一定的条件下确实可以产生光学双稳态.

参 考 文 献

[1] A, Szöke V. Daneu, J. Goldhar and N. A. Kurnit, *Appl, Phys, Lett.*, **15**, 376 (1969).

[2] H. M. Gibbs, S. L. McCall and T. N. C. Venkatesan, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 113 (1976).

[3] P. D. Drummond and D. F. Walls, *J. Phys.*, **A13**, 725 (1980).

[4] L. A. Lugiato, "Theory of Optical Bistability," in Progress in Optics XXI, edited by E. Wolf, North-Holland, 1984.

[5] Y. R. Shen, The Principles of Nonlinear Optics, Chap. 2, John Wiley & Sons, 1984.

[6] 李淳飞，物理学进展，**6**，427 (1986).

[7] F. A. M. de Oliveira and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A39**, 3417 (1989).

[8] R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Chap. 6, Academic Press, 1992.

第六章　虚光场效应

前面我们讨论光场与二能级原子的相互作用系统时，都采用了旋波近似，也就是忽略了非旋波项

$$\varepsilon(a^{+}S_{+}+aS_{-}) \text{ 或 } \sum_{k}\varepsilon_{k}(a_{k}^{+}S_{+}+a_{k}S_{-}) \tag{2.6.1}$$

的影响。这是由于非旋波项对应的跃迁过程导致系统的能量改变量 ΔE 很大，如图 2.6.1 所示。(2.6.1)式描述处在基态的原子发射一个光子并且跃迁到激发态[如图 2.6.1(a)]或从激发态吸收一个光子跃迁到基态[如图 2.6.1(b)]的两种跃迁过程。此时光场与原子相互作用系统的能量改变量为 $\Delta E=E_2-E_1+\hbar\omega=\hbar\omega_0+\hbar\omega$，它远大于零，系统的能量不守恒，所以通常可忽略这种过程。另一方面，依据海森伯能量-时间不确定关系：

$$\Delta E\cdot\Delta\tau\approx\hbar \tag{2.6.2}$$

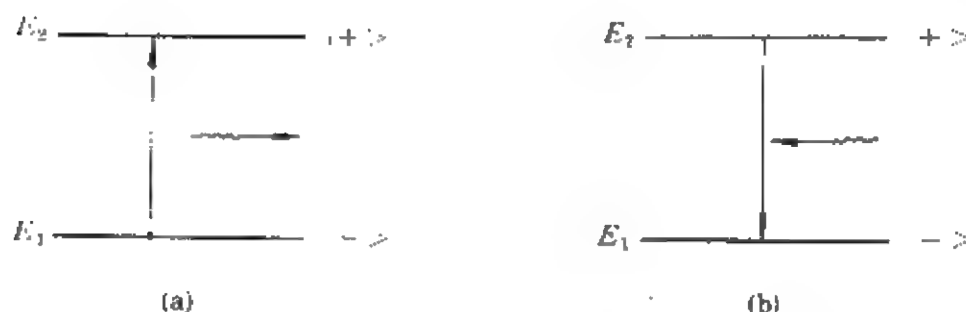


图 2.6.1　虚光子过程对应的能级跃迁图示

由于 $\Delta E\gg0$，所以非旋波项跃迁所产生的光子的寿命 $\Delta\tau$ 很小，我们把这样的光子称为虚光子，而旋波项对应的跃迁所导致系统能量的改变为 $\Delta E=\hbar\omega_0-\hbar\omega$，几乎为零，所以它所产生的光子的寿命 $\Delta\tau$ 很长，它们是可测量的实光子。虚光子产生以后，在很短的时间内就被原子重新吸收，所以不能测量，但同时原子则从激发态

又回到基态，所以能量守恒定律在一个较长的时间内仍然是成立的. 通常我们把图 2. 6.1 所示的跃迁过程称为虚光子过程，把虚光子场称为虚光场，由虚光子过程导致的效应称为虚光场效应. 从整个系统来看，除了有旋波项跃迁产生的长寿命的可测量的实光子以外，还有许多快速产生而又快速吸收的虚光子，这些虚光子形成虚光子云环绕场源. 即使是中性原子，由于量子起伏效应，将使系统的能量发生改变而导致虚光子的产生和吸收，所以中性原子也是为虚光子云所环绕的.

由于虚光子过程在光与原子相互作用系统中是实实在在存在的过程，因此深入探讨虚光场对系统行为的影响，不仅在理论上而且在实际中都是十分必要的. 本章我们首先讨论虚光场对氢原子基态能量的修正，从而揭示兰姆位移的物理根源；接着分析光场与二能级原子发生单光子相互作用的系统中，虚光子过程对光场相位性质的影响，并指出虚光子过程的影响能够展现系统的量子噪声，且使光场频率发生漂移；最后还分析了虚光场效应对光场压缩行为的影响.

第一节　氢原子的兰姆位移与虚光场效应

我们知道，对于一个裸氢原子，描述它的哈密顿量可以表示为

$$H_a = \sum_n E_n \sigma_{nn}, \quad \sigma_{nm} = |n\rangle\langle m| \tag{2.6.3}$$

式中 $|n\rangle$ 是与裸氢原子的能量本征值 E_n 相对应的本征态，σ_{nm} 是氢原子的广义原子算符. 描述一个裸氢原子与辐射场相互作用系统的哈密顿量可以写为

$$H = H_a + H_f + H_i \tag{2.6.4}$$

这里 $H_f = \sum_k \omega_k a_{kj}^+ a_{kj}$ 表示辐射场的哈密顿量，H_i 为裸氢原子与辐射场之间的相互作用哈密顿量，与(1.4.6)式相似，在偶极近似下，它可表示成

$$H_i = -\frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P} = -\frac{e}{m}\sum_{l,n}\sum_{e_j}\left(\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}\right)^{1/2}(\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{P}_{ln})\sigma_{ln}(a_{kj}+a_{kj}^{+})$$

(2.6.5)

式中 P_{ln}表示原子在基矢$|l\rangle$和$|n\rangle$之间的偶极强度.很显然,如果氢原子处在其裸基态$|1s\rangle$,而辐射场处在真空态$|\{0_k\}\rangle$,那么整个系统(原子加辐射场)处在基态:

$$|\varphi\rangle_0 = |1s,\{O_k\}\rangle \tag{2.6.6}$$

此时系统处于稳定状态,不辐射实光子.但是由于量子起伏效应,主要是真空场起伏效应,系统的能量 ΔE 发生改变,因而仍可能发生如图 2.6.1 所示的虚光子过程.也就是说,处于基态的氢原子在真空场的作用下,将在其基态和激发态之间发生快速往返的跃迁,在此跃迁过程中伴随着不同频率的虚光子的快速产生和湮没,这种过程连续发生,所以裸基态的氢原子被虚光子云包围,我们称此时的原子基态为"修饰基态".

由于以往计算原子的基态能量时未曾计及虚光子过程的效应,所以现在来讨论虚光场效应对氢原子基态能量的影响.因为(2.6.4)式中,反映虚光子过程的相互作用能 H_i 比 H_a 及 H_f 小得多,因此它可以作为微扰项来处理.根据微扰理论可得系统基态态函数的一级修正为

$$|\varphi\rangle_1 = \sum_i\sum_{kj}\frac{\langle i,1(kj)|H_i|1s,\{0_k\}\rangle}{E_{1s}-E_i-\hbar\,\omega_k}|i,1(kj)\rangle \tag{2.6.7}$$

这里态矢$|i,1(kj)\rangle$表示氢原子在其第 i 激发态而辐射场中只有一个模式为 kj 的光子.显然,$\langle i,1(kj)|H_i|1s,\{0_k\}\rangle$表示原子从基态发射一个光子跃迁到激发态$|i\rangle$或从激发态$|i\rangle$吸收一个光子而跃迁回基态的相互作用矩阵元,它们反映了虚光子过程对态函数的一级修正.同样地,系统基态态函数的二级修正为

$$|\varphi\rangle_2 = -\frac{1}{2}\sum_i\sum_{kj}\frac{|\langle i,1(kj)|H_i|1s,\{0_k\}\rangle|^2}{(E_{1s}-E_i-\hbar\,\omega_k)^2}|1s,\{0_k\}\rangle + \sum_{i,l}\sum_{kj,k'j'}D^{il}_{kjk'j'}|l,1(kj),1(k'j')\rangle \tag{2.6.8}$$

式中$|l,1(kj),1(k'j')\rangle$描述的是原子处在态$|l\rangle$，而辐射场具有两个模式不同的光子的态.由于我们只关心虚光场对能量的二级修正，而上式右边的第二项对能量的二级修正无贡献，在计算时可以略去，因此这里不必给出系数$D^{l}_{kjk'j'}$的具体表达形式.这样，修正后的基态态函数表示为

$$|\varphi\rangle=|\varphi\rangle_0+|\varphi\rangle_1+|\varphi\rangle_2 \qquad (2.6.9)$$

它就是原子修饰基态的态函数.有了态函数(2.6.9)式以后，就可以计算相互作用系统的能量期望值.

由(2.6.3)和(2.6.9)式可得原子的基态能由于虚光场效应而受的影响为

$$\langle H_a\rangle=\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle={}_0\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_0+{}_1\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_1+{}_0\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_2 +{}_2\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_0 \qquad (2.6.10)$$

利用(2.6.3)及(2.6.6)—(2.6.8)式可得

$${}_0\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_0=\sum_n E_n\langle 1s,\{0_k\}|\sigma_{nn}|1s,\{0_k\}\rangle=E_{1s} \qquad (2.6.11a)$$

$${}_1\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_1=\sum_i\sum_{kj}\frac{E_i}{\hbar}\frac{2\pi}{V}\frac{e^2}{m^2}\frac{|\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{P}_{0i}|^2}{\omega_k(\omega_{0i}+\omega_k)^2} \qquad (2.6.11b)$$

$${}_0\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_2=-\sum_i\sum_{kj}\frac{E_0}{\hbar}\frac{2\pi}{V}\frac{e^2}{m^2}\frac{|\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{P}_{0i}|^2}{\omega_k(\omega_{0i}+\omega_k)^2}={}_2\langle\varphi|H_a|\varphi\rangle_0 \qquad (2.6.11c)$$

式中$\omega_{0i}=(E_i-E_{1s})/\hbar$，$\boldsymbol{P}_{0i}=\langle 1s|\boldsymbol{P}|i\rangle$.将(2.6.11)式代入(2.6.10)式，得到

$$\langle H_a\rangle=E_{1s}+\frac{2\pi}{V}\frac{e^2}{m^2}\sum_i\sum_{kj}\frac{|\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{P}_{0i}|^2}{\omega_k(\omega_{0i}+\omega_k)^2}\omega_{0i} \qquad (2.6.12)$$

在连续谱极限下，上式对光场某一偏振方向j的所有k的求和过

渡为积分，即

$$\sum_{k}\{\quad\}\rightarrow\left(\frac{\sqrt[3]{V}}{2\pi c}\right)^{3}\int\omega_{k}^{2}d\omega_{k}d\Omega\{\quad\} \qquad (2.6.13)$$

由于光子是原子在从激发态向基态的跃迁过程中发射的，因此其频率是有限的. 即使氢原子的核外电子是相对论性粒子，当其湮没成光子时，光子的频率具有的极大值仍为有限值 $\omega_m=mc^2$，所以在上述积分式中存在一个有限的积分上限 ω_m. 这样，(2.6.12)式化为

$$\langle H_a\rangle=E_{1s}+\frac{e^2}{m^2c^34\pi^2}\sum_{i}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{\omega_m}d\omega_k\frac{\omega_k\omega_{0i}}{(\omega_{0i}+\omega_k)}\int d\Omega|\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{P}_{0i}|^2 \qquad (2.6.14)$$

若对两个偏振方向求和，可得

$$\sum_{j=1}^{2}|\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{P}_{0i}|^2=|\boldsymbol{P}_{0i}|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) \qquad (2.6.15)$$

式中 α 是偶极矢量 $\boldsymbol{P}_{0i}$ 和极化矢量 $\boldsymbol{e}_{k1}$ 间的夹角，β 是 $\boldsymbol{P}_{0i}$ 与 $\boldsymbol{e}_{k2}$ 间的夹角. 令 θ 为 $\boldsymbol{P}_{0i}$ 和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 间的夹角，则由余弦定理得

$$\sum_{j=1}^{2}|\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{P}_{0i}|^2=|\boldsymbol{P}_{0i}|^2(1-\cos^2\theta) \qquad (2.6.16)$$

若在(2.6.14)式的角向积分中取沿 $\boldsymbol{P}_{0i}$ 的方向为 z 轴，则有

$$d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (2.6.17)$$

和

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta=8\pi/3 \qquad (2.6.18)$$

于是(2.6.14)式化为

$$\begin{aligned}\langle H_a\rangle&=E_{1s}+\frac{2e^2}{3m^2c^3\pi}\sum_{i}\int_0^{\omega_m}d\omega_k\frac{\omega_k\omega_{0i}}{(\omega_k+\omega_{0i})^2}|\boldsymbol{P}_{0i}|^2\\&=E_{1s}+\frac{2e^2}{3m^2c^3\pi}\sum_{i}\omega_{0i}|\boldsymbol{P}_{0i}|^2\left\{-\frac{\omega_m}{\omega_m+\omega_{0i}}+\ln[(\omega_m+\omega_{0i})/\omega_{0i}]\right\}\\&\approx E_{1s}+\frac{3e^2}{3\pi m^2c^3}\sum_{i}\omega_{0i}|P_{0i}|^2\ln(\omega_m/\omega_{0i})\end{aligned} \qquad (2.6.19)$$

在上式的最后一步中，已利用了 $\omega_m\gg\omega_{0i}$. (2.6.19)式就是修饰基

态中 H_a 的期望值.同理可得

$$\langle H_f \rangle = \langle \varphi | H_f | \varphi \rangle = \frac{2\pi e^2}{Vm^2} \sum_i \sum_{kj} \frac{|\boldsymbol{e}_{kj} \cdot \boldsymbol{P}_{0i}|^2}{(\omega_k + \omega_{0i})^2}$$

$$\approx \frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} \sum_i |\boldsymbol{P}_{0i}|^2 [\omega_m - 2\omega_{0i} \ln(\omega_m/\omega_{0i})]$$

(2.6.20)

$$\langle H_i \rangle = \langle \varphi | H_i | \varphi \rangle = -\frac{4\pi e^2}{Vm^2} \sum_i \sum_{kj} \frac{|\boldsymbol{e}_{kj} \cdot \boldsymbol{P}_{0i}|^2}{\omega_k(\omega_k + \omega_{0i})}$$

$$\approx -\frac{4e^2}{3\pi m^2 c^3} \sum_i |\boldsymbol{P}_{0i}|^2 [\omega_m - \omega_{0i} \ln(\omega_m/\omega_{0i})]$$

(2.6.21)

这样,整个系统的能量改变值为

$$\langle H_a \rangle + \langle H_f \rangle + \langle H_i \rangle - E_{1s}$$

$$\approx \frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} \sum_i |\boldsymbol{P}_{0i}|^2 [-\omega_m + \omega_{0i} \ln(\omega_m/\omega_{0i})] \quad (2.6.22)$$

上式右边的第一项可写为

$$\Delta = -\frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} \sum_i |\boldsymbol{P}_{0i}|^2 \omega_m = -\frac{2\omega_m e^2}{3\pi m^2 c^3} \langle 1s, \{0_k\} | \boldsymbol{P}^2 | 1s, \{0_k\} \rangle$$

(2.6.23)

由(2.6.20),(2.6.21)式可以看到,它只出现在 $\langle H_f \rangle$,$\langle H_i \rangle$ 里.这就是说,处于基态的氢原子的核外电子由于真空起伏而导致的虚光子跃迁过程中,辐射出虚光子云,这一虚光场又与核外电子发生相互作用,从而导致 H_i 的值有一个改变量 2Δ,因而 Δ 可以看作为氢原子的核外电子产生的虚光场对自身的作用导致的质量重正化,对 $\langle H_f \rangle$ 及 $\langle H_i \rangle$ 的贡献上.

(2.6.22)式右边的第二项

$$\delta = \frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} \sum_i \omega_{0i} |\boldsymbol{P}_{0i}|^2 \ln(\omega_m/\omega_{0i}) \qquad (2.6.24)$$

可以看作为氢原子的基态能因虚光场作用发生的漂移,即兰姆位移.这是因为对于所有的 i 而言,均有 $\omega_m \gg \omega_{0i}$,因此可以认为在对 i 的作和式中,$\ln(\omega_m/\omega_{0i})$ 与 i 无关.故可以把 $\ln(\omega_m/\omega_{0i})$ 提到作和

号外，即

$$\delta = \frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} \ln(\omega_m / \omega_{0i}) \sum_i \omega_{0i} |P_{0i}|^2 \tag{2.6.25}$$

为了估算氢原子的兰姆位移量 δ，需要计算

$$\sum_i \omega_{0i} |P_{0i}|^2 \tag{2.6.26}$$

考虑到氢原子的哈密顿量可以写为

$$H_a = \boldsymbol{P}^2/2m - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = P^2/2m + V(r) \tag{2.6.27}$$

而对于系统的任意态矢 $|\Psi\rangle$

$$[P_j, H_a]|\Psi\rangle = [P_j, \boldsymbol{P}^2/2m + V(r)]|\Psi\rangle$$

$$= (P_j V(r) - V(r) P_j)|\Psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial V(r)}{\partial r} |\Psi\rangle$$

所以

$$[P_j, H_a] = -i\hbar \frac{\partial V(r)}{\partial r} \tag{2.6.28}$$

同样可以证明

$$\sum_j [P_j, [P_j, H_a]] = -\hbar^2 \nabla^2 V = \hbar^2 \frac{e^2}{\varepsilon_0} \delta(r) \tag{2.6.29}$$

这里利用了关系式

$$\delta(r) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}$$

又因为

$$-\frac{1}{2} \sum_j \langle k | [P_j, [P_j, H_a]] | k \rangle = -E_k \langle k | \boldsymbol{P}^2 | k \rangle$$

$$+ \sum_j \langle k | P_j H_a P_j | k \rangle = -E_k \sum_i \langle k | P | i \rangle \langle i | P | k \rangle$$

$$+ \sum_i \langle k | \boldsymbol{P} H_a | i \rangle \langle i | \boldsymbol{P} | k \rangle = \sum_i E_{ki} |\boldsymbol{P}_{ki}|^2$$

$$\tag{2.6.30}$$

所以

$$\sum_i E_{ki}|P_{ki}|^2 = \frac{1}{2}\hbar^2\frac{e^2}{\varepsilon_0}\langle k|\delta(r)|k\rangle = \frac{\hbar^2 e^2}{2\varepsilon_0}|\Psi_k(0)|^2 \tag{2.6.31}$$

式中 $\Psi_k(r)$ 为坐标表象中氢原子第 k 态的态函数. 将(2.6.31)式代入(2.6.25)式，得到

$$\delta = \frac{\hbar e^4}{3\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\ln(\omega_m/\omega_{0i})|\Psi_{1s}(0)|^2 \tag{2.6.32}$$

对于氢原子的 1s 态，有

$$|\Psi_{1s}(0)|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\right)^3 \tag{2.6.33}$$

这里 a_0 为玻尔半径. 将相应的氢原子的参数 a_0，m，e 以及 $\omega_{01} = (E_{1s}-E_0)/\hbar$ 等值一并代入(2.6.32)式可得

$$\delta \approx 1040\ \mathrm{MHz}$$

我们知道兰姆和 Retherford 在实验中测得的兰姆位移值为 1057 MHz，可见上述理论计算结果与实验测得的值是很相符的. 可见，虚光场效应是氢原子兰姆位移的物理根源.

第二节　虚光场对光场相位涨落的影响

由第一章第三节我们知道，光场的相位是反映光场性质的一个重要的物理量，因此探讨光-原子相互作用系统中虚光子过程对光场相位性质的影响是十分必要的. 这里我们以一个二能级原子与光场相互作用系统为例，来阐明虚光场对光场相位性质的影响.

一、旋波近似下光场的相位随时间的演化

在探讨虚光场对光场相位性质的影响以前，我们先讨论不计及虚光子过程时，光场相位随时间演化的情况. 在旋波近似下，描

述二能级原子与光场发生单光子相互作用的J-C模型的哈密顿量为

$$H=H_0+V=\omega a^+a+\omega_0S_z+g(a^+S_-+aS_+) \quad (2.6.34)$$

这里的 g 表征频率为 ω 的光场与本征频率为 ω_0 的二能级原子的耦合常数. 为简单起见,这里仅考虑光场与原子共振的情况,即原子的本征频率与光场频率满足 $\omega_0=\omega$. 如果令 $t=0$ 时刻,原子处在激发态 $|e\rangle$,辐射场处于一般态 $\sum_n F_n|n\rangle$,那么系统(原子+光场)的初态为

$$|\Psi(0)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}F_n|e,n\rangle \quad (2.6.35)$$

由(2.2.178)式可知,在 t 时刻系统在相互作用绘景中的态矢随时间演化为

$$|\Psi^I(t)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)|e,n\rangle+b_{n+1}(t)|g,n+1\rangle \quad (2.6.36)$$

式中

$$a_n(t)=\frac{F_n}{2}\{\exp[-i\gamma(n)t]+\exp[i\gamma(n)t]\}$$

$$b_{n+1}(t)=\frac{F_n}{2}\{\exp[-i\gamma(n)t]-\exp[i\gamma(n)t]\} \quad (2.6.37)$$

$$\gamma(n)=g\sqrt{n+1}$$

若再把态矢 $|\Psi^I(t)\rangle$ 变换到薛定谔绘景中,则得到

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n(t)|e,n\rangle+b_{n+1}(t)|g,n+1\rangle]\times\exp[-i(n+1/2)\omega t] \quad (2.6.38)$$

为反映光场的相位情况,需要把系统的态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 在光场的相位本征态矢集 $\{|\theta_m\rangle\}$ 中展开,应用第一篇第三章引入的 Pegg-Barnett 相位算符本征态矢(1.3.136)式,我们得到

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}\langle e,\theta_m|\Psi(t)\rangle|e,\theta_m\rangle+\langle g,\theta_m|\Psi(t)\rangle|g,\theta_m\rangle \quad (2.6.39)$$

式中

$$\langle e,\theta_m|\Psi(t)\rangle=(s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}F_n\cos[\gamma(n)t]$$
$$\times\exp[-i(n+1/2)\omega t]\exp(-in\theta_m)\qquad(2.6.40)$$

$$\langle g,\theta_m|\Psi(t)\rangle=-i(s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}F_n\sin[\gamma(n)t]$$
$$\times\exp[-i(n+1/2)\omega t]\exp(-in\theta_m)\qquad(2.6.41)$$

很显然,这里

$$P(\theta_m,t)=|\langle e,\theta_m|\Psi(t)\rangle|^2+|\langle g,\theta_m|\Psi(t)\rangle|^2\qquad(2.6.42)$$

代表光场相位概率分布函数,因此在原子-光场耦合系统中,光场相位算符的期望值为

$$\langle\Phi\rangle=\sum_{m=0}^{s}\theta_m P(\theta_m,t)\qquad(2.6.43)$$

$$\langle\Phi^2\rangle=\sum_{m=0}^{s}\theta_m^2 P(\theta_m,t)\qquad(2.6.44)$$

为给定光场相位概率分布函数(2.6.42)式,我们再假设初始时刻辐射场处于相干态,即令

$$F_n=\exp(-\bar{n}/2)\alpha^n/\sqrt{n!}\qquad(2.6.45)$$

其中

$$\alpha=\bar{n}^{1/2}e^{i\zeta}\qquad(2.6.46)$$

这里 $\bar{n}$ 为平均光子数,ζ 是 α 的相位角.如果选取 $\bar{n}\gg1$,则由(1.3.164)式可知光场的光子数呈高斯分布形式:

$$F_n=(2\pi\bar{n})^{-1/4}\exp[-(n-\bar{n})^2/4\bar{n}]e^{in\zeta}\qquad(2.6.47)$$

现在把(2.6.47)式代入(2.6.40)式,则得到

$$\langle e,\theta_m|\Psi(t)\rangle=\frac{1}{2}(s+1)^{-1/2}(2\pi\bar{n})^{-1/4}\exp(-i\omega t/2)$$
$$\times\int_0^{\infty}\exp[-(n-\bar{n})^2/4\bar{n}]\times[e^{-i\gamma(n)t}+e^{i\gamma(n)t}]$$

$$\times \exp[in(\zeta - \theta_m - \omega t)]dn \tag{2.6.48}$$

利用光场的高斯分布性质，还可将上式中的 $\gamma(n)$ 在 $n=\bar{n}$ 处展开，若精确到 $(n-\bar{n})$ 的一次幂项，则有

$$g\sqrt{n+1} \approx g\left(\sqrt{\bar{n}+1} + \frac{n-\bar{n}}{2\sqrt{\bar{n}+1}}\right) \approx g\sqrt{\bar{n}} + g\frac{n-\bar{n}}{2\sqrt{\bar{n}}} \tag{2.6.49}$$

再注意到积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2)dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

那么(2.6.48)式可化为

$$\begin{aligned}\langle e,\theta_m|\Psi(t)\rangle = &\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp(-i\omega t/2)\exp[i\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t)] \\ &\times\{\exp(ig\sqrt{\bar{n}}\,t)\exp[-\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t+\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}})^2] \\ &+\exp(-ig\sqrt{\bar{n}}\,t)\exp[-\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t-\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}})^2]\}\end{aligned} \tag{2.6.50}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\langle g,\theta_m|\Psi(t)\rangle = &\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp(-i\omega t/2)\exp[i\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t)] \\ &\times\{\exp(-ig\sqrt{\bar{n}}\,t)\exp[-\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t-\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}})^2] \\ &-\exp(ig\sqrt{\bar{n}}\,t)\exp[-\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t+\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}})^2]\}\end{aligned} \tag{2.6.51}$$

可见光场相位概率分布函数为

$$P(\theta_m,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\{\exp[-2\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t+\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}})^2]$$

$$+\exp[-2\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t-\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}})^2]\} \quad (2.6.52)$$

在连续谱极限下，即 $s\to\infty$ 时，θ_m 为连续变量，由上式容易得到

$$\int P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta=1 \quad (2.6.53)$$

这里$\frac{s+1}{2\pi}$为相位态密度. 上式也表明，$P(\theta,t)$ 是归一化的.

如果考虑到 $\bar{n}\gg1$ 时，$\frac{g}{2\sqrt{\bar{n}}}\ll\omega$，即在(2.6.52)式中还忽略掉反映原子与光场的耦合项$\frac{g}{2\sqrt{\bar{n}}}$时. 根据所求的 $P(\theta,t)$，再利用(2.6.43)和(2.6.44)式，可求得光场相位随时间的演化规律：

$$\langle\Phi\rangle=\int\theta P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta=\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\int\theta\exp[-2\bar{n}(\zeta-\theta_m-\omega t)^2]d\theta=\zeta-\omega t \quad (2.6.54)$$

$$\langle\Phi^2\rangle=\int\theta^2P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta=(\zeta-\omega t)^2+1/(4\bar{n}) \quad (2.6.55)$$

从(2.6.54)式看到，光场相位以速率 ω 变化. 光场相位涨落为

$$\langle\Delta\Phi\rangle^2=\langle\Phi^2\rangle-\langle\Phi\rangle^2=\frac{1}{4\bar{n}} \quad (2.6.56)$$

由(2.6.38)和(2.6.45)式可知，t 时刻光场的光子数分布为

$$P_n(t)=|a_n(t)|^2+|b_{n+1}(t)|^2=|F_n|^2=\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n! \quad (2.6.57)$$

可见光场的光子数分布仍然呈泊松分布，从而光子数的涨落为

$$\langle\Delta N\rangle^2\approx\bar{n}$$

那么

$$\langle\Delta\Phi\rangle^2\langle\Delta N\rangle^2=1/4 \quad (2.6.58)$$

这说明，如果忽略掉原子与光场的相互耦合作用对光场相位概率分布的影响，则初始时的相干光场在时间演化过程中满足光子数-相位最小不确定关系，也就是仍然保持为相干光场.

但是，如果在(2.6.52)式中不忽略 $g/2\sqrt{\bar{n}}$，而计及原子-光场的相互耦合对光场相位概率分布函数的影响，那么可以得到

$$\langle\Phi^2\rangle=(\zeta-\omega t)^2+1/(4\bar{n})+g^2t^2/(4\bar{n}) \tag{2.6.59}$$

而$\langle\Phi\rangle$仍然满足(2.6.54)式. 在这种情况下，光场相位涨落为

$$\langle\Delta\Phi\rangle^2=\frac{1}{4\bar{n}}+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}} \tag{2.6.60}$$

光子数-相位不确定关系变成为

$$\langle\Delta\Phi\rangle^2\langle\Delta N\rangle^2=\frac{1}{4}+\frac{g^2t^2}{4} \tag{2.6.61}$$

这说明，随着时间的演化，光场的相位涨落增大，此时光场不再保持为光子数-相位最小不确定态. 此外，由(2.6.56)和(2.6.60)式还可以看到，原子-光场的相互作用导致光场相位涨落的增大.

二、非旋波近似下光场的相位随时间的演化

现在我们来讨论虚光子过程对光场相位涨落的影响. 我们知道，虚光子过程反映在 J-C 模型中的非旋波近似项 $\epsilon(a^+S_++aS_-)$中，为考察虚光子过程在二能级原子与辐射场相互作用系统中对光场相位性质的影响，必须计及非旋波项.

在相互作用绘景中，与单模辐射场相互作用的二能级原子的哈密顿量在非旋波近似下可写为

$$H^{\mathrm{I}}=H_0+V^{\mathrm{I}} \tag{2.6.62}$$

这里

$$H_0=\omega a^+a+\omega S_z \tag{2.6.63}$$

$$V^{\mathrm{I}}=g(a^+S_-+aS_++a^+S_-e^{2i\omega t}+aS_-e^{-2i\omega t}) \tag{2.6.64}$$

为简单起见，这里也只考虑光场与原子本征频率共振的情况，即 $\omega_0=\omega$.

将相互作用绘景中的态矢(2.6.36)式及(2.6.64)式一并代入薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle=V^{\mathrm{I}}(t)|\Psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle$$

得

$$i\dot{a}_n(t)=g[\sqrt{n+1}b_{n+1}(t)+\sqrt{n}\exp(2i\omega t)b_{n-1}(t)] \tag{2.6.65}$$

$$i\dot{b}_{n+1}(t)=g[\sqrt{n+1}a_n(t)+\sqrt{n+2}\exp(-2i\omega t)a_{n+2}(t)] \tag{2.6.66}$$

很明显，上两式中后面一项反映虚光子过程对 $a_n(t)$和 $b_{n+1}(t)$的影响. 利用逐级迭代理论，若把旋波近似的结果(2.6.37)式代入(2.6.65)和(2.6.66)式的右边，然后积分并且只精确到 g/ω 的一次幂项，则得到

$$\begin{aligned}a_n(t)=&\frac{F_n}{2}\{\exp[i\gamma(n)t]+\exp[-i\gamma(n)t]\}\\&+\frac{g\sqrt{n-2}}{2}F_n\{\frac{\exp[i(2\omega+g\sqrt{n-1})t]-1}{2\omega+g\sqrt{n-1}}\\&-\frac{\exp[i(2\omega-g\sqrt{n-1})t]-1}{2\omega-g\sqrt{n-1}}\}\end{aligned} \tag{2.6.67}$$

$$\begin{aligned}b_{n+1}(t)=&\frac{F_n}{2}\{\exp[-i\gamma(n)t]-\exp[i\gamma(n)t]\}\\&+\frac{g\sqrt{n+2}}{2}F_n\{\frac{\exp[-i(2\omega-g\sqrt{n+3})t]-1}{2\omega-g\sqrt{n+3}}\\&-\frac{\exp[-i(2\omega+g\sqrt{n+3})t]-1}{2\omega+g\sqrt{n+3}}\}\end{aligned} \tag{2.6.68}$$

把上面的结果与(2.6.37)式相比较可以看出，(2.6.67)和

(2.6.68)式右边的前两项反映由旋波近似引起的实光子过程对概率幅 $a_n(t)$, $b_{n+1}(t)$的贡献，而后面两项则表征由非旋波项描述的虚光子过程对 $a_n(t)$, $b_{n-1}(t)$的修正. 如果辐射场很强，即光子数很大，那么 $g\sqrt{n}/(2\omega\pm g\sqrt{n-1})$, $g\sqrt{n+2}/(2\omega\pm g\sqrt{n+3})$就不再是一个小量，因而(2.6.67)和(2.6.68)式的后两项不可忽略，可见此时旋波近似不再合理. 因此，只有在光场强度不很强的情况下，才能采用旋波近似. 为给出非旋波近似下的态矢(2.6.36)式，我们在计算 $g\sqrt{n}/(2\omega\pm g\sqrt{n-1})$, $g\sqrt{n+2}/(2\omega\pm g\sqrt{n+3})$时，假定它是一个比较小的量，因此可以采用逐级迭代理论. 将(2.6.67)，(2.6.68)式代入到(2.6.38)式，就可确定薛定谔绘景中的态矢.

求得了态矢[由(2.6.38)，(2.6.67)和(2.6.68)式共同描述]以后，按前面同样的步骤，并忽略$\frac{g}{2\omega}$的二次幂项，在 $\bar{n}\gg 1$ 时，可以得到计及虚光子过程以后、初始为相干态的光场相位概率分布函数为

$$
\begin{aligned}
P(\theta,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)\{&\exp(-2\bar{n}x^2)+\exp(-2\bar{n}y^2)\\
&-\exp[-\bar{n}(x^2+z^2)]\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\cos(2\zeta+g\sqrt{\bar{n}}t)\\
&+\exp[-\bar{n}(y^2+z^2)]\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\cos(2\zeta-g\sqrt{\bar{n}}t)\\
&-2\exp[-\bar{n}(x^2+y^2)]\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\sin 2(\omega t-\zeta)\sin(2g\sqrt{\bar{n}}t)\}
\end{aligned}
\tag{2.6.69}
$$

式中

$$x=\zeta-\theta-\omega t+\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}} \tag{2.6.70}$$

$$y=\zeta-\theta-\omega t-gt/2\sqrt{\bar{n}} \tag{2.6.71}$$

$$z=\zeta-\theta-\omega t \tag{2.6.72}$$

注意到由(2.6.67)和(2.6.68)式描述的系统的态矢是没有归一化的,因此这里我们须对相位概率分布函数进行归一化.利用

$$A\int P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta=1 \tag{2.6.73}$$

可得在精确到$\frac{g}{2\omega}$的一次幂项的归一化的 $P(\theta,t)$为

$$\begin{aligned}P(\theta,t)=&A\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\{\exp(-2\bar{n}x^2)+\exp(-2\bar{n}y^2)\\&-\exp[-\bar{n}(x^2+z^2)]\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\cos(2\zeta+g\sqrt{\bar{n}}\,t)\\&+\exp[-\bar{n}(y^2+z^2)]\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\cos(2\zeta-g\sqrt{\bar{n}}\,t)\\&-2\exp[-\bar{n}(x^2+y^2)]\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\sin2(\omega t-\zeta)\sin(2g\sqrt{\bar{n}}\,t)\}\end{aligned} \tag{2.6.74}$$

其中

$$\begin{aligned}A=&1-\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\exp(-g^2t^2/8)\sin2\zeta\sin(g\sqrt{\bar{n}}\,t)\\&+\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\exp(-g^2t^2/2)\sin2(\omega t-\zeta)\sin(2g\sqrt{\bar{n}}\,t)\end{aligned} \tag{2.6.75}$$

为概率归一化因子.

利用(2.6.43),(2.6.44)及(2.6.74)式,并且只精确到 g/ω 的一次幂项,可以求得光场相位函数随时间的演化:

$$\langle\Phi\rangle=\zeta-\omega t+\frac{g^2t}{4\omega}\exp(-g^2t^2/8)\cos2\zeta\cos(g\sqrt{\bar{n}}\,t) \tag{2.6.76}$$

$$\begin{aligned}\langle\Phi^2\rangle=&(\zeta-\omega t)^2+\frac{1}{4\bar{n}}+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}+\frac{g^2t}{2\omega}(\zeta-\omega t)\\&\times\exp(-g^2t^2/8)\cos2\zeta\cos(g\sqrt{\bar{n}}\,t)+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}\frac{3g\sqrt{\bar{n}}}{4\omega}\end{aligned}$$

$$\times[\exp(-g^2t^2/2)]\sin 2(\omega t-\zeta)\sin(2g\sqrt{\bar{n}}\,t)$$
$$-\exp(-g^2t^2/8)\sin 2\zeta\sin(g\sqrt{\bar{n}}\,t)]$$

(2.6.77)

于是光场的相位涨落为

$$\langle\Delta\Phi\rangle^2=\frac{1}{4\bar{n}}+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}\frac{3g\sqrt{\bar{n}}}{4\omega}\{\exp(-g^2t^2/2)\sin 2(\omega t-\zeta)$$
$$\times\sin(2g\sqrt{\bar{n}}\,t)-\exp(-g^2t^2/8)\sin 2\zeta\sin(g\sqrt{\bar{n}}\,t)\}$$

(2.6.78)

把上面的结果与(2.6.54),(2.6.55)以及(2.6.59)式相比较可以看到,在光场相位函数中出现了 g/ω 的一次幂项,显然这些项的出现是由于我们考虑了虚光场效应.虚光场的影响导致相位函数出现了小的起伏,这些起伏反映系统的量子噪声.可见,在旋波近似下不能揭示的系统量子噪声,在非旋波近似下可明显地展现出来.量子噪声的大小与耦合常数 g、平均光子数 $\bar{n}$、共振频率 ω 及相位角 ζ 有关.它也说明,量子噪声由原子和辐射场共同决定.特别是把 (2.6.78)式与(2.6.60)式相比得知,光场相位涨落不仅与原子-光场耦合常数 g、平均光子数 $\bar{n}$ 有关,而且还与光场频率 ω 以及初始相位角 ζ 明显相关.所以不同频率、不同初相位的光场,在与原子相互作用时,即使具有相同的光强和耦合常数,由于虚光场的效应,它们的相位涨落也会明显地不同.而在旋波近似下,光场相位涨落仅与光场-原子耦合常数和光场强度有关.可见,在原子与光场相互作用系统中,考虑虚光场效应后,光场相位涨落不仅与光场的强度有关,而且还与光场的频率和相位性质有关.

最后需要指出的一点是,与在旋波近似情况下的(2.6.54)式的结果不同,由(2.6.76)式知

$$\frac{d}{dt}\langle\Phi\rangle\neq-\omega \tag{2.6.79}$$

这说明非旋波近似情况下,光场频率发生了漂移,频率漂移的数值由原子-光场耦合常数、光场的强度和频率决定,并且与演化时间

有关.光场频率发生漂移的原因是由于虚光场效应导致原子的能级发生漂移(即兰姆位移),所以辐射光场的频率也随之发生漂移.上面的讨论说明,虚光场效应不仅使光场的相位涨落增加,而且也使光场频率发生漂移.

第三节　虚光子过程对光场压缩效应的影响

第二章第二节中,我们在讨论 J-C 模型中光场的压缩效应时,没有考虑虚光场效应.为精确考察光与原子相互作用系统中光场的压缩情况,必须进一步考虑虚光子过程的影响,下面我们来研究这一问题.

这里讨论一个具有相同字称的二能级原子通过双光子跃迁与一单模辐射场相互耦合的系统(称之为双光子 J-C 模型)中,虚光子过程对光场压缩的影响.描述这一系统的哈密顿算符可表示为

$$H=H_0+V \tag{2.6.80}$$

其中

$$H_0=\omega a^+a+\omega_0 S_z \qquad (\hbar=1) \tag{2.6.81}$$

$$V=\varepsilon(a^{+2}+a^2)(S_++S_-)=\varepsilon(a^{+2}S_-+a^2S_++a^{+2}S_++a^2S_-) \tag{2.6.82}$$

式中的 $a^{+2}S_-$ 表示原子从激发态 $|e\rangle$ 跃迁到基态 $|g\rangle$ 并同时发射两个频率为 ω 的光子的过程,a^2S_+ 描述的是原子从光场中吸收两个光子并从基态跃迁到激发态的过程,很显然这两种跃迁过程是能量守恒过程,即为实光子过程,$a^{+2}S_-$ 和 a^2S_+ 通常也称为旋波项.(2.6.82)式中的 $a^{+2}S_+$ 表征原子从基态跃迁到激发态并发射两个光子的过程.a^2S_- 对应的是原子吸收两个光子并从激发态跃迁到基态的过程,在这两种跃迁过程中系统能量是瞬时不守恒的,也就是说,$a^{+2}S_+$,a^2S_- 描述的是虚光子过程,它们就是通常所称的非旋波项.为考虑虚光子过程对光场压缩效应的影响,我们先讨论在

旋波近似下(忽略虚光子过程的影响),双光子 J-C 模型中光场压缩随时间变化的规律.

一、旋波近似下光场的压缩效应

在旋波近似下,原子-光场耦合系统的相互作用哈密顿量(2.6.82)式简化为

$$V=\varepsilon(a^{+2}S_{-}+a^{2}S_{+}) \tag{2.6.83}$$

为计算简单起见,这里我们仅考虑共振情况,即原子的本征跃迁频率 ω_0 和光场频率 ω 满足:$\omega_0=2\omega$. 在相互作用绘景中,(2.6.83)式为

$$V^{1}(t)=\varepsilon(a^{+2}S_{-}+a^{2}S_{+}) \tag{2.6.84}$$

并且光场湮没算符满足

$$a^{1}(t)=a^{1}e^{-i\omega t} \tag{2.6.85}$$

如果假定 $t=0$ 时刻,原子处在基态 $|g\rangle$,而辐射场处在态 $\sum_n F_n|n\rangle$,这样初始时刻原子-光场耦合系统处于态

$$|\Psi(0)\rangle=\sum_n F_n|g,n\rangle \tag{2.6.86}$$

随着时间的演化,系统的态矢演化为一般态:

$$|\Psi^{1}(t)\rangle=\sum_n a_n(t)|e,n\rangle+b_{n+2}(t)|g,n+2\rangle \tag{2.6.87}$$

利用相互作用绘景中的薛定谔方程,得

$$i\dot{a}_n=\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}\,b_{n+2} \tag{2.6.88}$$

$$i\dot{b}_{n+2}=\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}\,a_n \tag{2.6.89}$$

考虑到初始条件(2.6.86)式,求解方程组(2.6.88)和(2.6.89)式,可得

$$a_n(t) = -iF_{n+2}\sin[\gamma(n)t] \tag{2.6.90}$$

$$b_{n+2}(t) = F_{n+2}\cos[\gamma(n)t] \tag{2.6.91}$$

$$\gamma(n) = \varepsilon\sqrt{(n+2)(n+1)} \tag{2.6.92}$$

将(2.6.90)—(2.6.92)式代入(2.6.87)式，即得相互作用绘景中系统在 t 时刻的密度矩阵 $\rho^{I}(t)$：

$$\rho^{I}(t) = |\Psi^{I}(t)\rangle\langle\Psi^{I}(t)|$$

$$= \sum_{n,k}\begin{bmatrix} a_k^* a_n|n\rangle\langle k| & a_n^* b_{k+2}|n\rangle\langle k+2| \\ a_k^* b_{n+2}|n+2\rangle\langle k| & b_{k+2}^* b_{n+2}|n+2\rangle\langle k+2| \end{bmatrix} \tag{2.6.93}$$

为讨论光场的压缩效应，定义光场的两个缓变的正交复振幅算符 d_1 和 d_2 如下：

$$d_1 = \frac{1}{2}(ae^{i\omega t} - a^+ e^{-i\omega t}) \tag{2.6.94a}$$

$$d_2 = \frac{1}{2i}(ae^{i\omega t} - a^+ e^{-i\omega t}) \tag{2.6.94b}$$

它们的均方涨落为

$$(\Delta d_1)^2 = \frac{1}{4}[2\langle a^+ a\rangle + 1 + \langle a^2 e^{2i\omega t}\rangle + \langle a^{+2} e^{-2i\omega t}\rangle - \langle ae^{i\omega t} + a^+ e^{-i\omega t}\rangle^2] \tag{2.6.95a}$$

$$(\Delta d_2)^2 = \frac{1}{4}[2\langle a^+ a\rangle + 1 - \langle a^2 e^{2i\omega t}\rangle - \langle a^{+2} e^{-2i\omega t}\rangle + \langle ae^{i\omega t} - a^+ e^{-i\omega t}\rangle^2] \tag{2.6.95b}$$

显然，若存在

$$Q_i = (\Delta d_i)^2 - 1/4 < 0 \qquad (i=1 \text{ 或 } 2) \tag{2.6.96}$$

我们就说光场的 $d_i(i=1,2)$ 分量被压缩.

如果初始时光场处在相干态，那么初态(2.6.86)式中

$$F_n=\exp(-\bar{n}/2)\bar{n}^{n/2}e^{in\Psi}/\sqrt{n!} \tag{2.6.97}$$

此时可确知系统的密度矩阵 $\rho^I(t)$[(2.6.93)式],进而不难得知

$$\langle ae^{i\omega t}\rangle = \exp(-\bar{n})\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{\bar{n}^{\frac{2n+5}{2}}e^{i\Psi}}{(n+2)!}\{\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}\sin C_1t\sin C_2t + \cos C_1t\cos C_2t\} \tag{2.6.98}$$

$$\langle a^2e^{i2\omega t}\rangle = \exp(-\bar{n})\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+3}e^{i2\Psi}}{(n+2)!}\{\sqrt{\frac{(n+2)(n+1)}{(n+4)(n+3)}} \times \sin C_1t\sin C_3t + \cos C_1t\cos C_3t\} \tag{2.6.99}$$

$$\langle a^+a\rangle = \bar{n} - 1 + \exp(-\bar{n})\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+2}}{(n+2)!}\cos 2C_1t \tag{2.6.100}$$

式中

$$C_1=\varepsilon\sqrt{(n+2)(n+1)},$$
$$C_2=\varepsilon\sqrt{(n+2)(n+3)}, C_3=\varepsilon\sqrt{(n+3)(n+4)}$$

将(2.6.98)—(2.6.100)式代入(2.6.96)式,就可以讨论双光子 J-C 模型中光场的压缩情况了.

下面我们选取参量 Ψ,$\bar{n}$ 和 ε 的不同值,通过数值解法,来得知 Q_1 随时间的演化,从而得知光场的压缩情况. 图 2.6.2 是在 $\Psi=0$ 的情况下,分别取 $\bar{n}=1,4,6$ 以及 $\varepsilon=0.1,0.05$ 时,得到的 Q_1 随 εt 的变化. 显然,图 2.6.2(a)—(d)中均出现了 $Q_1<0$ 的现象,这就是说,在相应的时间区域光场被压缩. 随着 $\bar{n}$ 的增大,光场第一次被压缩的压缩程度减小. 压缩出现的次数逐渐呈现出与耦合常数 ε 有关的周期性. 另外需指出的一点是,从(2.6.98)—(2.6.100)式可以看到,光场的压缩程度只与平均光子数 $\bar{n}$、初相位角 Ψ 有关,而与光场频率 ω 和原子-光场耦合常数 ε 无关[如图

2.6.2(c)－(d)所示].

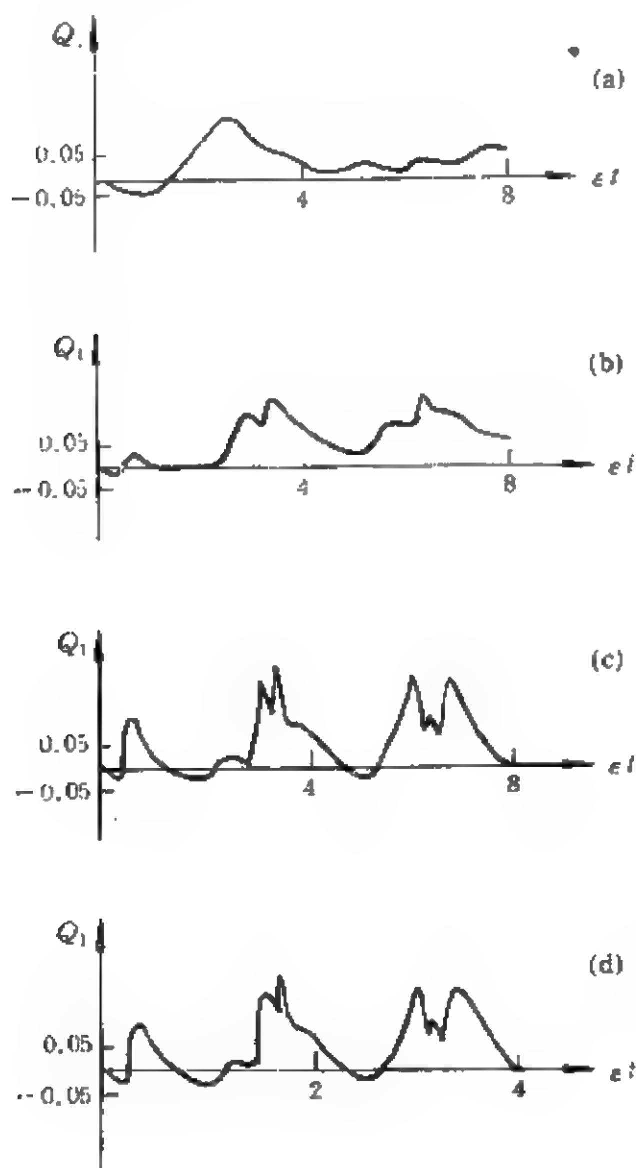


图 2.6.2　旋波近似下，Q_1 随时间的演化

(a) $n=1, \varepsilon=0.1$；(b) $n=4, \varepsilon=0.1$；

(c) $n=6, \varepsilon=0.1$；(d) $n=6, \varepsilon=0.05$

二、虚光子过程对光场压缩效应的影响

下面我们来讨论虚光子过程对光场压缩效应的影响，为此我们应从相互作用哈密顿量(2.6.82)式出发讨论. 在相互作用绘景

中，系统的相互作用哈密顿量在共振情况下变为

$$V^1(t)=\varepsilon(a^2S_+ + a^{+2}S_- + a^2S_-e^{-4i\omega t} + a^{+2}e^{4i\omega t}) \tag{2.6.101}$$

同样地，将 t 时刻相互作用绘景中的态矢 $|\Psi^1(t)\rangle$(2.6.87)式和(2.6.101)式一并代入相互作用绘景中的薛定谔方程，得到

$$i\dot{a}_n=\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}\,b_{n+2}+\varepsilon b_{n-2}e^{i4\omega t}\sqrt{n(n-1)} \tag{2.6.102}$$

$$i\dot{b}_{n+2}=\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}\,a_n+\varepsilon a_{n+4}e^{-i4\omega t}\sqrt{(n+4)(n+3)} \tag{2.6.103}$$

很容易看到，(2.6.102)，(2.6.103)两式中，等号右边的第一项反映了实光子过程对 $a_n(t)$，$b_{n+2}(t)$的贡献，而右边第二项则代表虚光子过程对 $a_n(t)$，$b_{n+2}(t)$的影响. 为求解 $a_n(t)$，$b_{n+2}(t)$，须注意到在光场不太强时，虚光子过程对 $a_n(t)$和 $b_{n+2}(t)$的影响相对于实光子过程为一小量. 所以可以把在旋波近似下求得的 $a_n(t)$，$b_{n+2}(t)$[(2.6.90)—(2.6.91)式]作为零级近似，利用逐级迭代理论，将(2.6.90)，(2.6.91)式代入(2.6.102)，(2.6.103)式，且精确到ε/ω的一次幂项，得

$$\begin{aligned}a_n(t)=A\Big\{&-iF_{n+2}\sin C_1t-\frac{n(n-1)}{2\bar{n}^2}C_1F_{n+2}\\&\times\Big[\frac{\exp[i(B_1t-4\Psi)]-\exp(-i4\Psi)}{B_1}\\&+\frac{\exp[i(B_2t-4\Psi)]-\exp(-i4\Psi)}{B_2}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{2.6.104}$$

$$\begin{aligned}b_{n+2}(t)=A\Big\{&F_{n+2}\cos C_1t-\frac{\varepsilon\bar{n}^2}{2\sqrt{(n+5)(n+6)}}F_{n+2}\\&\times\Big[\frac{\exp[-i(A_1t-4\Psi)]-\exp(i4\Psi)}{A_1}\\&-\frac{\exp[-i(A_2t-4\Psi)]-\exp(i4\Psi)}{A_2}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{2.6.105}$$

其中

$$A=1+\frac{\varepsilon\bar{n}^2}{2\sqrt{(n-5)(n+6)}}\left[\frac{\cos(A_1t-4\Psi)-\cos4\Psi}{A_1}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(A_2t-4\Psi)-\cos4\Psi}{A_2}\right]\cos C_1t-\frac{n(n-1)C_1}{2\bar{n}^2}$$

$$\times\left[\frac{\sin(B_1t-4\Psi)+\sin4\Psi}{B_1}-\frac{\sin(B_2t-4\Psi)+\sin4\Psi}{B_2}\right]\sin C_1t$$

$$A_1=4\omega-\varepsilon\sqrt{(n+5)(n+6)},A_2=4\omega+\varepsilon\sqrt{(n+5)(n+6)}$$

$$B_1=4\omega-\varepsilon\sqrt{(n-2)(n-3)},B_2=4\omega+\varepsilon\sqrt{(n-2)(n-3)}$$

这里已利用

$$|a_n(t)|^2-|b_{n+2}(t)|^2=|F_{n+2}|^2 \qquad (2.6.106)$$

并对$|\Psi^1(t)\rangle$进行了归一化，(2.6.104)，(2.6.105)式中的 A 即为归一化因子.

从(2.6.104)，(2.6.105)式可明显看到，如果辐射场很强，即光子数n很大，那么$\varepsilon\sqrt{n(n-1)}/B_1$，$\varepsilon\sqrt{n(n-1)}/B_2$，$\varepsilon\bar{n}/A_1$，$\varepsilon\bar{n}/A_2$就不再是一个小量，这种情况下采用旋波近似已不再合理. 为处理问题方便，在推导(2.6.104)，(2.6.105)式时，我们已假设光场不是太强，以便使得 $\varepsilon\sqrt{n(n-1)}/B_1$，$\varepsilon\sqrt{n(n-1)}/B_2$，$\varepsilon\bar{n}/A_1$，$\varepsilon\bar{n}/A_2$不是一个很大的量，于是可以采用逐级迭代方法. 将 $a_n(t)$[(2.6.104)式]，$b_{n+2}(t)$[(2.6.105)式]代入(2.6.93)式，从而可确定非旋波近似下系统的密度矩阵 $\rho^I(t)$. 利用 $\rho^I(t)$，不难得知

$$\langle ae^{i\omega t}\rangle=\langle ae^{i\omega t}\rangle_{\mathrm{RWA}}+\exp(-\bar{n})\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{\bar{n}^{\frac{2n+5}{2}}}{(n+2)!}$$

$$\times\left\{\left(\frac{\cos A_1t-1}{A_1}-\frac{\cos A_2t-1}{A_2}\right)\frac{\varepsilon\bar{n}^2}{4\sqrt{(n+5)(n+6)}}\left[\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}\right.\right.$$

$$\left.\times\sin2C_1t\sin C_2t-2\sin^2C_1t\cos C_2t\right]+\left(\frac{\sin B_1t}{B_1}+\frac{\sin B_2t}{B_2}\right)\frac{n(n-1)C_1}{4n^2}$$

$$\times\left[\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}\cos^2 C_1 t\sin C_2 t-\sin 2C_1 t\cos C_2 t\right]\Bigg\}$$

(2.6.107)

$$\langle a^2 e^{i2\omega t}\rangle=\langle a^2 e^{i2\omega t}\rangle_{\mathrm{RWA}}+\exp(-\bar{n})\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+3}}{(n+2)!}$$

$$\times\left\{\frac{n(n-1)}{4\bar{n}^2}C_1\left(\frac{\sin B_1 t}{B_1}+\frac{\sin B_2 t}{B_2}\right)\left[\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}}2\cos^2 C_1 t\sin C_3 t\right.\right.$$

$$\left.-\sin 2C_1 t\cos C_3 t\right]+\frac{\varepsilon\bar{n}^2}{4\sqrt{(n+5)(n+6)}}\left(\frac{\cos A_1 t-1}{A_1}-\frac{\cos A_2 t-1}{A_2}\right)$$

$$\left.\times\left[\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}}\sin 2C_1 t\sin C_3 t-2\sin^2 C_1 t\cos C_3 t\right]\right\}$$

(2.6.108)

$$\langle a^+ a\rangle=\langle a^+ a\rangle_{\mathrm{RWA}}+\exp(-\bar{n})\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+2}}{(n-2)!}$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon\bar{n}^2}{\sqrt{(n+5)(n-6)}}\left(\frac{\cos A_1 t-1}{A_1}-\frac{\cos A_2 t-1}{A_2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon n(n-1)}{\bar{n}^2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\sin B_1 t}{B_1}+\frac{\sin B_2 t}{B_2}\right)\right\}$$

(2.6.109)

其中

$$C_1=\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)},$$

$$C_2=\varepsilon\sqrt{(n+2)(n+3)},\quad C_3=\varepsilon\sqrt{(n+3)(n+4)}$$

这里我们只精确到 ε/ω 的一次幂项.(2.6.107)—(2.6.109)式右边的 $\langle ae^{i\omega t}\rangle_{\mathrm{RWA}}$、$\langle a^2e^{i2\omega t}\rangle_{\mathrm{RWA}}$ 以及 $\langle a^+a\rangle_{\mathrm{RWA}}$ 是旋波近似下 $ae^{i\omega t}$、$a^2e^{i2\omega t}$ 和 a^+a 的期望值[(2.6.98)—(2.6.100)式],它们反映实光子过程的贡献.(2.6.107)—(2.6.109)式右边余下的项则代表虚光场效应对 $\langle ae^{i\omega t}\rangle$、$\langle a^2e^{i2\omega t}\rangle$ 以及 $\langle a^+a\rangle$ 的修正.将(2.6.107)—(2.6.109)式代入(2.6.96)式,把所得结果 Q_1 的数值解展示出来,就可以分析虚光子过程对光场压缩性质的影响.

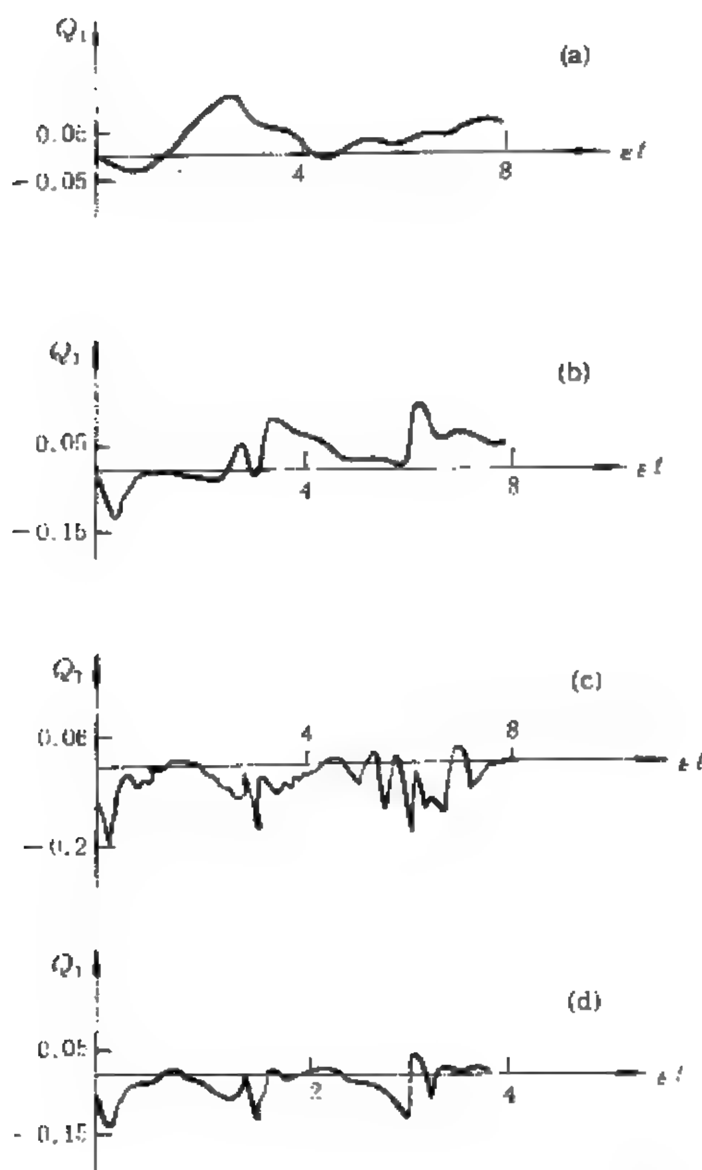


图 2.6.3　非旋波近似下，Q_1 随时间的演化

(a) $\bar{n}=1, \varepsilon=0.1$；(b) $\bar{n}=4, \varepsilon=0.1$；

(c) $\bar{n}=6, \varepsilon=0.1$；(d) $\bar{n}=6, \varepsilon=0.05$

图 2.6.3 给出了非旋波近似下 Q_1 随 εt 的演化情况，图中参数的取值与旋波近似时的图 2.6.2 相同. 这里平均光子数 $\bar{n}$ 和耦合常量 ε 的取值保证了 $\varepsilon\bar{n}/A_1$，$\varepsilon\bar{n}/A_2$，$\varepsilon\sqrt{n(n-1)}/B_1$ 和 $\varepsilon\sqrt{n(n-1)}/B_2$ 均不是很大的量. 从图 2.6.3 可以看到，在不同的光强 $\bar{n}$ 和耦合常量 ε 下，均有 $Q_1<0$ 的情况发生，也就是说光场确

实可以被压缩.

比较图 2.6.3 和 2.6.2 可以看到，非旋波近似下光场 d_1 分量压缩程度变深，压缩光脉冲持续时间增长，光场在不考虑虚光场效应时不出现压缩的时间区域内呈现新的压缩. 这说明，虚光子过程的影响使得光场的压缩程度变深、压缩持续的时间变长.

从图 2.6.2 和图 2.6.3 可以看到，当平均光子数 $\bar{n}$ 小时($\bar{n}=1$)，光场 d_1 分量的压缩受虚光子过程的影响不太明显. 但当 $\bar{n}$ 增大时($\bar{n}=4,6$)，光场 d_1 分量的压缩程度和压缩持续时间发生了明显的变化，这再次说明旋波近似只是在弱场情况下，光场与原子耦合不强时才适用. 同时从图 2.6.3(c)—(d)可见，光场压缩周期性地出现. 这种周期性与图 2.6.2(c)—(d)相同，这是由于我们的讨论仅限制在光场不太强的情况，此时虚光子过程对这种振荡周期的影响很小，因而可以忽略. 如果光场特别强，这种振荡周期性就会发生明显变化.

另外，从图 2.6.3(c)—(d)还可看出，当取不同的 ε/ω 时，不仅 $(\Delta d_1)^2$ 的振荡频率发生了变化，而且 $(\Delta d_1)^2$ 的幅度也发生了变化. 但我们知道，在旋波近似下，光场的压缩程度与光场的频率 ω 和原子-光场耦合常数 ε 均无关. 可见，这里的结果表明，虚光子过程对光场压缩程度的影响不仅与光场强度有关，而且还与光场频率 ω 及原子-光场耦合常数 ε 有关. 因此在考虑虚光子过程的影响时，具有不同频率的光场以及不同的原子-光场耦合常数 ε 的系统，即使在相同的光强下，光场压缩程度也不相同，光场的压缩程度由光场-原子耦合系统的性质确定.

参 考 文 献

[1] D. P. Craig, Molecular Quantum Electrodynamics — An Introduction to Radiation-Molecular Interaction, Academic, 1984.
[2] H. Haken, Light, **Vol. 1**, North-Holland, 1985.
[3] G. Compagno, R. Passante and F. Persico, *Phys. Lett.*, **A93**, 256 (1985).
[4] R. Passnate, G. Compagno and F. Persico, *Phys. Rev.*, **A31**, 2827 (1985).
[5] F. Persico and E. A. Power, *Phys. Rev.*, **A36**, 475 (1987).
[6] G. Compagno, R. Passnate and F. Persico, *Phys. Scr.*, **T21**, 33 (1988).

[7] G. Compagno and, G. M. Palma, *Phys. Rev.*, **A37**, 2979 (1988).
[8] G. Compagno, G. M. Palma, R. Passnte and F. Persico, *Europhys. Lett.*, **9**, 215 (1989).
[9] A. K. Biswas, G. Compagno, G. M. Palma, R. Passante and F. Persico, *Phys, Rev.*, **A42**, 4291 (1990).
[10] G. Compagno, S. Vivirtio and F. Persico, *Phys. Rev.*, **A46**, 7303 (1992).
[11] X. Y. Huang, 彭金生, *Phys. Scr.*, **T21**, 100 (1988).
[12] 李高翔、彭金生, 量子电子学, **7**, 175 (1990).
[13] 彭金生、李高翔、周鹏, 物理学报, **41**, 1042 (1991).
[14] 彭金生、李高翔, *Phys, Rev.*, **A45**, 3289 (1992).
[15] 李高翔、彭金生, 物理学报, **41**, 766 (1992).
[16] 李高翔、彭金生, *Phys, Rev.*, **A47**, 3167 (1993).
[17] 彭金生、李高翔, 物理学报, **42**, 568 (1993).

第三篇
与光场作用的原子行为的量子特性

引　言

上一篇集中论述了光与原子相互作用系统中光场的量子特性，本篇将讨论原子系统所呈现的量子特性. 由于激光场的驱动，原子系统的演化将呈现许多新的量子特性，而这些在没有激光场作用时是未呈现出来的. 原子系统的这些量子特性是当代量子光学研究的重要内容，它的发展将进一步拓展和充实量子光学的领域.

在激光场作用下，原子行为呈现出非经典效应，其最明显的一种表现就是原子粒子布居演化显示出周期崩塌与回复效应，第一章将专门论述这一问题. 在讨论了原子算符的时间演化特征以后，我们将着重论述产生崩塌与回复效应的条件及其特征，并专门考察双光子 J-C 模型中原子布居的崩塌与回复效应. 第二章用于介绍原子算符的压缩效应，在这里不仅对导致原子偶极压缩的条件进行了充分的论述，而且讨论了单原子共振荧光系统中原子算符的压缩效应. 第三章讨论原子的相干捕获，着重论述产生原子相干捕获的条件，分析原子的初始状态对导致原子相干捕获效应的影响. 对于激光场作用下双原子系统的量子特性这一问题，我们在第四章进行了专门的论述，在这里，原子间的偶极-偶极相互作用效应得到了深入的探讨. 对于双原子系统可能展现的崩塌-回复效应以及产生双原子相干捕获的条件等都作了深入的分析. 第五章用于研究激光场作用下原子的自电离问题，着重论述了弱、强激光场作用下原子自电离的基本理论. 对于激光场作用下原子的运动这一课题，我们在第六章中进行了专门的论述，着重介绍了驻波场中原子的衍射和偏离理论以及辐射场对原子的作用力. 本篇的最后一章论述激光致冷问题，除介绍了激光致冷的一般原理外，着重论述了激光冷却原子的量子理论.

第一章　原子布居的周期崩塌与回复效应

光场作用下原子行为的量子特性的一个典型表现是原子算符的时间演化呈现周期崩塌与回复效应，这一章中我们集中讨论这一问题．下面首先讨论与经典电磁场作用的二能级原子算符的时间演化．

第一节　与经典电磁场作用的二能级原子算符的时间演化

在第一篇第二章我们知道，与经典电磁场 $\boldsymbol{E}(t)$ 相互作用的二能级原子在偶极近似下的哈密顿量由(1.2.34)式来描述：

$$H=\frac{\omega_0}{2}\sigma_3-(\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}(t))\sigma_1=\omega_0S_3+2\lambda E(t)(S_++S_-)\quad(\hbar=1)\tag{3.1.1}$$

这里为书写简单起见，已令

$$\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{E}(t)=-2\lambda E(t)\tag{3.1.2}$$

并且将描述二能级原子的泡利算符 σ_1，σ_2，σ_3 用赝自旋算符 $S_\pm$，S_3 来代替．显然，(3.1.1) 式中的 $\omega_0 S_3$ 是二能级原子的能量算符，$2\lambda E(t)(S_-+S_-)$表征原子与经典电磁场的相互作用能．如果所讨论的电磁场是强度为 E_0 并以频率为 ω 谐振的场量，即

$$E(t)=E_0\cos\omega t=\frac{E_0}{2}(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t})\tag{3.1.3}$$

那么二能级原子与经典电磁场相互作用系统的哈密顿量变为

$$H=\omega_0S_3+\lambda E_0(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t})S_++\lambda E_0(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t})S_-\tag{3.1.4}$$

在相互作用绘景中，原子与电磁场的相互作用哈密顿量为

$$V^{I}(t)=\lambda E_0\{\exp[i(\omega-\omega_0)t]+\exp[-i(\omega+\omega_0)t]\}S_+ + \lambda E_0\{\exp[i(\omega+\omega_0)t]-\exp[-i(\omega-\omega_0)t]\}S_- \quad (3.1.5)$$

显然，上式中含因子 $\exp[\pm i(\omega+\omega_0)t]$的快速振荡项是非旋波项，它们描述的是原子与电磁场相互作用过程的能量不守恒过程，分别与 J-C 模型中的虚光子过程项 aS_-，a^+S_+相对应. 因此采用旋波近似时，可以在(3.1.5)式中略去含有 $\exp[\pm i(\omega+\omega_0)t]$因子的项. 这样，(3.1.5)式简化为

$$V^{I}(t)=\lambda E_0\exp[-i(\omega-\omega_0)t]S_- +\lambda E_0\exp[i(\omega-\omega_0)t]S_+ \quad (3.1.6)$$

上式与 J-C 模型中的 $\lambda\{aS_+\exp[i(\omega-\omega_0)t]+\lambda a^+S_-\exp[-i(\omega-\omega_0)t]\}$相对应，其差别仅在于 J-C 模型中辐射场是用算符 a，a^+描述，而这里则采用 C 数 E_0 来表示.

假设二能级原子初始时处在其基态$|1\rangle$ 和激发态$|2\rangle$的叠加态：

$$\Psi_A(0)\rangle=\gamma_1|1\rangle+\gamma_2|2\rangle \quad (3.1.7)$$

这里$|\gamma_1|^2+|\gamma_2|^2=1$. 那么在相互作用绘景中，可将 t 时刻系统的态函数按其本征态矢展开为

$$|\Psi^{I}(t)\rangle=C_2(t)|2\rangle+C_1(t)|1\rangle \quad (3.1.8)$$

将(3.1.6)和(3.1.8)式代入相互作用绘景中的薛定谔方程，得到

$$i\dot{C}_2(t)=\lambda E_0\exp[i(\omega-\omega_0)t]C_1(t)$$

$$(3.1.9)$$

$$i\dot{C}_1(t)=\lambda E_0\exp[-i(\omega-\omega_0)t]C_2(t)$$

在共振情况下，即 $\omega=\omega_0$ 时，考虑到(3.1.7)式，容易得到上式的解

$$C_1(t)=\gamma_1\cos(\lambda E_0t)-i\gamma_2\sin(\lambda E_0t) \quad (3.1.10)$$

$$C_2(t)=\gamma_2\cos(\lambda E_0 t)-i\gamma_1\sin(\lambda E_0 t) \tag{3.1.11}$$

我们知道，$\langle S_3\rangle$对应着原子能量算符的期望值，它反映的是原子在激发态和基态间的粒子布居差，因而讨论算符S_3的期望值的时间演化可得知原子系统能量的时间行为. 利用(3.1.8)和(3.1.10)，(3.1.11)式可得

$$\begin{aligned}\langle S_3(t)\rangle&=\langle\Psi^{\rm I}(t)|S_3^{\rm I}|\Psi^{\rm I}(t)\rangle=\frac{1}{2}(|C_2(t)|^2-|C_1(t)|^2)\\&=\frac{1}{2}(|\gamma_2|^2-|\gamma_1|^2)\cos(2\lambda E_0 t)\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

可见，$\langle S_3\rangle$随时间以频率$2\lambda E_0$作余弦振荡，通常我们称这种余弦振荡为原子的拉比振荡，并把振荡频率

$$\Omega_{\rm R}=2\lambda E_0 \tag{3.1.13}$$

称为拉比振荡频率. 显然$\Omega_{\rm R}$的大小与电磁场的强度E_0成正比. (3.1.12)式表明，在经典电磁场作用下，二能级原子将在其激发态和基态之间以频率$\Omega_{\rm R}$作拉比振荡，其振荡幅度$(|\gamma_2|^2-|\gamma_1|^2)/2$明显地依赖于原子的初始状态. 当$\gamma_2=0$，即原子初始时处在基态，这时原子的粒子布居差的演化规律为

$$\langle S_3(t)\rangle=-\frac{1}{2}\cos(2\lambda E_0 t) \tag{3.1.14}$$

如果电磁场的强度E_0为零，即电磁场为真空辐射场，那么，$\langle S_3(t)\rangle=-1/2$，这说明处于基态的原子在真空场作用下将稳定地停留在基态. 假设初始时原子处在激发态，即$\gamma_1=0,\gamma_2=1$，这时

$$\langle S_3(t)\rangle=\frac{1}{2}\cos(2\lambda E_0 t) \tag{3.1.15}$$

显然，(3.1.15)与(3.1.14)式只相差一个符号，这表明初始时分别处在激发态和基态的原子，在电磁场的作用下，原子的能量随时间的演化行为只是相差一个相位因子π. 但是如果在(3.1.15)式中令$E_0=0$，也就是电磁场为真空场情况，那么，

$\langle S_3(t)\rangle = 1/2$，这就是说，原子将稳定地处于激发态. 显然，这一结论是不符合实际的. 因为处于激发态的原子，会在真空起伏的影响下自发地衰变到基态. 这说明，准经典理论在揭示原子变量的时间行为时存在着局限性. 对原子变量时间演化的精确揭示需要用到全量子理论. 下面我们就来讨论与量子化的辐射场相互作用的原子动力学变量时间行为的特征.

第二节 原子布居的周期崩塌与回复效应

我们仍讨论一个二能级原子与单模辐射场相互作用系统，但此时电磁场已量子化了，描述此系统的哈密顿量就是熟知的 J-C 模型哈密顿量：

$$H = H_0 + V \qquad (\hbar = 1) \tag{3.1.16}$$

$$H_0 = \omega_0 S_3 + \omega a^+ a \tag{3.1.17}$$

$$V = g(a^+ S_- + a S_+) \tag{3.1.18}$$

为考察原子的动力学变量的时间行为，首先需要求解系统在 t 时刻的态矢.

假设初始时刻原子处在其基态和激发态的叠加态 $|\Psi_A(0)\rangle$ [由(3.1.7)式描述]，光场处在粒子数态矢集 $\{|n\rangle\}$ 的叠加态：

$$|\Psi_F(0)\rangle = \sum_n F_n |n\rangle \tag{3.1.19a}$$

式中 F_n 为光场处在粒子数态 $|n\rangle$ 的概率幅，对于不同的辐射场 F_n 取不同的形式，它满足 $\sum_n |F_n|^2 = 1$. 那么在 $t=0$ 时刻，系统(原子+光场)的态矢为

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n F_n(\gamma_1 |1,n\rangle + \gamma_2 |2,n\rangle) \tag{3.1.19b}$$

随着时间的演化，t 时刻系统的态矢在相互作用绘景中可以表为

$$|\Psi^I(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|2,n\rangle + b_{n+1}(t)|1,n+1\rangle \tag{3.1.20}$$

在共振情况下，利用相互作用绘景中的薛定谔方程，可得此时的概率幅 $a_n(t)$、$b_{n+1}(t)$ 满足的方程：

$$
\begin{aligned}
i\dot{a}_n(t) &= g\sqrt{n+1}\,b_{n+1}(t) \\
i\dot{b}_{n+1}(t) &= g\sqrt{n+1}\,a_n(t)
\end{aligned}
\tag{3.1.21}
$$

考虑到初始条件(3.1.19)式，则上述方程组的解为

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= \gamma_2 F_n\cos(g\sqrt{n+1}t) - i\gamma_1 F_{n+1}\sin(g\sqrt{n+1}t) \\
b_{n+1}(t) &= \gamma_1 F_{n+1}\cos(g\sqrt{n+1}t) - i\gamma_2 F_n\sin(g\sqrt{n+1}t)
\end{aligned}
\tag{3.1.22}
$$

将(3.1.22)式代入(3.1.20)式，就得到系统任意时刻的态矢 $|\Psi^I(t)\rangle$. 依据所求的态矢 $|\Psi^I(t)\rangle$，就可进一步讨论原子算符的演化.

一、在粒子数态光场作用下原子算符的时间演化

假设初始时光场处在粒子数态 $|m\rangle$，也就是令(3.1.19)式中的 $F_n=\delta_{n,m}$，而原子处于基态，即令 $\gamma_1=1$，$\gamma_2=0$，那么由(3.1.20)—(3.1.22)式得知系统在 t 时刻的态矢为

$$
|\Psi^I(t)\rangle = -i\sin(g\sqrt{m}t)|2,m-1\rangle + \cos(g\sqrt{m}t)|1,m\rangle \tag{3.1.23}
$$

由此得算符 S_3 的期望值随时间的演化满足

$$
\langle S_3(t)\rangle = -\frac{1}{2}\cos(2g\sqrt{m}t) \tag{3.1.24}
$$

把上式与准经典理论中的(3.1.14)式相比可以看到，与粒子数态光场作用的原子，也是在其激发态和基态间作余弦振荡，振荡频率为

$$
\Omega = 2g\sqrt{m} \tag{3.1.25}
$$

注意到初始时电场强度算符的期望值

$$\langle E^2\rangle\propto\langle a^+a\rangle=m$$

而经典电场的强度值 $E^2=E_0^2$，因此振荡频率 Ω 与拉比频率 Ω_R 相比，只是把 Ω_R 中的经典量 E_0^2 换成了期望值 $\langle E^2\rangle$. 在这种意义上，通常把 Ω 称为量子拉比频率. 很显然，如果 $m=0$，即初始光场为真空态场，由(3.1.24)式可知与准经典情形相同，初始处于基态的原子将稳定地停留在基态.

但是，如果我们假定原子初始时位于激发态，即令 $\gamma_2=1$，$\gamma_1=0$. 在这种情况下，系统的态函数简化为

$$|\Psi^1(t)\rangle=\cos(g\sqrt{m+1}t)|2,m\rangle-i\sin(g\sqrt{m+1}t)|1,m+1\rangle \tag{3.1.26}$$

此时原子算符 S_3 的期望值为

$$\langle S_3(t)\rangle=\frac{1}{2}\cos(2g\sqrt{m+1}t) \tag{3.1.27}$$

与原子初始时处于基态的结果(3.1.24)式相比，虽然 $\langle S_3\rangle$ 也是作余弦振荡，但振荡频率不同. 可见原子的初态对原子算符的时间演化有明显影响. 而在准经典理论中，由(3.1.14)和(3.1.15)式可知，$\langle S_3\rangle$ 的振荡频率是相同的. 特别值得注意的是，如果初始光场处在真空态，即 $m=0$，在这种情况下，(3.1.27)式给出

$$\langle S_3(t)\rangle=\frac{1}{2}\cos(2gt) \tag{3.1.28}$$

这就是说，初始处在激发态的原子由于真空场的作用而以频率 $2g$ 作拉比振荡，这一结果与准经典情况是明显不同的. 可见采用全量子理论能揭示真空起伏对原子行为的影响.

二、在相干光场作用下，原子布居的周期崩塌与回复效应

上面的结果表明，与粒子数态光场作用的原子，将在基态和激发态间作余弦振荡，那么初始光场如果处在相干态，原子算符的时间演化的特征将怎样呢?

下面我们来讨论初始时原子处于基态($\gamma_2=0,\gamma_1=1$)，光场处

在相干态$|\alpha\rangle$的情形. 对于相干态光场,(3.1.19)式中的F_n应取为

$$F_n=\exp(-|\alpha|^2/2)\alpha^n/\sqrt{n!} \tag{3.1.29}$$

在这种情况下,(3.1.20)式简化为

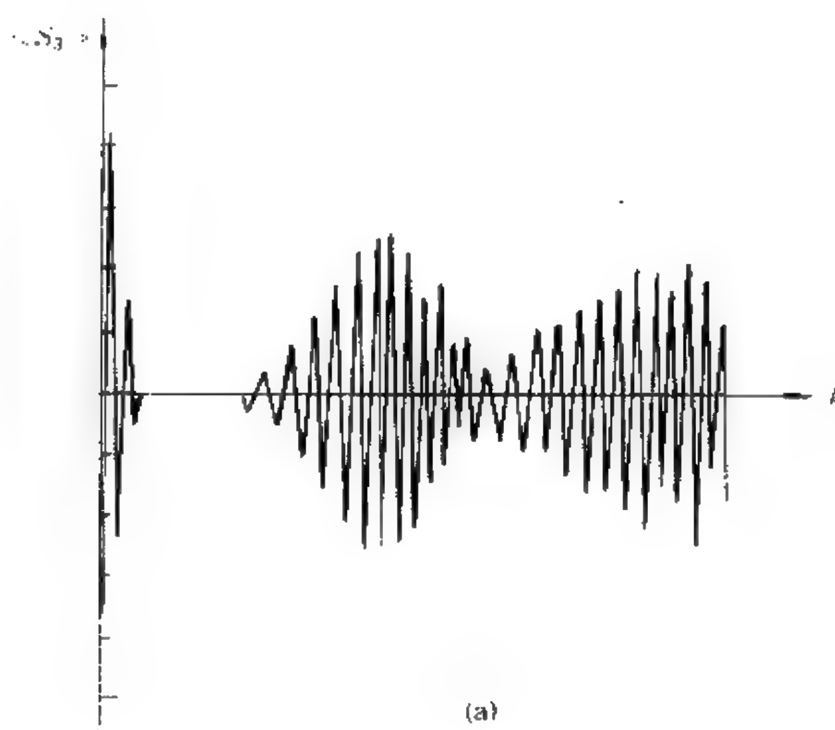
$$|\Psi^1(t)\rangle=\sum_n \exp(-|\alpha|^2/2)\alpha^n/\sqrt{n!}[-i\sin(g\sqrt{n}t)|2,n-1\rangle + \cos(g\sqrt{n}t)|1,n\rangle] \tag{3.1.30}$$

相应地,S_3的期望值为

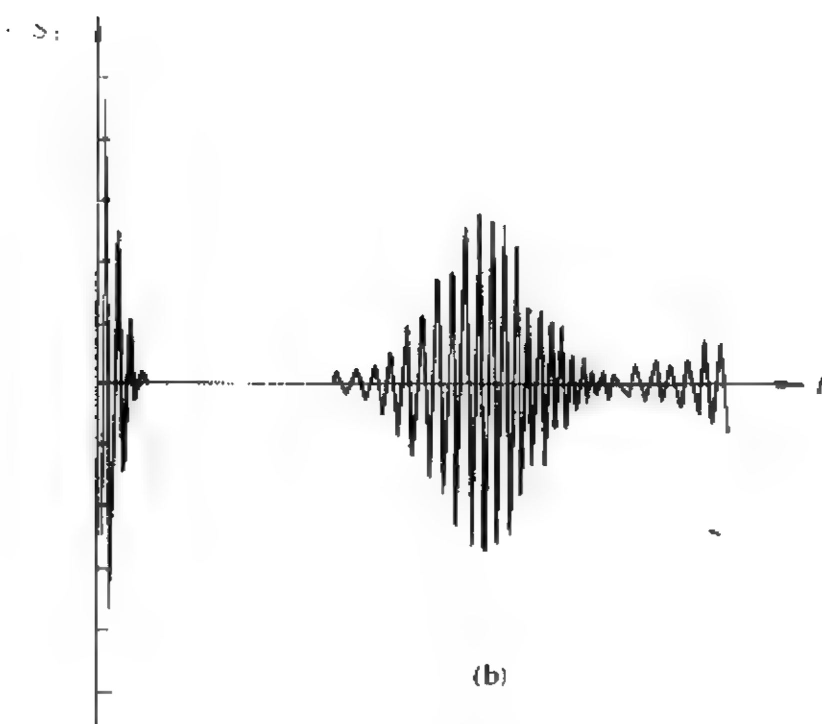
$$\langle S_3(t)\rangle=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\bar{n})\bar{n}^n\cos(2g\sqrt{n}t)/n! \tag{3.1.31}$$

其中已令$\bar{n}=|\alpha|^2$. 上式表明,原子的粒子布居差的期望值是无穷多个频率为$2g\sqrt{n}$、振幅为1/2的余弦振荡的带权重$\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n!$叠加,显然这种叠加将使得$\langle S_3\rangle$随时间的变化不再是余弦振荡. 图3.1.1给出了$\langle S_3\rangle$在$\bar{n}=8,15$时,$\langle S_3\rangle$随时间的演化规律. 我们看到,随着时间的演化,$\langle S_3\rangle$首先作振荡幅度锐减的快速振荡,通常把这种现象称为崩塌. 此后,$\langle S_3\rangle$在一个较长的时间范围内保持为0,随后$\langle S_3\rangle$又开始作振荡幅度先增大后减小的快速振荡,$\langle S_3\rangle$的这种振荡幅度从0开始增大的现象称为回复. 换句话说,$\langle S_3\rangle$在时间点$t=\frac{10}{g}$和$\frac{16}{g}$先恢复振荡接着又开始崩塌直至$\langle S_3\rangle=0$. 从图3.1.1中可以发现,$\langle S_3\rangle$的这种回复现象具有周期性. 从而我们看到,在相干光场作用下,原子算符的时间演化具有周期性地崩塌与回复的特征. 同时从图中还可以看到,原子的回复周期T_R与相干光场的平均光子数$\bar{n}$有关,而崩塌的衰减时间并不随$\bar{n}$明显变化. 而且$\langle S_3\rangle$每次恢复到最大值的幅度随着时间的增加是减小的. 下面我们首先对原子算符演化的这些特征作一解析分析.

由于(3.1.31)式中的权重是泊松因子$P_n=\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n!$,因此在对$n$作和时起主要贡献的是$\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}<n<\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}$的值. 当光场很强即$\bar{n}\gg 1$时,$n$的取值区域就相对地很窄. 因而可以把(3.1.31)式对n从$0\to\infty$的作和用积分来取代,即



(a)



(b)

图 3.1.1 $\langle S_3(t) \rangle$随时间的演化

(a) $n=8$;(b) $n=15$

$$\sum_n \rightarrow \int_0^\infty dn$$

注意到 $\bar{n} \gg 1$ 时只有 $n \in [\bar{n} - \sqrt{\bar{n}}, \bar{n} - \sqrt{\bar{n}}]$ 对 $\langle S_3 \rangle$ 的值才有贡献,所以可以利用伽马函数$[\Gamma(z)]$的斯特林展开公式

$$\ln\Gamma(z) = (z - 1/2)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260Z^5} + \cdots$$

$$(z \to \infty, |\arg z| < \pi) \tag{3.1.32}$$

将 $n!$ 表示为

$$\ln(n!) \approx (n + 1/2)\ln(n+1) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\approx n\ln(n) - n + \ln(2\pi n)^{1/2} \tag{3.1.33}$$

因而

$$\ln P_n = \ln[\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n!] = -\bar{n} + n + n\ln(n/\bar{n}) - \ln(2\pi n)^{1/2}$$

即

$$P_n \approx (2\pi n)^{-1/2}\exp[-\bar{n} + n - n\ln(n/\bar{n})] \tag{3.1.34}$$

从而(3.1.31)式变为

$$\langle S_3 \rangle = -\frac{1}{2}\int_0^\infty (2\pi n)^{-1/2}\exp[-\bar{n} + n - n\ln(n/\bar{n})]\cos(2g\sqrt{n}t)dn$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^\infty (2\pi n)^{-1/2}\exp[-\bar{n} + n - n\ln(n/\bar{n})]\exp(i2g\sqrt{n}t)dn \tag{3.1.35}$$

令 $y = n/\bar{n}$,则上式化为

$$\langle S_3 \rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^\infty \bar{n}(2\pi n)^{-1/2}\exp[-\bar{n} + \bar{n}\Psi(y)]dy$$

$$\approx -\frac{1}{2}\bar{n}(2\pi\bar{n})^{-1/2}\mathrm{Re}\int_0^\infty \exp[-\bar{n} + \bar{n}\Psi(y)]dy \tag{3.1.36}$$

式中已令

$$\Psi(y) = y(1 - \ln y) + i2g\bar{n}^{-1/2}y^{1/2}t \tag{3.1.37}$$

为了计算$\langle S_3\rangle$，需要介绍计算积分

$$I=\int dx e^{\alpha(x)} \tag{3.1.38}$$

的鞍点近似方法.

由于α是x的函数，可在x_0处把它展开成级数：

$$\alpha(x)=\alpha(x_0)+\alpha'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}\alpha''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots \tag{3.1.39}$$

若x_0选择在稳定点，即$\alpha(x)$取极值的点，则很有利于积分的计算. 如果x_0取为$\alpha(x)$极大值的点，那么积分(3.1.38)式中，x_0邻域的积分对被积函数的结果贡献最大，所以可近似地看作是整个积分的结果. 如果x_0为$\alpha(x)$的极大值，此时$\alpha(x)$在x_0处满足

$$\alpha'(x_0)=0,\ \text{且}\ \alpha''(x_0)<0 \tag{3.1.40}$$

那么(3.1.38)式在x_0的邻域Δx的积分应写为

$$I=\exp[\alpha(x_0)]\int dx\exp\{-\frac{1}{2}[-\alpha''(x_0)](x-x_0)^2+\cdots\}$$

这时被积函数的主要因子是高斯型的，在不计及其他次要因子时，积分是严格可积的. 通常称满足条件(3.1.40)式的点为$\alpha(x)$的鞍点，称在鞍点附近计算(3.1.38)式所示积分的方法为鞍点近似法.

利用鞍点近似法，可将(3.1.36)式化为

$$\begin{aligned}\langle S_3\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\bar{n}/2\pi)^{1/2}\exp[-\bar{n}+\bar{n}\Psi(y_0)] \\ &\quad\times\int_0^{\infty}\exp[-\frac{1}{2}\Psi''(y_0)\bar{n}(y-y_0)^2]dy \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\exp[-\bar{n}+\bar{n}\Psi(y_0)]/\sqrt{\Psi''(y_0)}\}\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

这里y_0是函数$\Psi(y)$的鞍点，即满足

$$\Psi'(y_0)=0$$

所以它是方程

$$y_0^{1/2}\ln(y_0)=ig\bar{n}^{-1/2}t \tag{3.1.42}$$

的解. 显然 y_0 的值明显地依赖于时间 t.

下面我们从(3.1.41)和(3.1.42)式出发,先定性地分析与相干光场作用的原子算符的时间行为. 在起始时刻,即

$$t\ll\tau_c=g^{-1} \tag{3.1.43}$$

时,方程(3.1.42)式有解 $y_0\approx1$,并且

$$\Psi(1)=1+i2g\bar{n}^{-1/2}t \tag{3.1.44}$$

将(3.1.44)式代入(3.1.41)式得到

$$\langle S_3(t)\rangle=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{\Psi''(1)}}\exp(2ig\bar{n}^{-1/2}t) \tag{3.1.45}$$

可见,在 $t\ll\tau_c$ 的时间区域内,原子以拉比频率 $\Omega_R=2g\bar{n}^{-1/2}$ 作余弦振荡. 但是当时间演化到 $t\sim\tau_c$ 时,(3.1.42)式表明,此时

$$y_0-1\sim\bar{n}^{-1/2},\quad \mathrm{Re}[1-\Psi(y_0)]\sim\bar{n}^{-1/2} \tag{3.1.46}$$

这种情况下,$\langle S_3\rangle$ 的幅度将按指数规律减小,也就是说,原子拉比振荡的包络值将很快地崩塌到零,因而 τ_c 可以看作是单模相干光场作用的二能级原子的拉比振荡崩塌时间,它仅依赖于原子-光场的耦合常数,而与相干光场的平均光子数 $\bar{n}$ 无关.

导致这种崩塌现象的原因是,在$t=0$时刻,可以把系统看成是处在态矢集$\{|1,n\rangle\}$的叠加态,所以(3.1.31)式中的$-\frac{1}{2}\exp(-\bar{n})\times\bar{n}^n\cos(2g\sqrt{n}\,t)/n!$ 项可以认为是系统初始时处于$|1,n\rangle$的态,因原子吸收和发射光子造成的量子拉比振荡. 而(3.1.31)式则是这种量子拉比振荡的叠加. 由于光场为相干光场,使得态矢集$\{|1,n\rangle\}$是有限的,但是(3.1.31)式中这些量子拉比振荡频率是不相同的,因而在 $t\approx\tau_c$ 时,这些振荡将是不相关的,换句话说,对于不同的 n 而言,在某一时刻 τ,$\cos(2g\sqrt{n}\,\tau)$的值有正有负,这些振荡不再相关,使得$\langle S_3\rangle$的值崩塌到零. 不相关时间 τ_c 可以估算如下:

因为在 $\bar{n}\gg1$ 时，对 $\langle S_3\rangle$ 的值起主要影响的是 n 值取 $\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}\leqslant n\leqslant\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}$ 的振荡，如果相位 $2g\sqrt{\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}}\tau_c$ 和 $2g\sqrt{\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}}\tau_c$ 相差 π，那么对起主要作用的 n 值而言，$\cos(2g\sqrt{n}t)$ 将有正有负，因此

$$2g(\sqrt{\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}}-\sqrt{\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}})\tau_c\sim1 \qquad (3.1.47)$$

在 $\bar{n}\gg1$ 时，则上式化为

$$\tau_c\sim g^{-1} \qquad (3.1.48)$$

显然，(3.1.48)式的不相关时间与(3.1.43)式的崩塌时间是相符的.

关于图 3.1.1 中出现的回复现象，可以理解如下：随着时间的演化到某一值 T_R，方程(3.1.31)式中的余弦函数 $\cos(2g\sqrt{n}t)$ 的相位 $2g\sqrt{n}t$ 相差 2π 时，$\cos(2g\sqrt{n}t)$ 回复到原来的值，而且由于在 $\bar{n}\gg1$ 时，泊松因子 $\exp(-\bar{n})n/n!$ 具有极大值的峰值也基本不变，从而此时 $\langle S_3\rangle$ 的值再次增大，出现回复现象，回复周期为

$$2g(\sqrt{\bar{n}+1}-\sqrt{\bar{n}})T_R\approx2\pi$$

即

$$T_R=2\pi\bar{n}^{1/2}/g \qquad (3.1.49)$$

上式表明，回复周期由原子-光场的耦合常数 g 和相干光场的平均光子数 $\bar{n}$ 共同决定. 显然，上式与图 3.1.1 完全相符，在

$$t=kT_R \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (3.1.50)$$

时出现回复现象. 将(3.1.50)式代入(3.1.42)式可得

$$y_0=\exp(i2\pi k) \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (3.1.51)$$

很显然，在 $t=0$ 时，$y_0=1$.

上面我们已讨论了 $y_0=1$ 附近原子粒子布居差随时间的变化

规律，那么在$y_0=\exp(i2\pi k)$附近，$\langle S_3\rangle$又将如何呢？换句话说，在$t=kT_R$附近，原子粒子布居差将如何随t变化呢？为此令

$$t=kT_R+\tau,\quad \tau\ll 1 \tag{3.1.52}$$

式中τ的值很小，相应地令

$$y_{ok}(t)=\eta_k\exp(i\varphi_k),\eta_k=1+\eta_k^{(1)},\varphi_k=2\pi k+\varphi_k^{(1)} \tag{3.1.53}$$

并且假设

$$\eta_k^{(1)}\ll 1,\varphi_k^{(1)}\ll 1,g\bar{n}^{-1/2}\tau\ll 1 \tag{3.1.54}$$

将(3.1.53)式代入(3.1.41)式，精确到$\eta_k^{(1)}$，$\varphi_k^{(1)}$项，得到

$$i\pi k\eta_k^{(1)}-\pi k\varphi_k^{(1)}+\eta_k^{(1)}+i\varphi_k^{(1)}=ig\bar{n}^{-1/2}\tau$$

上式中已利用了(3.1.52)式及(3.1.49)式. 利用复数相等的条件得到下列方程组：

$$\begin{aligned}\eta_k^{(1)}&=\pi k\varphi_k^{(1)}\\ \pi k\eta_k^{(1)}+\varphi_k^{(1)}&=g\bar{n}^{-1/2}\tau\end{aligned} \tag{3.1.55}$$

求解(3.1.55)式即得

$$\varphi_k^{(1)}=g\bar{n}^{-1/2}\tau[1+\pi^2k^2]^{-1} \tag{3.1.56}$$

$$\eta_k^{(1)}=g\bar{n}^{-1/2}\tau\pi k[1+\pi^2k^2]^{-1} \tag{3.1.57}$$

将(3.1.53)式代入(3.1.57)式，同时考虑到(3.1.41)式得到

$$\Psi[y_{ok}(t)]=1+\eta_k^{(1)}+i\varphi_k^{(1)}+ig\bar{n}^{-1/2}t(1+\eta_k^{(1)}/2)-g\bar{n}^{-1/2}t\varphi_k^{(1)}/2 \tag{3.1.58}$$

利用(3.1.56)和(3.1.57)式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,n\Psi[y_{ok}(t)]&\approx-2n\left(\frac{g\tau}{2\sqrt{\bar{n}}}\right)^2[1+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}]^{-1}+\bar{n}\\&=-2\bar{n}\sin^2\frac{g\tau}{2\sqrt{\bar{n}}}[1+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}]^{-1}+\bar{n}\end{aligned}$$

$$= -2\bar{n}\sin^2\frac{g(t-kT_R)}{2\sqrt{\bar{n}}}[1+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}]^{-1}+\bar{n}$$

$$= -2\bar{n}\sin^2\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}}[1+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}]^{-1}+\bar{n} \qquad (3.1.59)$$

$$\mathrm{Im}\bar{n}\Psi[y_{ok}(t)] = g\bar{n}^{1/2}t+\bar{n}g\bar{n}^{-1/2}\tau = g\bar{n}^{1/2}t+\bar{n}\sin(g\bar{n}^{-1/2}\tau)$$
$$= g\bar{n}^{1/2}t+\bar{n}\sin[g\bar{n}^{-1/2}(t-kT_R)] = g\bar{n}^{1/2}t+\bar{n}\sin(g\bar{n}^{-1/2}t) \qquad (3.1.60)$$

这里把含 τ^2,τ 的项用正弦函数取代时考虑了 $\sin x = x$ ($x \ll 1$)及(3.1.54)式.这时我们还需求出 $\Psi''[y_{ok}(t)]$的值,容易计算

$$\Psi''[y_{ok}(t)] \approx -1-ig\bar{n}^{-1/2}t/2 = \sqrt{1+g^2t^2/4\bar{n}}$$
$$\times\exp[i\mathrm{arctg}(g\bar{n}^{-1/2}t/2)] \qquad (3.1.61)$$

将(3.1.59)—(3.1.61)式一并代入(3.1.45)式得到

$$\langle S_3\rangle = -\frac{1}{2}(1+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}})^{-1/4}\exp[-C(t)]\cos\Phi(t) \qquad (3.1.62)$$

$$C(t) = 2\bar{n}\sin^2\frac{gt}{2\sqrt{\bar{n}}}(1+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}})^{-1/4} \qquad (3.1.63)$$

$$\Phi(t) = g\bar{n}^{1/2}t+\bar{n}\sin(g\bar{n}^{-1/2}t)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{g}{2\sqrt{\bar{n}}}t\right) \qquad (3.1.64)$$

这样,我们就得出了在 $n\gg 1$ 时,$\langle S_3\rangle$的解析表达式.(3.1.62)式表明,与单模相干光场作用的二能级原子,其粒子布居差随时间以幅度受指数规律调制的余弦振荡.在 $t\ll 1$ 时,$\langle S_3\rangle$简化为

$$\langle S_3\rangle = -\frac{1}{2}\exp(-g^2t^2/2)\cos\Phi(t) \qquad (3.1.65)$$

在 $t\sim\tau = g^{-1}$时,$\langle S_3\rangle\approx 0$,即原子粒子布居差将出现崩塌现象.同时,从(3.1.62)式可以看到,$\langle S_3\rangle$的回复周期 $T_R = 2\pi g^{-1}\bar{n}^{1/2}$.另外,从(3.1.62)式还可以看到,随着时间的增加,原子粒子布居差每次回复的幅度值呈减小的趋势.可见,解析结果(3.1.62)式与数值计算结果(图 3.1.1)的结论是完全一致的.

总之，上述数值计算和解析分析的结果均表明，初始为相干光场的单光子 J-C 模型中，原子算符的时间演化展现出周期性的崩塌与回复特征，这是原子行为量子特征的一种重要表现. 崩塌时间与光场的平均光子数 $\bar{n}$ 无关，仅仅依赖于原子–光场的耦合常数 g；而回复周期不仅与 g 有关，而且还取决于 $\bar{n}$ 的大小；并且每次回复的幅度值随着时间的演化越来越小.

第三节　双光子 J-C 模型中原子布居的周期崩塌与回复效应

上面我们研究了单光子 J-C 模型中原子算符的时间行为. 下面我们来讨论双光子 J-C 模型中原子的粒子布居差随时间的演化规律. 描述一个二能级原子通过双光子跃迁与一单模辐射场相互耦合系统的哈密顿量，在旋波近似下表示为

$$H=H_1+H_2 \tag{3.1.66}$$

$$H_1=\omega a^+a+\omega_0 S_3 \tag{3.1.67}$$

$$H_2=\epsilon(S^+a^2+a^{+2}S_-) \tag{3.1.68}$$

在共振情况下，即 $\omega_0=2\omega$ 时，不难看出：$[H_1,H]=0$，因而 H_1 是运动常数，这样在海森伯绘景中，原子能量算符 S_3 随时间的演化满足

$$\begin{aligned}S_3(t)&=e^{iHt}S_3(0)e^{-iHt}=\exp(iH_2t)S_3(0)\exp(-iH_2t)\\&=S_3(0)+it[H_2,S_3(0)]+\frac{(it)^2}{2!}[H_2,[H_2,S_3(0)]]+\cdots\end{aligned} \tag{3.1.69}$$

考虑到 a^+，a 之间遵循通常的玻色算符对易关系，而 S_3，$S_\pm$之间满足熟知的赝自旋算符的对易关系，则有

$$[H_2,S_3(0)]=[\epsilon(a^{+2}S_--a^2S_+),S_3(0)]=\epsilon(S_-a^{+2}-S_+a^2) \tag{3.1.70a}$$

$$[H_2,[H_2,S_3(0)]]=4\epsilon^2[a^+a+2S_3(0)+1][a^+a-2S_3(0)]S_3(0) \tag{3.1.70b}$$

$$[H_2,[H_2,[H_2,S_3(0)]]]=4\epsilon^2[a^+a+2S_3(0)+1] \times[a^+a-2S_3(0)]\epsilon(S_-a^{+2}-S_+a^2) \tag{3.1.70c}$$

把(3.1.70)式代入(3.1.69)式，不难得知 $S_3(t)$满足

$$S_3(t)=S_3(0)\cos\Omega t+\frac{i\epsilon}{\Omega}[S_-(0)a^{+2}(0)-S_+(0)a^2(0)]\sin\Omega t \tag{3.1.71}$$

如果假定 $t=0$ 时刻，原子处于基态$|1\rangle$，而辐射场处于相干态，即系统的初始态矢为

$$|1,\alpha\rangle=\exp(-|\alpha|^2/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|1,n\rangle \tag{3.1.72}$$

那么由(3.1.71)式可以很容易求得 $S_3(t)$的期望值：

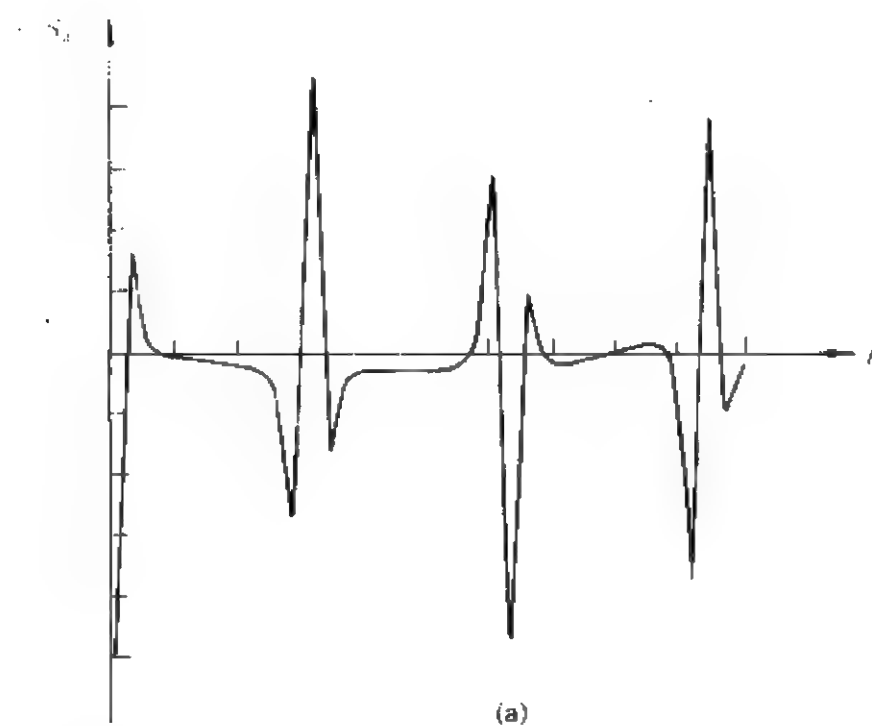
$$\langle S_3(t)\rangle=-\frac{1}{2}\exp(-\bar{n})\sum_{n=0}^{\infty}\bar{n}^n\cos(2\sqrt{n(n-1)}\epsilon t)/n! \tag{3.1.73}$$

式中已令$\bar{n}=|\alpha|^2$. 上式反映了在激光场作用下原子能量算符的时间演化规律.

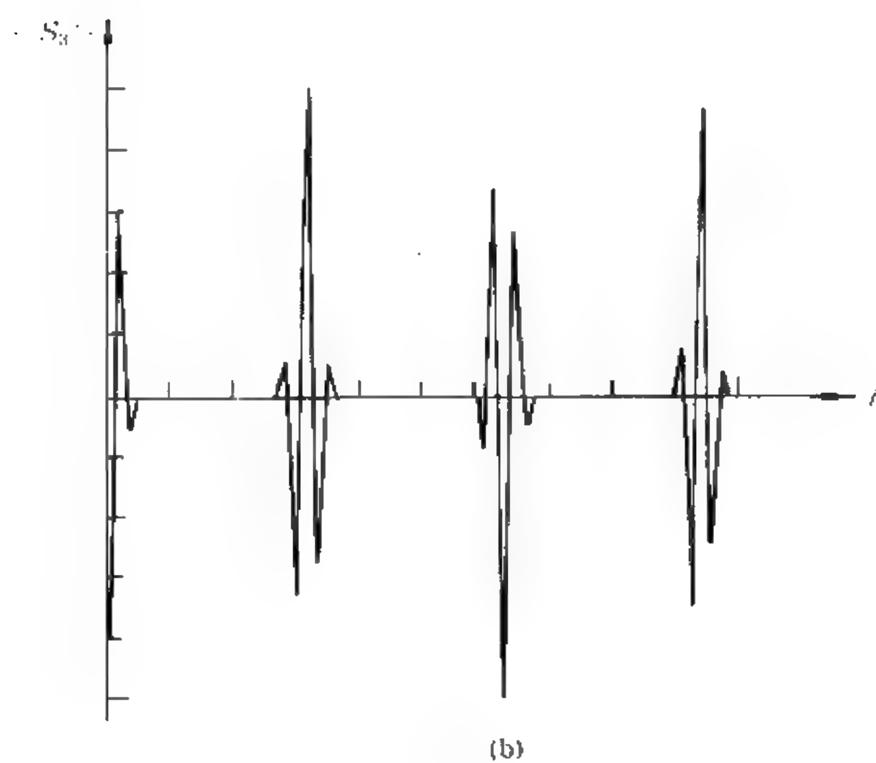
图 3.1.2 是参数 $\bar{n}$ 和 ϵ 取不同值时，按(3.1.73)式进行数值计算给出的$\langle S_3(t)\rangle$随时间 t 而变化的结果. 可以看出，原子能量算符的演化呈现出周期崩塌与回复现象. 在衰减区域内，原子呈拉比振荡，其拉比振荡频率随初始相干光场的平均光子数 $\bar{n}$ 的增大而增高[如图 3.1.2(b)，(c)所示]. 而图 3.1.2(a)—(c)则表明，原子布居的崩塌时间随耦合常数 ϵ 和平均光子数 $\bar{n}$ 的增大而变短. 另一方面，原子布居在崩塌之后，会再度回复，回复周期与初始平均光子数 $\bar{n}$ 无关，只由耦合常数 ϵ 所决定，它比崩塌时间要长得多.

对于初始平均光子数 $\bar{n}\gg1$ 的相干光场，在对(3.1.73)式作和式中可取近似

$$\sqrt{n(n-1)}\approx n-1/2 \tag{3.1.74}$$



(a)

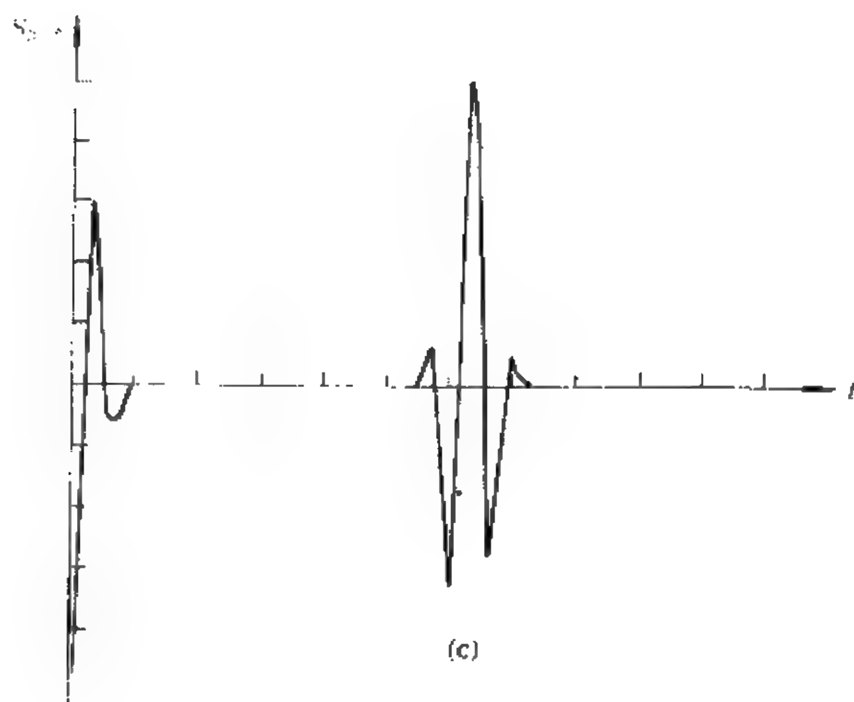


(b)

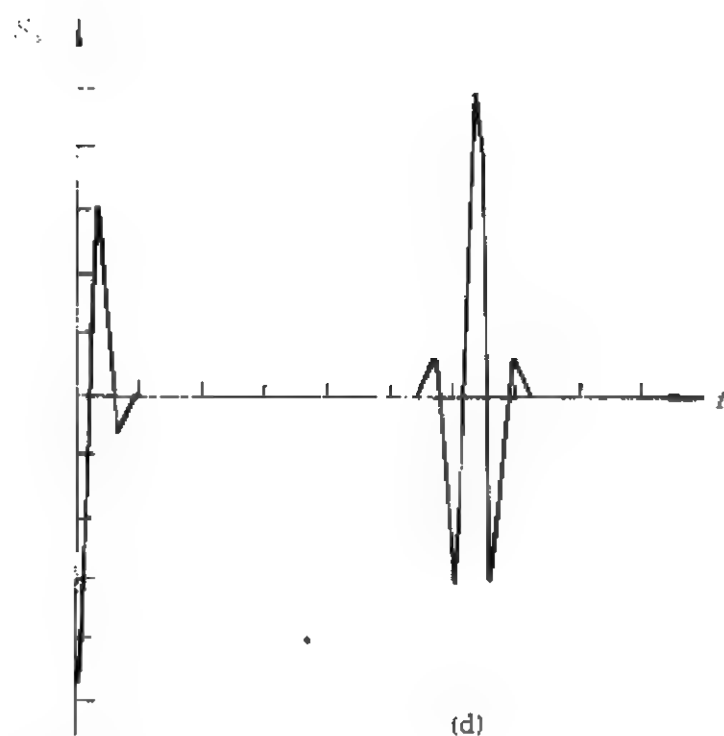
图 3.1.2 $\langle S_3(t)\rangle$

(a)$\bar{n}=8, \varepsilon=0.05$;

(c)$n=15, \varepsilon=0.1$;



(c)



(d)

随时间的演化

(b)$\bar{n}=15, \varepsilon=0.05$;

(d)$\bar{n}=15; \varepsilon=0.1$

再利用公式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}\sin kx=\exp(p\cos x)\sin(p\sin kx)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}\cos kx=\exp(p\cos x)\cos(p\sin kx) \qquad (3.1.75)$$

则(3.1.73)式可以近似表示成

$$\langle S_3(t)\rangle\approx-\frac{1}{2}\exp(-2\bar{n}\sin^2\varepsilon t)\cos(\bar{n}\sin 2\varepsilon t-\varepsilon t)$$

$$(3.1.76)$$

图 3.1.2(d)是由(3.1.76)式所描述的$\langle S_3(t)\rangle$随时间的变化规律，与图 3.1.2(c)比较可知，二者基本相同.下面我们通过(3.1.76)式来分析原子粒子布居差随时间演化的规律.

从(3.1.76)式可以看出：原子粒子布居差处于快速余弦振荡状态，同时又受高斯型衰减包络函数 $\exp(-2\bar{n}\sin^2\varepsilon t)$的抑制，这样就使得原子的能量在时间演化过程中处于周期的崩塌和回复.由(3.1.76)式，可以得到原子布居的崩塌时间近似等于

$$2\bar{n}\varepsilon^2t_c\approx 1$$

即

$$t_c\approx\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\bar{n}}} \qquad (3.1.77)$$

回复周期为

$$T_R=\pi/\varepsilon \qquad (3.1.78)$$

显然，当 $\bar{n}\gg 1$ 时，$t_c\ll T_R$. 与单光子 J-C 模型中原子布居的崩塌时间和回复周期相比，在这里 t_c明显地依赖于平均光子数 $\bar{n}$，而回复周期 T_R则与平均光子数 $\bar{n}$ 无关.这说明双光子 J-C 模型中原子算符演化所呈现的周期崩塌和回复现象的特征与单光子 J-C 模型中的特征相比是有所不同的.

第四节　三能级原子系统中原子算符的时间演化特征

下面我们再来考察与辐射场相互作用的三能级原子系统中原

子算符的时间行为.

一、系统态矢随时间的演化

我们考虑如图 3.1.3 所示的级联三能级原子模型，其中能级 $|1\rangle$ 与 $|2\rangle$ 及 $|2\rangle$ 与 $|3\rangle$ 之间的跃迁分别与频率为 ω 的单模辐射场相联系，$|3\rangle$ 与 $|1\rangle$ 之间的单光子跃迁是电偶极禁戒的. 在旋波近似下，原子与光场相互作用系统的哈密顿量表示为

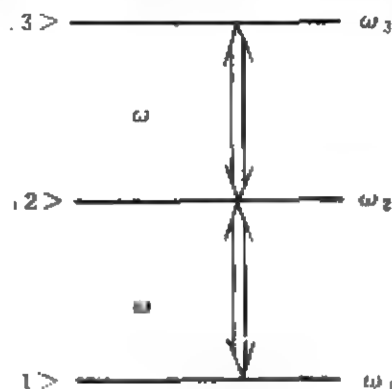


图 3.1.3 级联三能级原子-光场耦合示意图

$$H=H_0+V \quad (3.1.79)$$

其中

$$H_0=\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha C_\alpha^{+}C_\alpha+\omega a^{+}a \quad (\hbar=1) \quad (3.1.80)$$

$$V=g_1(aC_3^{+}C_2+a_2^{+}C_2^{+}C_3)+g_2(aC_2^{+}C_1+a^{+}C_1^{+}C_2) \quad (3.1.81)$$

这里 ω_α 代表原子第 α 能级的本征能量，g_1, g_2 是频率为 ω 的单模光场与原子的耦合常数，$C_\alpha^{+}, C_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 分别对应原子第 α 能级的费米产生和湮没算符，它们遵循

$$C_\alpha C_\beta^{+}=0 \ (\alpha\neq\beta),\ C_\epsilon C_\alpha^{+}C_\beta=C_\beta \quad (3.1.82)$$

为计算简单起见，只考虑双子共振情况，即原子的本征跃迁频率与光场频率满足：$\omega_3-\omega_1=2\omega$. 在相互作用绘景中，系统的相互作用哈密顿量变为

$$V^{I}=g_1(aC_3^{+}C_2e^{i\Delta t}+a^{+}C_2^{+}C_3e^{-i\Delta t})+g_2(aC_2^{+}C_1e^{-i\Delta t}+a^{+}C_1^{+}C_2e^{i\Delta t}) \quad (3.1.83)$$

$$C_i^{+}C_i^{I}(t)=C_i^{+}C_i^{S} \qquad (i=1,2,3) \quad (3.1.84)$$

其中

$$\Delta=\omega-(\omega_2-\omega_1)=(\omega_3-\omega_2)-\omega \quad (\Delta\ll\omega) \quad (3.1.85)$$

同前面一样，这里我们也只考察初始光场为相干光场，且原子初始时处在基态$|1\rangle$的情况. 在 t 时刻，系统的态矢随着时间的演化，可以写为

$$|\Psi^I_{AF}(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|3,n\rangle + b_n(t)|2,n\rangle + c_n(t)|1,n\rangle \tag{3.1.86}$$

利用相互作用绘景中的薛定谔方程及正交性关系可得

$$a_n(t)=BV_1(n)\left\{\frac{\exp\left[i\left(\frac{\Delta}{2}-\gamma(n)\right)t\right]-1}{\frac{\Delta}{2}-\gamma(n)}-\frac{\exp\left[i\left(\frac{\Delta}{2}-\gamma(n)\right)t\right]-1}{\frac{\Delta}{2}+\gamma(n)}\right\}$$

$$b_{n+1}(t)=B\{\exp[-i(\Delta/2-\gamma(n))t]-\exp[i(\Delta/2+\gamma(n))t]\} \tag{3.1.87}$$

$$c_{n+2}(t)=BV_2(n)\left\{\frac{\exp\left[i\left(\frac{\Delta}{2}-\gamma(n)\right)t\right]-1}{\frac{\Delta}{2}-\gamma(n)}-\frac{\exp\left[i\left(\frac{\Delta}{2}+\gamma(n)\right)t\right]-1}{\frac{\Delta}{2}+\gamma(n)}\right\}+F_{n+2}$$

其中

$$V_1(n)=g_1\sqrt{n+1},V_2(n)=g_2\sqrt{n+2} \tag{3.1.88}$$

$$\gamma(n)=\left[\frac{\Delta^2}{4}+V_1^2(n)+V_2^2(n)\right]^{1/2} \tag{3.1.89}$$

$$B=-V_2(n)F_{n+2}/[2\gamma(n)] \tag{3.1.90}$$

$\gamma(n)$是与原子的拉比频率有关的参数，这里考虑到波函数的初相位可以任意选定这一原理，已令 $F_{n+2}=F_{n+2}^*$. 这样就完全确定了任意时刻 t 系统的密度矩阵 $\rho^I(t)$：

$$\rho^I(t) = |\Psi^I_{AF}(t)\rangle\langle\Psi^I_{AF}(t)|$$

$$
= \sum_{n,k} \begin{bmatrix} a_k a_n^+ |k\rangle\langle n| & a_k b_{n+1}^+ |k\rangle\langle n+1| & a_k c_{n+2}^+ |k\rangle\langle n+2| \\ b_{k+1} a_n^+ |k+1\rangle\langle n| & b_{k+1} b_{n+1}^+ |k+1\rangle\langle n+1| & b_{k+1} c_{n+2}^+ |k+1\rangle\langle n+2| \\ c_{k+2} a_n^+ |k+2\rangle\langle n| & c_{k+2} b_{n+1}^+ |k+2\rangle\langle n+1| & c_{k+2} c_{n+2}^+ |k+2\rangle\langle n+2| \end{bmatrix} \tag{3.1.91}
$$

式中所有的参数由(3.1.87)—(3.1.90)式确定. 由(3.1.91)式出发，不难求出原子的粒子布居数的期望值随时间的演化.

二、原子粒子布居数的周期崩塌与回复现象

利用(3.1.87)—(3.1.91)式，可以得到原子粒子布居算符的期望值为

$$
\begin{aligned}
\langle C_3^+ C_3(t)\rangle &= \mathrm{Tr}(C_3^+ C_3(t)\, \rho^I(t)) = \sum_n |a_n(t)|^2 \\
&= g_1^2 g_2^2 \exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n+2}}{2\gamma^2(n)} \frac{1}{n!} \Bigg[\frac{1}{\left(\gamma(n) - \frac{\Delta}{2}\right)^2} \\
&\quad + \frac{1}{\left(\gamma(n) + \frac{\Delta}{2}\right)^2} + \frac{1}{V_1^2(n) + V_2^2(n)} \Bigg] - g_1^2 g_2^2 e^{-\bar{n}} \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n+2}}{2\gamma^2_{(n)}} \frac{1}{n!} \Bigg\{ \cos\left(\frac{\Delta}{2} - \gamma(n)\right) t \Bigg[\frac{1}{\left(\gamma(n) - \frac{\Delta}{2}\right)^2} \\
&\quad + \frac{1}{V_1^2(n) + V_2^2(n)} \Bigg] + \cos\left(\frac{\Delta}{2} + \gamma(n)\right) t \\
&\quad \times \Bigg[\frac{1}{\left(\gamma(n) + \frac{\Delta}{2}\right)^2} + \frac{1}{V_1^2(n) + V_2^2(n)} \Bigg] - \frac{\cos 2\gamma(n) t}{V_1^2(n) + V_2^2(n)} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.1.92}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle C_2^+ C_2(t)\rangle &= \sum_n |b_{n+1}(t)|^2 = g_2^2 \exp(-\bar{n}) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2\gamma^2(n)} [1 - \cos 2\gamma(n) t]
\end{aligned} \tag{3.1.93}
$$

$$\langle C_1^\dagger C_1(t)\rangle = \sum_n |c_{n+2}(t)|^2 = e^{-\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\times\left[1-\frac{2V_2^2(n)}{V_1^2(n)+V_2^2(n)}+\frac{V_2^4(n)}{2\gamma^2(n)}\cdot\frac{3\gamma^2(n)+\frac{\Delta^2}{4}}{(V_1^2(n)+V_2^2(n))^2}\right]$$

$$+e^{-\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+2}}{(n+2)!}\left\{\cos\left(\frac{\Delta}{2}-\gamma(n)\right)t\,\frac{V_2^2(n)}{\gamma(n)}\left[\frac{1}{\gamma(n)-\frac{\Delta}{2}}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{V_2^2(n)}{2\gamma(n)}\cdot\frac{1}{\left(\gamma(n)-\frac{\Delta}{2}\right)^2}-\frac{V_2^2(n)}{2\gamma(n)}\cdot\frac{1}{V_1^2(n)+V_2^2(n)}\right]$$

$$-\cos\left(\frac{\Delta}{2}-\gamma(n)\right)t\,\frac{V_2^2(n)}{\gamma(n)}\left[\frac{1}{\gamma(n)+\frac{\Delta}{2}}+\frac{V_2^2(n)}{2\gamma(n)}\frac{1}{\left(\gamma(n)+\frac{\Delta}{2}\right)^2}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{V_2^2(n)}{2\gamma(n)}\frac{1}{V_1^2(n)+V_2^2(n)}\right]+\frac{\cos 2\gamma(n)t}{V_1^2(n)-V_2^2(n)}\cdot\frac{V_2^4(n)}{2\gamma^2(n)}\right\}$$

(3.1.94)

(3.1.92)—(3.1.94)式就是原子粒子布居数随时间的演化规律，为了明显看出(3.1.92)—(3.1.94)式反映的物理性质，我们对其进行解析分析，分别考虑条件

$$\Delta^2\gg g_1^2(n+1)+g_2^2(n+2) \qquad (3.1.95)$$

成立和不成立的两种情况.

若 $\Delta^2\gg g_1^2(n+1)+g_2^2(n+2)$成立，这时(3.1.89)式简化为

$$\gamma(n)\approx\frac{\Delta}{2}+\frac{1}{\Delta}\left[g_1^2(n+1)+g_2^2(n-2)\right] \qquad (3.1.96)$$

$$\gamma(n)+\Delta/2\approx\Delta \qquad (3.1.97)$$

假设 $g_1=g_2=g$，并注意到相干光场的光子数呈现泊松分布，在 $\bar{n}\gg1$ 时，(3.1.92)—(3.1.94)式简化为

$$\langle C_3^\dagger C_3(t)\rangle\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{g^2t}{\Delta}\right)$$

$$\times\cos\left[\bar{n}\sin^2\frac{g^2t}{\Delta}-\frac{g^2}{\Delta}t\right]-\frac{2g^2}{\Delta^2}\bar{n}\cos\Delta t \qquad (3.1.98)$$

$$\langle C_2^+C_2(t)\rangle\approx 2g^2\bar{n}(1-\cos\Delta t)/\Delta^2 \qquad (3.1.99)$$

$$\langle C_1^+C_1(t)\rangle\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{g^2t}{\Delta}\right)$$

$$\times\cos\left[\bar{n}\sin\frac{2g^2t}{\Delta}-\frac{g^2}{\Delta}t\right]+\frac{2g^2}{\Delta^2}\bar{n}\cos\Delta t \qquad (3.1.100)$$

从(3.1.98)—(3.1.100)式可以看到，原子第1，3能级布居数的期望值呈现出周期性的崩塌与回复效应，其回复周期T_R和崩塌时间T_D分别为

$$T_R=\pi\Delta/g^2,\ T_D=\frac{\Delta}{g\sqrt{2\bar{n}}} \qquad (3.1.101)$$

容易看出，回复周期与耦合常数g及失谐量Δ有关，而与平均光子数无关，而且在$\bar{n}\gg1$时，崩塌时间$T_D\ll T_R$.

利用(3.1.98)及(3.1.100)两式，我们得到上、下能级的粒子布居差为

$$\langle C_3^+C_3(t)\rangle-\langle C_1^+C_1(t)\rangle\approx-\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{g^2t}{\Delta}\right)$$

$$\times\cos\left[\bar{n}\sin\frac{2g^2t}{\Delta}-\frac{g^2}{\Delta}t\right]-\frac{4g^2}{\Delta^2}\bar{n}\cos\Delta t \qquad (3.1.102)$$

(3.1.102)式表明上、下能级粒子布居差的期望值表现出与$\langle C_3^+C_3(t)\rangle$，$\langle C_1^+C_1(t)\rangle$相同的崩塌与回复性质. 而在双光子J-C模型中，原子的粒子布居差遵循(3.1.76)式. 应该指出的是，当$\epsilon=g^2/\Delta$时，上式与(3.1.76)式完全一致，这说明在满足条件(3.1.95)式，且$g_1=g_2=g$成立时，与单模光场作用的三能级原子系统中粒子布居差的演化与双光子J-C模型中原子能量算符的演化完全一致，二者的耦合常数满足如下关系：

$$\epsilon=g^2/\Delta \qquad (3.1.103)$$

此外由(3.1.99)式还可以看到，三能级原子的中间能级粒子布居数的期望值处于快速余弦振荡状态，粒子在中间能级的寿命 $T_2=2\pi/\Delta\ll T_0$，这说明原子在 $|3\rangle\longleftrightarrow|1\rangle$ 的双光子跃迁过程中，在中间能级 $|2\rangle$ 上停留的时间很短. 由于 $\langle C_2^\dagger C_2\rangle$ 反映的是 $|3\rangle\longleftrightarrow|2\rangle$ 和 $|2\rangle\longleftrightarrow|1\rangle$ 的单光子贡献，而 $\langle C_2^\dagger C_2\rangle$ 的幅度 $g^2\bar{n}/\Delta\ll 1$，因此，发生在中间能级上的单光子跃迁的概率远小于 $|3\rangle\longleftrightarrow|1\rangle$ 的双光子跃迁概率.

可见，在 $\Delta^2\gg g_1^2(n+1)+g_2^2(n+2)$ 及 $g_1=g_2=g$ 成立时，双光子 J-C 模型[由(3.1.66)式描述]能够反映级联三能级原子与单模光场相互作用的性质. 然而，如果 $\Delta^2\gg g_1^2(n+1)+g_2^2(n+2)$ 这一条件不成立时，系统又呈现出什么样的性质呢？下面我们来讨论这一问题.

考虑到相干光场的光子数呈泊松分布，在 $\bar{n}\gg 1$ 时，(3.1.89)式可在 $n=\bar{n}$ 点处作泰勒展开：

$$\gamma(n)=\gamma(\bar{n})\left[1+\frac{n-\bar{n}}{2\gamma^2(n)}(g_1^2+g_2^2)+\cdots\right] \quad (3.1.104)$$

这里

$$\gamma(\bar{n})=\sqrt{\frac{\Delta^2}{4}+V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}$$

由于满足条件 $|n-\bar{n}|<\sqrt{\bar{n}}$，即 $|n-\bar{n}|/\bar{n}<\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}\ll 1$ 的项对(3.1.92)—(3.1.94)式中作和的贡献最大，因此在(3.1.104)式中仅保留至第二项已足够精确，将(3.1.104)式代入(3.1.92)—(3.1.94)式得到

$$\langle C_3^\dagger C_3(t)\rangle\approx\frac{V_1^2(\bar{n})V_2^2(\bar{n})}{2\gamma^2(\bar{n})}\left[\frac{1}{\left(\gamma(\bar{n})-\frac{\Delta}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\gamma(\bar{n})+\frac{\Delta}{2}\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}\right]-\frac{V_1^2(\bar{n})V_2^2(\bar{n})}{2\gamma^2(\bar{n})}\left\{\cos\left(\gamma(\bar{n})-\frac{\Delta}{2}\right)t\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{\left(\gamma(\bar{n})-\frac{\Delta}{2}\right)^2}+\frac{1}{V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}\right]+\cos\left(\gamma(\bar{n})+\frac{\Delta}{2}\right)t$$

$$\times\left[\frac{1}{\left(\gamma(\bar{n})+\frac{\Delta}{2}\right)^2}+\frac{1}{V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}\right]\Big\}\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{\lambda}{4}t\right)$$

$$\times\cos\left(\bar{n}\sin\frac{\lambda}{2}t-\frac{\lambda}{2}\bar{n}t\right)-\frac{V_1^2(\bar{n})V_2^2(\bar{n})}{2\gamma^2(\bar{n})(V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n}))}$$

$$\times\cos2\gamma(\bar{n})t\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{\lambda}{2}t\right)\cos(\bar{n}\sin\lambda t-\bar{n}\lambda t)$$

(3.1.105)

$$\langle C_2^\dagger C_2(t)\rangle\approx\frac{g^2\bar{n}}{2\gamma^2(\bar{n})}\Big[1-\cos2\gamma(\bar{n})t\cdot\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{\lambda}{2}t\right)$$

$$\cdot\cos(\bar{n}\sin\lambda t-(\bar{n}+1)\lambda t)\Big] \qquad (3.1.106)$$

$$\langle C_1^\dagger C_1(t)\rangle\approx\left[1-\frac{2V_2^2(\bar{n})}{V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}+\frac{V_2^4(\bar{n})}{2\gamma^2(\bar{n})}\cdot\frac{3\gamma^2(\bar{n})+\frac{\Delta^2}{2}}{(V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n}))^2}\right]$$

$$+\frac{V_2^2(n)}{\gamma(\bar{n})}\Big\{\left[\frac{1}{\gamma(\bar{n})-\frac{\Delta}{2}}-\frac{V_1^2(\bar{n})}{2\gamma(\bar{n})}\frac{1}{\left(\gamma(\bar{n})-\frac{\Delta}{2}\right)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{V_2^2(\bar{n})}{2\gamma(\bar{n})}\frac{1}{V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}\right]\cos\left(\gamma(\bar{n})-\frac{\Delta}{2}\right)t$$

$$+\left[\frac{1}{\gamma(\bar{n})+\frac{\Delta}{2}}-\frac{V_2^2(\bar{n})}{2\gamma(\bar{n})}\frac{1}{\left(\gamma(\bar{n})+\frac{\Delta}{2}\right)^2}-\frac{V_2^2(\bar{n})}{2\gamma(\bar{n})}\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}\right]\cos\left(\gamma(\bar{n})+\frac{\Delta}{2}\right)t\Big\}\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{\lambda}{4}t\right)$$

$$\times\cos\left(\bar{n}\sin\frac{\lambda}{2}t-\frac{\bar{n}}{2}\lambda t\right)+\frac{V_2^2(\bar{n})}{2\gamma^2(\bar{n})}\frac{1}{V_1^2(\bar{n})+V_2^2(\bar{n})}\cos2\gamma(\bar{n})t$$

$$\times\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{\lambda}{2}t\right)\cos(\bar{n}\sin\lambda t-\bar{n}\lambda t) \qquad (3.1.107)$$

这里

$$\lambda=(g_1^2+g_2^2)/\gamma(\bar{n}) \tag{3.1.108}$$

从(3.1.105)—(3.1.107)式中可明显看出，$\langle C_i^+C_i(t)\rangle(i=1,2,3)$都呈现出周期性的崩塌与回复效应，其中$\langle C_2^+C_2(t)\rangle$反映单光子跃迁的贡献，它的崩塌时间$T_{D2}$和回复周期$T_{R2}$分别为

$$T_{D2}=\sqrt{\frac{2}{\bar{n}}}\frac{\gamma(n)}{g_1^2+g_2^2},\quad T_{R2}=\frac{2\pi\gamma(\bar{n})}{g_1^2+g_2^2} \tag{3.1.109}$$

在单光子共振条件下，T_{D2}和T_{R2}简化为

$$T_{D2}=\sqrt{\frac{2}{g_1^2+g_2^2}},\quad T_{R2}=2\pi\sqrt{\frac{\bar{n}}{g_1^2+g_2^2}} \tag{3.1.110}$$

可见它们与单光子J-C模型中的崩塌时间和回复周期的性质相同. 但是在$\langle C_3^+C_3(t)\rangle$和$\langle C_1^+C_1(t)\rangle$中，除含有与$\langle C_2^+C_2(t)\rangle$性质相同的周期崩塌和回复项以外，还叠加有崩塌时间和回复周期分别为

$$T_R=2T_{R2},\ T_D=2T_{D2} \tag{3.1.111}$$

的周期崩塌与回复项，它们对应着原子从$|3\rangle\longleftrightarrow|1\rangle$的双光子跃迁过程的贡献. 因此在$t=kT_R(k=0,1,2,\cdots)$的时间区域里，原子粒子布居数$\langle C_1^+C_1(t)\rangle$，$\langle C_3^+C_3(t)\rangle$的回复和崩塌是单、双光子跃迁共同贡献的结果. 此时$\langle C_1^+C_1(t)\rangle$，$\langle C_3^+C_3(t)\rangle$的包络不再是高斯型的，它由两个高斯函数$\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{\lambda t}{4}\right)$和$\exp\left(-2\bar{n}\sin^2\frac{\lambda t}{2}\right)$共同调制，这一现象与二能级原子完全不同. 特别地，当$\Delta=0,g_1=g_2=g$时，在$\langle C_1^+C_1(t)\rangle$，$\langle C_3^+C_3(t)\rangle$中分别反映单、双光子跃迁贡献项的幅度之比为1∶4，因此与双光子跃迁相比，并不能忽略掉单光子跃迁的贡献. 由于$\langle C_2^+C_2(t)\rangle$的幅度值为1/4，它的跃迁速率较小，这说明原子处在中间能级的寿命较长. 与上、下能级相比较，原子在中间能级表现出较稳定的性质. 因此，在$\Delta^2\gg g_1^2(n+1)+g_2^2(n+2)$不成立时，级联三能级原子与单模辐射

场的相互作用不能用双光子 J-C 模型来描述.

上述研究结果还表明,在不同的单光子失谐量条件下,与单模光场作用的级联三能级原子所表现出的周期崩塌与回复的性质是不同的.

参 考 文 献

[1] L. Allen and J. H. Eberly, Optical resonance and two-level atoms, Wiley, 1975.

[2] P. L. Knight and P. W. Milonni, *Phys. Rep.*, **66**, 21 (1980).

[3] J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 1323 (1980).

[4] N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon and J. H. Eberly, *Phys. Rev.*, **A23**, 236 (1981).

[5] H. I. Yoo, J. J. Sanchez-Mondragon and J. H. Eberly, J. *Phys.*, **A14**, 1383 (1981).

[6] P. L. Knight and P. M. Radmore, *Phys. Rev.*, **A26**, 676 (1982).

[7] G. Milburn, *Opt. Acta*, **31**, 671 (1984).

[8] H. I. Yoo and J. H. Eberly, *Phys. Rep.*, **118**, 239 (1986).

[9] X. S. Li, D. L. Lin and C. D. Gong, *Phys. Rev.*, **A36**, 5209 (1987).

[10] P. Alsing and M. S. Zubairy, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**, 177 (1987).

[11] A. Bandilla and H. H. Ritze, *IEEE. J. Quant. Electron*, **24**, 1388 (1988).

[12] G. S. Agarwal and R. R. Puri, *J. Opt. Soc. Am.*, **B5**, 1669 (1988).

[13] 彭金生、黄湘友,光学学报,**8**, 766 (1988).

[14] A. Joshi and R. R. Puri, *Phys. Rev.*, **A42**, 4336 (1990).

[15] D. A. Cardimona, V. Kovanis, M. P. Sharma and A. Gavrielides, *Phys. Rev.*, **A43**, 3710 (1991).

[16] T. Quang, P. L. Knight and V. Buzek, *Phys. Rev.*, **A44**, 6092 (1991).

[17] W. K. Lai, V. Buzek and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A44**, 2003 (1991).

[18] 彭金生、李高翔、周鹏, 物理学报, **40**, 1042 (1991).

[19] P. Zhou, Z. L. Hu, 彭金生, *J. Mod. Opt.*, **39**, **49**, (1992).

[20] A. H. Toor and M. S. Zubairy, *Phys. Rev.*, **A45**, 4951 (1992).

[21] P. Zhou, 彭金生, *Physica*, **A 193**, 114 (1993).

[22] 彭金生、李高翔, *Phys. Rev.*, **A47**, 4212 (1993).

[23] 彭金生、李高翔, *Phys. Lett.*, **A176**, 230 (1993).

[24] B. W. Shore and P. L. Knight, *J. Mod Opt.*, **40**, 1195 (1993).

[25] 李高翔、彭金生、周鹏, 光学学报, **13**, 902 (1993).

[26] 路洪、彭金生、物理学报, **43**, 1787 (1994).

[27] 路洪、彭金生、李高翔, 物理学报, **44**, 708 (1995).

第二章　原子算符的压缩效应

第二篇第二章中，我们在讨论光场的压缩态时，曾研究了描述光场与原子相互作用的 J-C 模型中，光场涨落的压缩效应. 那么在原子与光场相互作用系统中，原子算符是否也呈现压缩效应呢?本章专门论述这一问题.

这里首先介绍原子算符压缩的定义，接着论述原子压缩态的性质及意义. 然后以双光子 J-C 模型为例，分析原子算符出现压缩的条件，并进一步讨论在相干光场作用下原子粒子布居差$\langle S_3\rangle$的演化与原子算符压缩的关系. 最后介绍共振荧光系统中原子算符的压缩性质.

第一节　原子算符压缩的定义

在第二篇第二章中，我们介绍了光场的压缩、高阶压缩以及振幅平方压缩的定义，这些定义可以概括成统一的形式，即对于光场的任意一对厄米算符 A、B，它们满足对易关系：

$$[A,B]=iC \tag{3.2.1}$$

时，相应的力学量 A，B 的期望值的量子涨落所遵循的海森伯不确定关系为

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2\geqslant\frac{1}{4}|\langle C\rangle|^2 \tag{3.2.2}$$

如果量子涨落$(\Delta A)^2$ 或$(\Delta B)^2$ 满足

$$(\Delta A)^2<\frac{1}{2}|\langle C\rangle|\text{或}(\Delta B)^2<\frac{1}{2}|\langle C\rangle| \tag{3.2.3}$$

那么就说算符 A 或 B 的量子涨落被压缩了，此时光场处在压缩态. 类似地，这种定义可推广到原子算符. 对于一个由赝自旋算符

$S_\pm$,S_3 描述的二能级原子,可定义两个厄米算符.

$$S_1=\frac{1}{2}(S_+ + S_-)=\begin{bmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

$$S_2=\frac{1}{2i}(S_+ - S_-)=\begin{bmatrix}0 & -i/2\\ i/2 & 0\end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

显然,它们满足对易关系:

$$[S_1,S_2]=iS_3 \tag{3.2.6}$$

相应的海森伯不确定关系为

$$(\Delta S_1)^2(\Delta S_2)^2\geqslant\frac{1}{4}|\langle S_3\rangle|^2 \tag{3.2.7}$$

这里$(\Delta S_i)^2=\langle S_i^2\rangle-\langle S_i\rangle^2$ 是原子算符 S_i 的量子涨落. 如果存在某个态$|\Psi\rangle$,使得 S_i 的量子涨落满足

$$(\Delta S_i)^2<\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle| \quad (i=1\text{ 或 }2) \tag{3.2.8}$$

或者

$$F_i=(\Delta S_i)^2-\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle| \quad (i=1\text{ 或 }2) \tag{3.2.9}$$

我们就说原子算符的量子涨落被压缩,原子呈现出压缩效应,此时原子所处在态$|\Psi\rangle$称为原子压缩态. 实际上,由第一篇第二章可知,算符 S_1 和 S_2 分别对应原子偶极矩的两个正交分量,因此有时也把原子算符的压缩称为原子偶极的压缩.

下面我们来考察一下原子系统处于什么态$|\Psi\rangle$时可展现出原子算符的压缩效应. 对于一个二能级原子,假定它处于激发态$|+\rangle$和基态$|-\rangle$的叠加态,即

$$|\Psi\rangle=\cos(\theta/2)|+\rangle+\sin(\theta/2)e^{-i\varphi}|-\rangle \tag{3.2.10}$$

不难得出下列力学量在态$|\Psi\rangle$的期望值:

$$\langle S_1\rangle=\langle\Psi|\frac{S_++S_-}{2}|\Psi\rangle=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\psi \qquad (3.2.11a)$$

$$\langle S_2\rangle=\frac{1}{2}\sin\theta\sin\psi \qquad (3.2.11b)$$

$$\langle S_3\rangle=\frac{1}{2}\cos\theta \qquad (3.2.11c)$$

$$\langle S_1^2\rangle=1/4 \qquad (3.2.11d)$$

$$\langle S_2^2\rangle=1/4 \qquad (3.2.11e)$$

相应地，算符 S_1,S_2 的量子涨落分别为

$$(\Delta S_1)^2=\langle S_1^2\rangle-\langle S_1\rangle^2=\frac{1}{4}(1-\sin^2\theta\cos^2\psi) \qquad (3.2.12)$$

$$(\Delta S_2)^2=\frac{1}{4}(1-\sin^2\theta\sin^2\psi) \qquad (3.2.13)$$

它们满足海森伯不确定关系(3.2.7)式. 应该指出的是，当 $\psi=0$, $\pi/2$, $3\pi/2$, π 时，(3.2.7)式取等号，即

$$(\Delta S_1)^2(\Delta S_2)^2=\frac{1}{4}|\langle S_3\rangle| \qquad (3.2.14)$$

这表明，在 $\psi=k\pi/2$ $(k=0,1,2,3)$时，由(3.2.10)式描述的原子叠加态是原子算符的最小不确定态.

将(3.2.11c)，(3.2.12)和(3.2.13)式一并代入(3.2.9)式，得到

$$F_1=\frac{1}{4}(1-\sin^2\theta\cos^2\psi)-\frac{1}{4}|\cos\theta| \qquad (3.2.15)$$

$$F_2=\frac{1}{4}(1-\sin^2\theta\sin^2\psi)-\frac{1}{4}|\cos\theta| \qquad (3.2.16)$$

从上面两式看到，当 $\psi=0,\pi$ 时，$F_2\geqslant 0$，即原子偶极矩 S_2 分量的涨落不能被压缩，但 F_1 则可能小于零；而当 $\psi=\pi/2,3\pi/2$ 时，$F_1\geqslant$

0，这表明原子偶极矩 S_1 分量的涨落不能被压缩，但 F_2 则可能小于零. 上述两种情况下，F_1、F_2 的值由 θ 确定，它们满足

$$F_1(\psi=0,\pi)=F_2(\psi=\pi/2,3\pi/2)=\frac{1}{4}(\cos^2\theta-|\cos\theta|)$$

(3.2.17)

可以看到，对于 $\psi=0,\pi$ 的情况，当 $\theta\neq 0,\pi/2,\pi,3\pi/2$ 时，$F_1<0$.

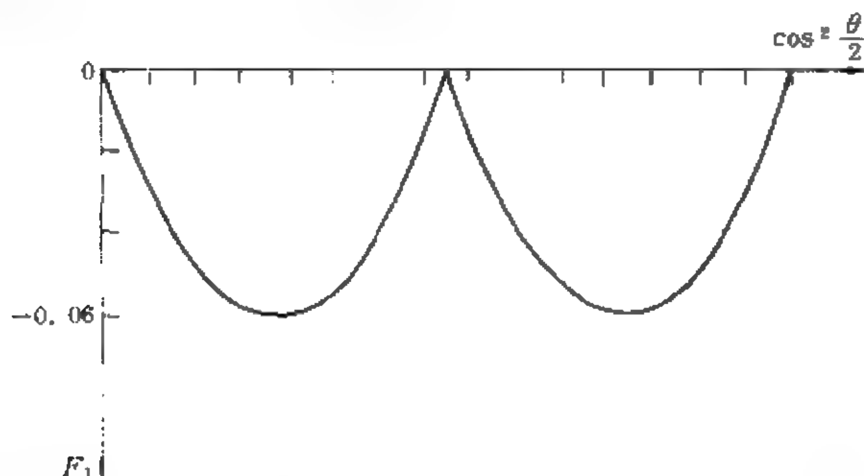


图 3.2.1　F_1 对 $\cos^2(\theta/2)$ 的依赖关系

也就是说此时原子算符 S_1 分量的涨落被压缩，通常把此时原子所处的态 $|\Psi\rangle$ 称为原子压缩态. 图 3.2.1 给出了 F_1 与 $\cos^2(\theta/2)$ 的依赖关系，从图中可以看到，在 $\cos^2(\theta/2)=1/4$ 和 $3/4$（即 $\theta=\pi/3$，$2\pi/3$，$4\pi/3$，$5\pi/3$）时，S_1 分量呈现出最佳压缩. 但当 $\cos^2(\theta/2)=0$，1 和 1/2（即 $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$）时，$F_1=0$，这表明处在基态、激发态以及这两种态的等概率叠加态

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+e^{-i\varphi}|-\rangle) \tag{3.2.18}$$

的原子，它的偶极矩 S_1 分量的涨落都不能被压缩.

对于 $\psi=\pi/2,3\pi/2$ 的情况，原子偶极压缩在 S_2 分量上有相似的表现.

值得指出的是，在第二篇第二章中，我们在研究单光子 J-C 模

型中光场涨落的压缩时曾得知，若原子初始处在由(3.2.10)式描述的态$|\Psi\rangle$，则它与真空辐射场$|0\rangle$发生作用后，将在$t=\pi/(2g)$时刻辐射出处于压缩态的光场，即

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t=\pi/(2g))\rangle = & -i[\cos(\theta/2)|1\rangle \\
& +\sin(\theta/2)e^{i(-\phi+\pi/2)}|0\rangle]\otimes|-\rangle
\end{aligned}
\tag{3.2.19}
$$

这里的结果表明，原子初始时所处的态$|\Psi\rangle$[(3.2.10)式]是原子算符的压缩态. 这就是说，处于压缩态的原子可能辐射出具有重要应用前景的压缩光场. 因此，从这种意义上讲，研究原子算符的压缩效应不仅对抑制原子噪声有着重要意义，而且还对压缩光场的获得具有重要的意义.

第二节　双光子 J-C 模型中原子算符的压缩效应

上面我们讨论了原子算符的压缩与原子初始状态的关系，为进一步弄清原子算符压缩的产生机制，我们来讨论双光子 J-C 模型中原子偶极矩 $S_i(i=1,2)$分量的涨落与原子初态以及光场初态间的关系.

我们知道，描述一个二能级原子与单模光场通过双光子跃迁过程相互耦合系统的哈密顿量，在旋波近似下可表为

$$H=H_1+H_2 \tag{3.2.20}$$

式中

$$H_1=\omega(a^+a+2S_3)\ (\hbar=1) \tag{3.2.21}$$

$$H_2=(\omega_0-2\omega)S_3+\varepsilon(S_+a^2+a^{+2}S_-) \tag{3.2.22}$$

由于 H_1 与 H_2 之间满足

$$[H_1,H_2]=0 \tag{3.2.23}$$

因此系统的时间演化算符 $U(t)$可以表示为

$$U(t)=\exp(-iHt)=U_1(t)\,U_2(t) \tag{3.2.24}$$

这里

$$U_1(t)=\exp(-iH_1t) \tag{3.2.25}$$

$$U_2(t)=\exp(-iH_2t) \tag{3.2.26}$$

在二能级原子的本征态矢集 $|+\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $|-\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 表象中，不难得到

$$U_1(t)=\begin{bmatrix} e^{-i(a^{\dagger}a+1)\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i(a^{\dagger}a-1)\omega t}\end{bmatrix} \tag{3.2.27}$$

$$U_2(t)=\begin{bmatrix} \cos At-i\dfrac{\Delta\sin AT}{2A} & -i\varepsilon a^2\dfrac{\sin Bt}{B} \\ -i\varepsilon a^{\dagger 2}\dfrac{\sin At}{A} & \cos Bt-i\dfrac{\Delta\sin Bt}{2B}\end{bmatrix} \tag{3.2.28}$$

其中

$$A=[(\Delta/2)^2+\varepsilon^2a^2a^{\dagger 2}]^{1/2}$$
$$B=[(\Delta/2)^2-\varepsilon^2a^{\dagger 2}a^2]^{1/2}$$
$$\Delta=\omega_0-2\omega$$

假设原子初始时刻处在如(3.2.10)式描述的基态和激发态的叠加态，即

$$|\Psi_A\rangle=\cos(\theta/2)|+\rangle+\sin(\theta/2)e^{-i\phi}|-\rangle=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\phi}\end{bmatrix} \tag{3.2.29}$$

而光场处在粒子数态的叠加态，即

$$|\Psi_F(0)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}f_n|n\rangle \tag{3.2.30}$$

那么初始时系统(原子＋光场)则处在态

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n f_n \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2}|n\rangle \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi}|n\rangle \end{bmatrix} \tag{3.2.31}$$

随着时间的演化，t 时刻系统的态矢为

$$|\Psi(t)\rangle = e^{iHt}|\Psi(0)\rangle = U_1(t)U_2(t)\begin{bmatrix} \sum\limits_n f_n\cos\dfrac{\theta}{2}|n\rangle \\ \sum\limits_n f_n\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi}|n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.2.32}$$

直接的演算给出

$$\psi_1 = \cos(\theta/2)\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-i(n+1)\omega t}\left[\cos\Omega_n^+ t - i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega_n^+ t}{\Omega_n^+}\right]|n\rangle$$
$$-i\sin(\theta/2)e^{-i\varphi}\sum_{n=2}^{\infty} f_n e^{-i(n-1)\omega t}\varepsilon[(n-2)(n-1)]^{1/2}\frac{\sin\Omega_n^- t}{\Omega_n^-}|n-2\rangle \tag{3.2.33}$$

$$\psi_2 = \sin(\theta/2)e^{-i\varphi}\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-i(n-1)\omega t}\left[\cos\Omega_n^+ t + i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega_n^- t}{\Omega_n^-}\right]|n\rangle$$
$$-i\cos(\theta/2)\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{i(n-1)\omega t}\varepsilon[(n+2)(n+1)]^{1/2}\frac{\sin\Omega_n^+ t}{\Omega_n^+}|n+2\rangle \tag{3.2.34}$$

$$\Omega_n^+ = [(\Delta/2)^2+\varepsilon^2(n+2)(n+1)]^{1/2};\ \Omega_n^- = [(\Delta/2)^2+\varepsilon^2(n-1)n]^{1/2} \tag{3.2.35}$$

这样，我们就给出了系统的态矢在 t 时刻的一般表达式. 对于不同的初态，参量 θ、φ、f_n 均不同，因而我们可进一步考察不同的原子初态和不同的光场初态对原子算符压缩效应的影响.

一、真空态光场作用下原子算符的压缩

由于在实际探测过程中，尽管使用相位灵敏探测器，也不能响

应快速振荡的原子频率，探测器只能响应缓慢变化的包络振幅．为和实际测量相对应，与讨论光场压缩效应采用的算符相似，我们定义两个缓变的原子偶极矩分量振幅算符：

$$
\begin{aligned}
S_1&=[S_+\exp(-i\omega_0 t)+S_-\exp(i\omega_0 t)]/2\\
S_2&=[S_+\exp(-i\omega_0 t)-S_-\exp(i\omega_0 t)]/2i
\end{aligned}
\qquad (3.2.36)
$$

它们满足对易关系：

$$[S_1,S_2]=iS_3$$

相应地，海森伯不确定关系为

$$(\Delta S_1)^2(\Delta S_2)^2\geqslant\frac{1}{4}|\langle S_3\rangle|^2$$

若原子算符有压缩效应存在，则要求

$$(\Delta S_i)^2<\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle|\ \ (i=1\text{ 或 }2) \qquad (3.2.37)$$

或者

$$F_i=(\Delta S_i)^2-\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle|<0\ \ (i=1\text{ 或 }2) \qquad (3.2.38)$$

现假定初始时光场处在真空态$|0\rangle$，而原子处在由(3.2.29)式描述的叠加态，即系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}|0\rangle\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\phi}|0\rangle\end{bmatrix} \qquad (3.2.39)$$

在这种情况下，t 时刻的态矢(3.2.32)式简化为

$$|\Psi(t)\rangle=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\omega t}\cos(\sqrt{2}\varepsilon t)|0\rangle\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\phi}e^{i\omega t}|0\rangle-i\cos\dfrac{\theta}{2}\sin(\sqrt{2}\varepsilon t)e^{-i\omega t}|2\rangle\end{bmatrix}$$

(3.2.40)

这里已令 $\Delta=0$，即 $\omega_0=2\omega$. 此时，原子算符 $S_i(i=1,2)$ 及 $S_i^2(i=1,2)$ 的期望值为

$$\langle S_1\rangle=\langle\Psi(t)|\frac{S_+e^{-i2\omega t}+S_-e^{i2\omega t}}{2}|\Psi(t)\rangle=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\psi\cos(\sqrt{2}\,\varepsilon t)\tag{3.2.41}$$

$$\langle S_2\rangle=\frac{1}{2}\sin\theta\sin\psi\cos(\sqrt{2}\,\varepsilon t)\tag{3.2.42}$$

$$\langle S_3\rangle=\cos^2(\theta/2)\cos^2(\sqrt{2}\,\omega t)-1/2\tag{3.2.43}$$

$$\langle S_i\rangle^2=1/4\quad(i=1,2)\tag{3.2.44}$$

将(3.2.41)—(3.2.44)式一并代入(3.2.38)式，得到反映原子算符压缩效应的函数 $F_i(i=1,2)$ 分别为

$$F_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos^2\psi\cos^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t)-\frac{1}{2}|\cos^2(\theta/2)\cos^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t)-1/2|\tag{3.2.45}$$

$$F_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin^2\psi\cos^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t)-\frac{1}{2}|\cos^2(\theta/2)\cos^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t)-1/2|\tag{3.2.46}$$

同前面的讨论一样，这里我们选取 $\psi=0$，在这种情况下，$F_2\geqslant 0$，即 S_2 的涨落不可能被压缩. 但 F_1 可以小于零，所以下面我们来讨论 F_1 随 θ 和 t 的变化. 在 $\psi=0$ 时，(3.2.45)式化为

$$F_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t)-\frac{1}{2}|\cos^2(\theta/2)\cos^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t)-1/2|\tag{3.2.47}$$

当 $\cos^2(\theta/2)<1/2$ 时，F_1 满足

$$F_1=-[1/2-\cos^2(\theta/2)]\cos^2(\theta/2)\cos^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t)\leqslant 0\tag{3.2.48}$$

上式在 $t=\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\pi=t_k(k=0,1,2,\cdots)$ 时刻取等号. 这说明原子

偶极矩的 S_1 分量的涨落在整个时间演化过程中，除 $t=t_k$ 点以外，均处于压缩状态，且压缩大小以拉比频率 $2\sqrt{2}\epsilon$ 随 t 振荡. 同时(3.2.48)式还给出了 S_1 为最大压缩的时间演化：

$$F_1\big|_{\cos^2\frac{\theta}{2}=1} = -\frac{[illegible]}{16}\cos^2(\sqrt{2}\,\epsilon t) \qquad (3.2.49)$$

最大压缩的时间点为

$$t_m = \frac{k\pi}{\sqrt{2}\,\epsilon}\ (k=0,1,2,\cdots) \qquad (3.2.50)$$

如图 3.2.2 所示.

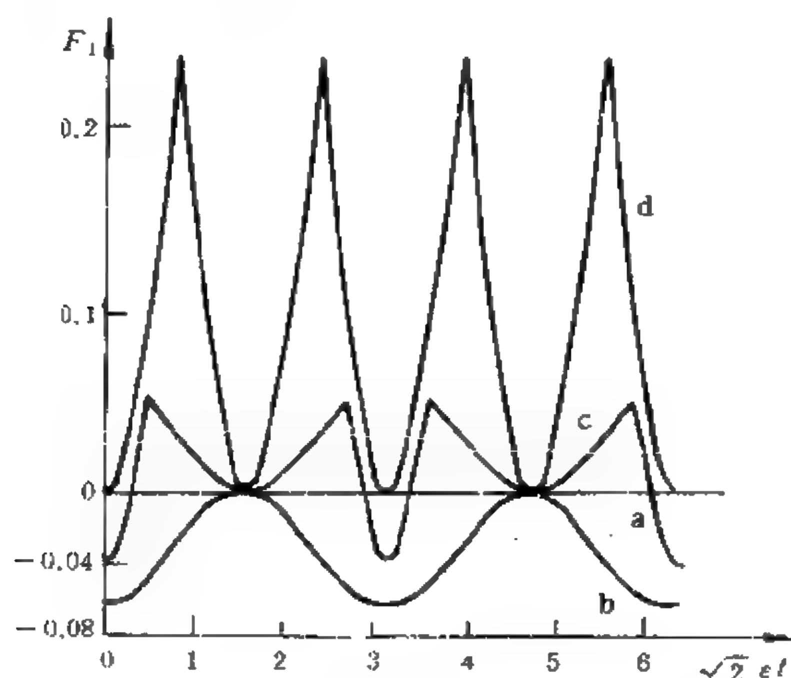


图 3.2.2 $\phi=0$ 时 F_1 随时间的演化规律

(a) $\cos^2(\theta/2)=0$；(b) $\cos^2(\theta/2)=0.25$；

(c) $\cos^2(\theta/2)=0.6$；(d) $\cos^2(\theta/2)=1$

当$\cos^2(\theta/2)>1/2$时，不难看出，只有在$\cos^2(\theta/2)\cos^2(\sqrt{2}\,\epsilon t)>1/2$ 时，F_1 才可能小于零. 在这种情况下，F_1 变为

$$F_1=1/2-\cos^2(\theta/2)[3/2-\cos^2(\theta/2)]\cos^2(\sqrt{2}\,\epsilon t) \qquad (3.2.51)$$

此时只有当 t 满足

$$0\leqslant t<\frac{t_c}{\varepsilon\sqrt{2}}$$

或

$$\frac{k\pi-t_c}{\varepsilon\sqrt{2}}<t<\frac{k\pi+t_c}{\varepsilon\sqrt{2}}\ (k=0,1,2,\cdots)$$

$$t_c=\arccos\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{3}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

时，$F_1<0$. 可见，原子偶极矩 S_1 分量的压缩在 $\cos^2(\theta/2)>1/2$ 情况下是周期性出现的，其周期为 $T=\frac{\pi}{\varepsilon\sqrt{2}}$. 这就是说，在原子拉比振荡的每个周期内，$S_1$ 分量的涨落将被压缩一次，每次持续的时间为 $2t_c$. 同样，(3.2.51)式也可给出最大压缩随时间的演化规律：

$$F_1\big|_{\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}}=1/2-\frac{9}{16}\cos^2\sqrt{2}\varepsilon t \qquad (3.2.52)$$

$$0\leqslant t<\arccos\sqrt{\frac{8}{9}}/\sqrt{2}\varepsilon$$

或

$$k\pi-\arccos\sqrt{\frac{8}{9}}<\sqrt{2}\varepsilon t<k\pi+\arccos\sqrt{\frac{8}{9}}\ (k=1,2,\cdots)$$

出现最大压缩的时间点为

$$t_m=\frac{k\pi}{\sqrt{2}\varepsilon}\ (k=0,1,2,\cdots)$$

如图 3.2.3 所示.

图 3.2.3 给出了在 $\cos^2(\theta/2)=0.25$ 时，F_1 随 ϕ 的变化规律. 我们看到，对于不同的 ϕ 值，F_1 的值明显不同. 当 $\phi=0,\pi/6$ 时，$F_1<0$；而当 $\phi=\pi/3$ 时，原子算符 S_1 分量几乎不出现压缩；当 $\phi=\pi/2$ 时，就完全不出现压缩. 这说明处于叠加态的原子在与真空场发

生双光子作用时，原子算符的压缩不仅依赖于决定概率幅值的角度 θ，而且还依赖于相位角 ψ.

值得指出的是，当 $\cos^2(\theta/2)=0$ 或 $\sin^2(\theta/2)=0$ 时，从(3.2.45)和(3.2.46)式看到，F_1，F_2 均不小于零. 这就是说，处于基态$[\sin(\theta/2)=0]$或激发态$[\cos(\theta/2)=0]$的原子，在与真空场作用时，均不出现原子算符的压缩现象. 由于原子的自发发射是处于激发态的原子受到真空场的作用导致的，因此我们看到，原子的自发发射不仅不会辐射出压缩光场，而且也不会导致偶极压缩效应.

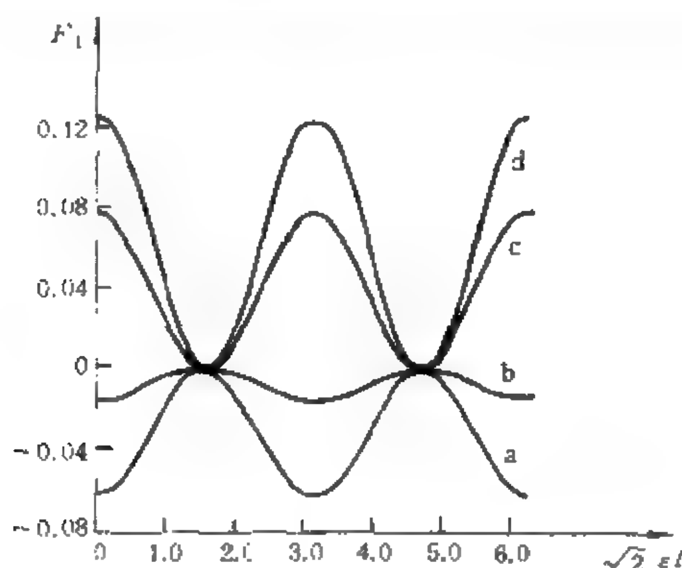


图 3.2.3 当 $\cos^2(\theta/2)=0.25$ 时，F_1 随时间的演化

(a) $\psi=0$；(b) $\psi=\pi/6$；

(c) $\psi=\pi/3$；(d) $\psi=\pi/2$

另外，从(3.2.40)式还可以看到，当 $t_0=\dfrac{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\pi$ $(k=0,1,2,\cdots)$时，$|\Psi(t)\rangle$变为

$$|\Psi(t_0)\rangle=\begin{bmatrix}0\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\psi}e^{i\omega t_0}|0\rangle-i\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\omega t_0}|2\rangle\end{bmatrix}$$

$$=-i\exp(-i\omega t_0)[\cos(\theta/2)|2\rangle+\sin(\theta/2)\times\exp(2i\omega t_0)e^{i(\pi/2-\psi)}|0\rangle]\otimes|-\rangle \quad (3.2.53)$$

应用与第二篇第二章第一节相同的方法可以证明，处在态矢

$$|\Psi_{\mathrm{F}}\rangle=\cos(\theta/2)|2\rangle+\sin(\theta/2)\exp(i\psi')|0\rangle \quad (3.2.54)$$

的光场是压缩光场. 这就是说，同单光子 J-C 模型一样，在双光子 J-C 模型中，初始处在压缩态的原子在真空光场作用下，会自发地衰变到基态，在此过程中将辐射出压缩光场.

二、叠加态光场作用下原子算符的压缩

上面的讨论已证明，初始时处在基态的原子在与单模真空场作用时不会出现原子算符的压缩效应，那么如果初始光场处在叠加态：

$$|\Psi_{\mathrm{F}}\rangle=\cos(\eta/2)|0\rangle+\sin(\eta/2)e^{-i\zeta}|2\rangle \quad (3.2.55)$$

原子偶极矩 $S_i(i=1$ 或 $2)$分量的涨落能否被压缩呢？下面就来回答这个问题.

在这种情况下，系统的初始状态为

$$|\Psi(0)\rangle=\begin{bmatrix}0\\ \cos\frac{\eta}{2}|0\rangle+\sin\frac{\eta}{2}e^{-i\zeta}|2\rangle\end{bmatrix}$$

由(3.2.32)式知，t 时刻系统的态矢为

$$|\Psi(t)\rangle=\begin{bmatrix}-i\sin\frac{\eta}{2}e^{-i\zeta}e^{-i\omega t}\sin(\sqrt{2}\,\varepsilon t)|0\rangle\\ \cos\frac{\eta}{2}e^{i\omega t}|0\rangle+\sin\frac{\eta}{2}e^{-i\zeta}e^{-i\omega t}\cos(\sqrt{2}\,\varepsilon t)\end{bmatrix} \quad (3.2.56)$$

这里也只考虑双光子共振情况，即 $\Delta=0$，依据 $|\Psi(t)\rangle$[(3.2.56)式]可以计算，原子算符 $S_i(i=1,2,3)$的期望值分别为

$$\langle S_1\rangle=\frac{1}{2}\sin\eta\sin(\sqrt{2}\,\varepsilon t)\sin\zeta$$

$$\langle S_2\rangle=\frac{1}{2}\sin\eta\sin(\sqrt{2}\,\varepsilon t)\cos\zeta$$

$$\langle S_3\rangle=\sin^2(\eta/2)\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t)-1/2 \tag{3.2.57}$$

将(3.2.57)式代入(3.2.38)式，得到

$$F_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\eta\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t)\sin^2\zeta$$
$$-\frac{1}{2}|\sin^2(\eta/2)\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t)-1/2| \tag{3.2.58a}$$

$$F_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\eta\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t)\cos^2\zeta$$
$$-\frac{1}{2}|\sin^2(\eta/2)\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t)-1/2| \tag{3.2.58b}$$

很显然，当 $\zeta=0,\pi$ 时，$F_1\geqslant 0$，这意味着原子算符的 S_1 分量的涨落不会被压缩；而当 $\zeta=\pi/2,3\pi/2$ 时，$F_2\geqslant 0$，即原子算符的 S_2 分量不会出现压缩效应. 为讨论简单起见，这里只考察 $\zeta=0$ 的情形. 相应地 F_2 化为

$$F_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\eta\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t)-\frac{1}{2}|\sin^2(\eta/2)\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t)-1/2| \tag{3.2.59}$$

同前面一样的讨论可以看到，当 $\sin^2(\eta/2)<1/2$ 时，F_2 在 $t\neq\frac{k\pi}{\sqrt{2}\varepsilon}$ $(k=0,1,\cdots)$的时间点是恒小于零的，亦即原子偶极矩的 S_2 分量在整个时间演化过程中，基本上处于压缩状态. 同时在 $\sin^2(\eta/2)=1/4$ 时，(3.2.59)式还给出 S_2 最大压缩的演化规律

$$F_2=-\frac{1}{16}\sin^2(\sqrt{2}\varepsilon t) \tag{3.2.60}$$

和最佳压缩时间点 $t_m=\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\varepsilon}\pi$ $(k=0,1,2,\cdots)$，如图 3.2.4(b)所示.

当 $\sin^2(\eta/2)>1/2$ 时，从(3.2.59)式中可知，S_2 分量出现压缩的时间区域为

$$k\pi+t_s<\sqrt{2}\varepsilon t<(k+1)\pi-t_s \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{3.2.61}$$

这里 $t_s=\arcsin\left[\left(3/2-\sin^2\frac{\eta}{2}\right)\sin^2\frac{\eta}{2}\right]^{-1/2}$，并且在 $\sin^2(\eta/2)=3/4$ 时，F_2 将有极小值，即 S_2 可最大限度地被压缩，此时 F_2 随时间的演化规律为

$$F_2=1/2-\frac{9}{16}\sin^2(\sqrt{2}\,\varepsilon t) \qquad (3.2.62)$$

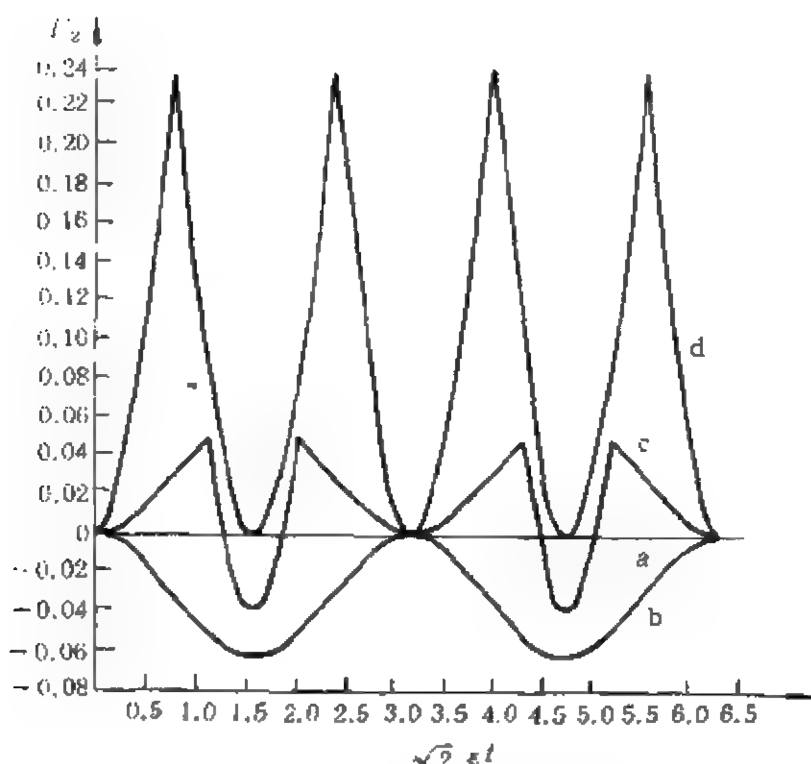


图 3.2.4 $\zeta=0$ 时，F_2 随时间的演化

(a) $\sin^2(\eta/2)=0$；(b) $\sin^2(\eta/2)=0.25$；

(c) $\sin^2(\eta/2)=0.6$；(d) $\sin^2(\eta/2)=1$

图 3.2.4 和图 3.2.5 给出了不同的 η、ζ 条件下，F_2 随时间的演化规律. 显然，初始处于基态的原子在与处于真空态 $|0\rangle$ 和双光子数态 $|2\rangle$ 的相干叠加态光场的相互作用过程中，原子算符的压缩效应依赖于决定概率幅值的 η 以及相位角 ζ.

另外，从(3.2.59)式还可看到，当 $\sin(\eta/2)=0$ 或 $\cos(\eta/2)=0$ 时，即初始光场处在粒子数态 $|2\rangle$ 或者真空态 $|0\rangle$，而不是它们的

叠加态时，原子算符不出现压缩效应.

归纳以上所讨论的两种情况，即初始处于叠加态的原子与真空光场的相互作用系统，以及初时处在基态的原子与叠加态光场的相互作用系统两种情况，我们看到，在光与原子相互作用系统中，原子算符的压缩只出现在系统的初始状态为态矢集$\{|+,n\rangle, |-,n\rangle\}$的相干叠加态的情形，而初始处在单纯态$|+,n\rangle$或$|-,n\rangle$ $(n=0,1,2,\cdots)$的系统，原子算符不会呈现出压缩效应.

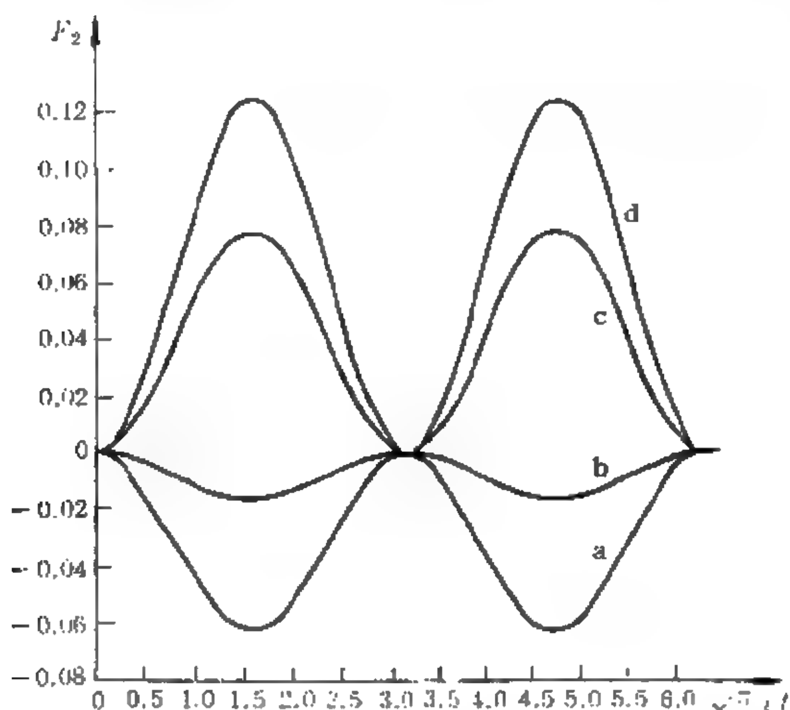


图 3.2.5 $\sin^2(\eta/2)=0.25$ 时，F_2 随时间的演化

(a) $\zeta=0$；(b) $\zeta=\pi/6$；

(c) $\zeta=\pi/3$；(d) $\zeta=\pi/2$

值得指出的是，从(3.2.56)式还可看到，当时间演化到半个拉比振荡周期时，系统的态矢演化为

$$|\Psi\left(t_0=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\epsilon}\right)\rangle=\begin{bmatrix}-i\sin\frac{\eta}{2}e^{-i\zeta}e^{-i\omega t_0}|0\rangle\\ \cos\frac{\eta}{2}e^{i\omega t_0}|0\rangle\end{bmatrix}$$

$$= -i\exp[-i(\omega t_0 - \zeta)][\cos\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)e^{i(2\omega t_0+\zeta-\frac{\pi}{2})}|-\rangle]$$

(3.2.63)

可见，此时光场处在真空态，而原子处在叠加态

$$\cos\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)e^{i(2\omega t_0+\zeta-\frac{\pi}{2})}|-\rangle \quad (3.2.64)$$

很明显它也是(3.2.10)式所示的原子算符压缩态．由于(3.2.56)式描述的初态是光场的压缩态，因此我们看到，在光场-原子相互作用系统中，不仅处于压缩态的原子能够辐射出压缩光场，而且压缩光场也可以诱导原子演化到原子偶极压缩态．

三、相干光场作用下原子算符的压缩

上面的结果表明，一个处于基态的原子在与初始时为压缩态的光场[由(3.2.55)式描述]相互作用时，原子算符可展现压缩效应．那么初始光场处于相干态时，情况又会怎样呢？

现在来考虑原子初始时处于基态$|-\rangle$，而光场处于相干态$|\alpha\rangle$的情况，并且假定二能级原子的本征跃迁频率ω_0与光场频率ω满足双光子共振条件：$\omega_0=2\omega$．在这种情况下，系统在t时刻的态矢由(3.2.32)式表示为

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{bmatrix} -ie^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i(n-1)\omega t}\sin\varepsilon\sqrt{n(n-1)}t|n-2\rangle \\ e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i(n-1)\omega t}\cos\varepsilon\sqrt{n(n-1)}t|n\rangle \end{bmatrix}$$

(3.2.65)

原子算符$S_i(i=1,2,3)$在态$|\Psi(t)\rangle$中的期望值为

$$\langle S_1\rangle = -\exp(-\bar{n})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+1}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}}\sin\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}t$$

$$\times\cos\varepsilon\sqrt{n(n-1)}t\sin\phi$$

$$\langle S_2\rangle = \exp(-\bar{n})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n+1}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}}\sin\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}t$$

$$\times \cos\varepsilon\sqrt{n(n-1)}t\cos\psi \tag{3.2.66}$$

$$\langle S_3\rangle = -\frac{1}{2}\exp(-\bar{n})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^n}{n!}\cos(2\varepsilon\sqrt{n(n-1)}t)$$

式中已令 $\alpha=|\alpha|e^{i\psi}$. 将(3.2.66)式代入(3.2.45)式，即得描述原子偶极矩 $S_i(i=1,2)$分量涨落的压缩程度的函数 F_i：

$$F_i=\frac{1}{4}-\langle S_i\rangle^2-\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle| \quad (i=1,2) \tag{3.2.67}$$

从上式出发，可以分析在初始相干光场作用下，原子算符是否存在压缩效应. 由于 F_i 的表达式比较复杂，不易直接看出 F_i 随 t 的演化规律，因此需借助数值解. 为讨论方便起见，我们取 $\psi=0$. 这时 $F_1\geqslant 0$，这表明原子偶极矩的 S_1 分量的涨落不会被压缩. 但在一定的时间范围内，F_2 可以小于零，如图 3.2.6 所示，这就是说，原子偶极矩 S_2 分量的涨落被压缩了. 进一步的研究可以发现，当光场平均光子数 $\bar{n}$ 较小时[如图 3.2.6 (a)所示]，原子算符 S_2 的压缩的出现是没有规律的，但当 $\bar{n}$ 较大时[如图 3.2.6(b)，(c)所示]，压缩现象周期性地出现，并且出现在原子粒子布居差$\langle S_3\rangle$的崩塌区域内. 而且随着 $\bar{n}$ 的增大，算符 S_2 涨落的首次压缩持续的时间变短. 原子偶极压缩与 $\bar{n}$ 的依赖关系可以这样来理解，因为在 $\bar{n}$ 较大时，原子的粒子布居差$\langle S_3\rangle$呈现出明显的周期性的崩塌-回复现象. 在$\langle S_3\rangle=0$ 的时间区域，原子的各种拉比频率失去相位关联，原子偶极矩的噪声较大，因而在这一时间区域不可能出现压缩现象. 但在 $t=kT_R(k=0,1,2,\cdots)$的时间邻域内，$\langle S_3\rangle$中各种频率的拉比振荡具有较强的相位关联，使得干涉效应较强，导致在时间点 $t=kT_R$的领域内原子偶极矩 S_2 分量的噪声得到抑制，从而原子算符展现出明显的压缩现象. 此外，由于$\langle S_3\rangle$的崩塌时间为 $t_c=\dfrac{1}{\sqrt{2\bar{n}}\varepsilon}$，因而随着平均光子数 $\bar{n}$ 的增大，$\langle S_3\rangle$中拉比振荡的相位关联时间缩短，从而使得在 $\bar{n}$ 增大时，原子算符 S_2 分量初次压缩的时间变短.

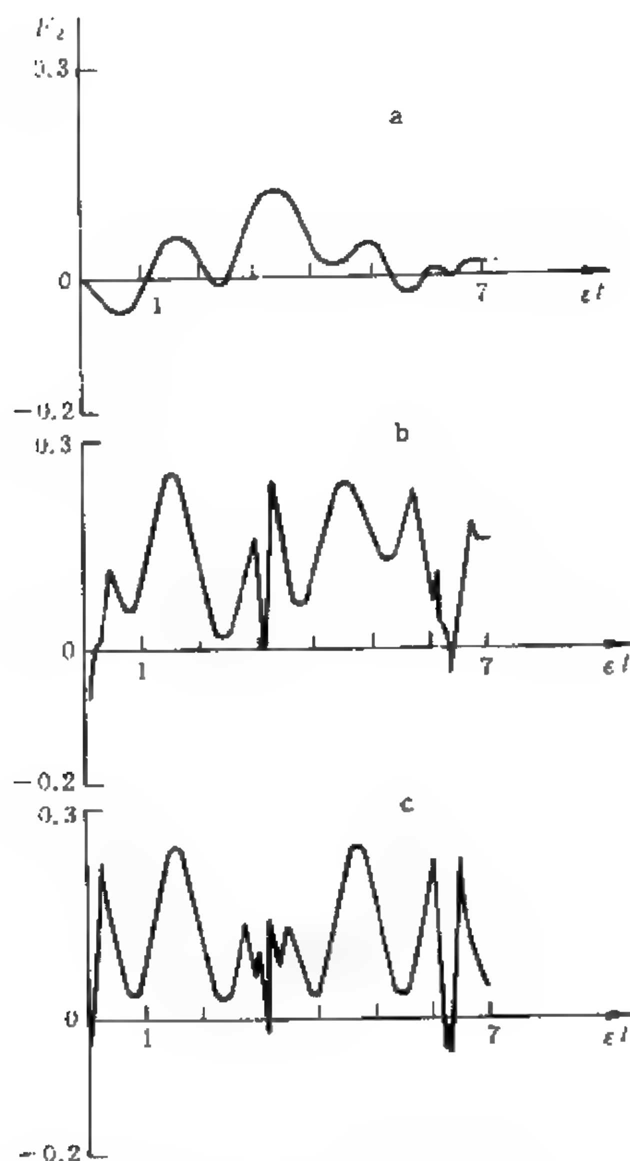


图 3.2.6 F_2 随时间的演化

(a) $\bar{n}=1$; (b) $\bar{n}=5$; (c) $\bar{n}=10$

第三节 单原子共振荧光系统中原子算符的压缩效应

二能级原子的共振荧光体系也是描述光场与原子相互作用的典型系统,那么在这样的系统中,原子算符是否也会呈现压缩效应

呢?下面我们应用第二篇第三章中的密度矩阵理论,来探讨单原子共振荧光系统中原子算符的压缩效应.

为直接利用第二篇第三章里的一些结果,这里我们先把原子算符 S_+,S_-,S_3 变换到修饰原子表象,即令

$$S_+=|+\rangle\langle-|=\frac{1}{2}(|2\rangle+|1\rangle)(\langle 2|-\langle 1|)$$

$$=\frac{1}{2}(|2\rangle\langle 2|-|1\rangle\langle 1|-|2\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 2|) \tag{3.2.68}$$

$$S_-=\frac{1}{2}(|2\rangle\langle 2|-|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 2|) \tag{3.2.69}$$

$$S_3=\frac{1}{2}(|2\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 2|) \tag{3.2.70}$$

这里的态矢 $|2\rangle$,$|1\rangle$ 是原子修饰态[由(2.3.166)式描述],$|+\rangle$,$|-\rangle$ 代表裸原子的激发态和基态.由于第二章第三节中的密度矩阵是在相互作用绘景中求得的,因此这里还需将原子算符 $S_i(i=1,2,3)$ 变换到相互作用绘景中去,即

$$\begin{aligned} S_1^I&=\frac{1}{2}(S_++S_-)\\ S_2^I&=\frac{1}{2i}(S_+-S_-)\\ S_3^I&=S_3 \end{aligned} \tag{3.2.71}$$

再应用已知的密度算符 ρ[(2.3.168)式],则得到在原子的修饰态表象中,$S_i(i=1,2,3)$ 及 $S_i^2(i=1,2,3)$ 的期望值分别为

$$\langle S_1\rangle=\mathrm{Tr}\rho S_1^I=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\rho(S_++S_-)=\frac{1}{2}(\rho_{22}-\rho_{11})=\tilde{\rho}_2(t) \tag{3.2.72}$$

$$\langle S_2\rangle=\mathrm{Tr}\rho S_2^I=\frac{1}{2i}\mathrm{Tr}\rho(S_+-S_-)=\frac{1}{2i}(\rho_{21}-\rho_{12})=-i\tilde{\rho}_4(t) \tag{3.2.73}$$

$$\langle S_3\rangle=\mathrm{Tr}\rho S_3=\frac{1}{2}(\rho_{22}-\rho_{11})=\tilde{\rho}_3(t) \tag{3.2.74}$$

$$\langle S_1^2\rangle=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\rho(|2\rangle\langle 2|+|1\rangle\langle 1|)=1/4 \tag{3.2.75}$$

$$\langle S_2^2\rangle=1/4 \tag{3.2.76}$$

利用(2.3.185)式,即可讨论描述原子算符是否压缩的函数 $F_i(t)$ 随参数 Ω,Γ 及 t 的变化规律.

由于在共振荧光体系中我们关心的是稳态情况下的性质,因此下面只讨论 $t\to\infty$ 时 F_i 的性质. 在 $t\to\infty$ 时,由(2.3.185)式可知

$$\tilde{\rho}_2(\infty)=0$$

$$\tilde{\rho}_3(\infty)=-\frac{1}{2}\frac{\frac{\Gamma^2}{2}}{4\Omega^2+\frac{\Gamma^2}{2}}$$

$$\tilde{\rho}_4(\infty)=-\frac{i\Omega\Gamma}{4\Omega^2+\frac{\Gamma^2}{2}} \tag{3.2.77}$$

将(3.2.77)式代入(3.2.72)~(3.2.74)式,即得稳态情况下原子算符 S_i 的期望值. 从而

$$F_1=1/4-\langle S_1\rangle^2-\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle|=1/4-\frac{\frac{\Gamma^2}{2}}{4\Omega^2+\frac{\Gamma^2}{2}} \tag{3.2.78}$$

$$F_2=1/4-\langle S_2\rangle^2-\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle|=1/4-\frac{\Omega^2\Gamma^2}{4\Omega^2+\frac{\Gamma^2}{2}}-\frac{1}{4}\frac{\frac{\Gamma^2}{2}}{4\Omega^2+\frac{\Gamma^2}{2}} \tag{3.2.79}$$

从(3.2.78)式可以看到,在 $t\to\infty$ 时,F_1 是一种非负常数,因而原子的 S_1 分量的涨落不会被压缩. 对(3.2.79)式化简可得

$$F_2 = \frac{8\Omega^4 - \Omega^2\Gamma^2}{2\left(4\Omega^2 + \frac{\Gamma^2}{2}\right)^2} \qquad (3.2.80)$$

可见，当 $\Omega^2 < \Gamma^2/8$ 时($\Omega = \varepsilon E$)，$F_2 < 0$，这就是说，原子偶极矩的 S_2 分量在 $\Omega^2 < \Gamma^2/8$ 时可被稳态地压缩. 注意到 Γ 是原子自发发射的速率，这表明原子算符的稳态压缩只出现于激光场不是很强的情形. 从(3.2.80)式还可看到，在共振情况下，当激光场的强度和原子自发发射的速率满足 $\Omega^2 = \Gamma^2/16$ 时，原子算符的 S_2 分量的涨落将会得到稳态压缩的最大值，此时 $F_2 = -1/36$. 前面我们已经得到，处于原子算符压缩态的原子可以辐射出压缩光场，因此对于单原子共振荧光系统，在 $\Omega^2 < \Gamma^2/8$ 时，原子辐射的稳态荧光场将是压缩光场.

参 考 文 献

[1] D. F. Walls and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 709 (1981).
[2] Z. Ficek, R. Tanas and S. Kielich, *Opt. Commun.*, **46**, 23 (1983).
[3] Z. Ficek, R. Tanas and S. Kielich, *J. Opt. Soc. Am.*, **B1**, 882 (1984).
[4] Z. Ficek, R. Tanas and S. Kielich, *Phys. Rev.*, **A29**, 2004 (1984).
[5] S. M. Barnett, *Opt. Commun.*, **61**, 432 (1987).
[6] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, P. L. Buckle and S. M. Barnett, *Phys. Rev.*, **A35**, 2667 (1987).
[7] R. Loudon and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.*, **34**, 709 (1987).
[8] S. M. Barnett and M. A. Dupeetuis, *J. Opt. Sor. Am.*, **B4**, 505 (1987).
[9] X. S. Li, D. L. Lin, T. F. George and Z. D. Lin, *Phys. Rev.*, **A40**, 228 (1989).
[10] 周 鹏、彭金生，物理学报，**38**，2004 (1989).
[11] 周 鹏、彭金生，光学学报，**10**，837 (1990).
[12] 周 鹏、彭金生，*Phys. Rev.*, **A44**, 3331 (1991).
[13] M. H. Mahran, *Phys. Rev.*, **A45**, 5113 (1992).
[14] M. Ashraf and M. S. K. Razmi, *Phys. Rev.*, **A45**, 8121 (1992).
[15] D. Cohen, A. Mann and Y. Ben-Aryeh, *Opt. Commun.*, **99**, 123 (1993).
[16] 李高翔、彭金生，物理学报，**44**，1670 (1995).

第三章　原子的相干捕获

在第一章中，我们证明了与相干光场作用的原子(二能级和三能级)的粒子布居数会展现出崩塌与回复的量子特性，而且在第二篇第六章中我们看到，光场的初始相干性由于原子-光场的耦合将遭到破坏．然而这些结果是假定原子初始时处在基态或激发态这类非相干态得出的，那么如果初始时原子处于相干叠加态的情况又怎样呢？下面我们以与双模光场作用的单个"V"型三能级原子系统为例，考察初始时原子处于相干叠加态情况下，原子粒子布居数随时间的演化．我们首先给出系统态矢随时间演化的表达式，然后讨论光场相位随时间演化的规律，进而分析原子的初始相干性对光场相位涨落和原子粒子布居数的影响，得到了初始处于适当相干态的原子在与光场作用时，随着时间的演化，不仅光场的初始相干性质不会发生变化，而且原子的粒子布居数保持为常数，崩塌-回复现象消失，这种现象称为原子的相干捕获．本章的最后部分，将着重讨论原子相干捕获，分析原子的初始条件对导致原子相干捕获的作用．

第一节　与双模光场作用的三能级原子系统的态矢随时间的演化

现在考虑如图 3.3.1 所示的一"V"型三能级原子与双模光场相互作用的系统．能级$|a\rangle$与$|c\rangle$之间的跃迁与频率为ν_1的光子相联系，能级$|b\rangle$与$|c\rangle$之间的跃迁由频率为ν_2的光子驱动，$|a\rangle$与$|b\rangle$之间的单光子跃迁是电偶极禁戒的．在旋波近似下，系统的哈密顿量可写为

$$H = H_0 + V \tag{3.3.1}$$

式中

$$H_0=\sum_{i=a,b,c}\omega_i|i\rangle\langle i|+\sum_{j=1}^{2}\nu_j a_j^\dagger a_j \quad (\hbar=1) \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}V=&g_1a_1|a\rangle\langle c|+g_1a_1^\dagger|c\rangle\langle a|\\&+g_2a_2|b\rangle\langle c|+g_2a_2^\dagger|c\rangle\langle b|\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

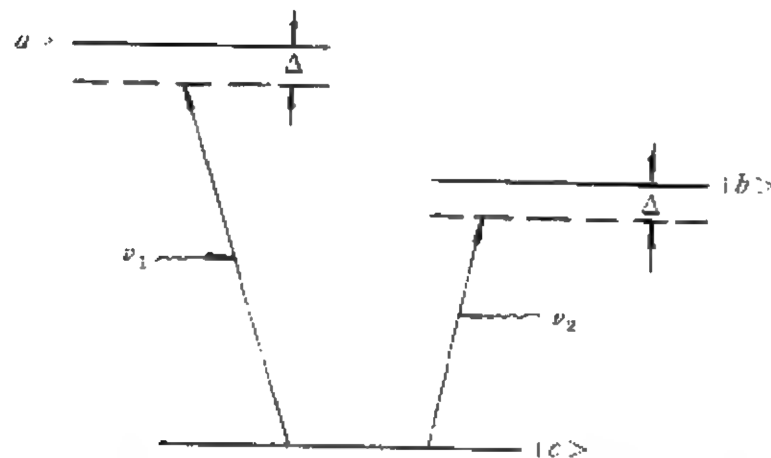


图 3.3.1 "V"型三能级原子与双模光场相互作用系统示意图

这里 ω_i 代表原子第 i 能级的本征频率，a_1，$a_1^\dagger$ 及 a_2，$a_2^\dagger$ 分别代表频率为 ν_1 和 ν_2 的辐射场的湮没算符和产生算符，g_1，g_2 是光场与原子的耦合常数．为计算简单起见，我们假设原子的本征跃迁频率和光场的频率满足双光子共振条件，即 $\Delta=\omega_a-\omega_c-\nu_1=\omega_b-\omega_c-\nu_2$。

在相互作用绘景中，原子-光场耦合系统的态矢一般表达式可以写为

$$\begin{aligned}|\Psi^I(t)\rangle=\sum_{n_1,n_2}[&C_{a,n_1,n_2}(t)|a,n_1,n_2\rangle+C_{b,n_1,n_2}(t)|b,n_1,n_2\rangle\\&+C_{c,n_1,n_2}(t)|c,n_1,n_2\rangle]\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

把(3.3.3)和(3.3.4)式代入相互作用绘景中的薛定谔方程，可得

$$\dot{C}_{a,n_1-1,n_2}(t)=-ig_1\sqrt{n_1}\exp(i\Delta t)C_{c,n_1,n_2}$$

$$\dot{C}_{b,n_1,n_2-1}(t) = -ig_2\sqrt{n_2}\exp(i\Delta t)C_{c,n_1,n_2} \tag{3.3.5}$$

$$\dot{C}_{c,n_1,n_2}(t) = -i(g_1\sqrt{n_1}C_{a,n_1-1,n_2} + g_2\sqrt{n_2}C_{b,n_1,n_2-1})\exp(-i\Delta t)$$

如果令初始时刻原子处在能态$|a\rangle$和$|b\rangle$的相干叠加态：

$$|\Psi_A(0)\rangle = \cos(\theta/2)|a\rangle + \sin(\theta/2)e^{-i\varphi}|b\rangle \tag{3.3.6}$$

辐射场处在态

$$|\Psi_F(0)\rangle = \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} F_{n_1,n_2}|n_1, n_2\rangle \tag{3.3.7}$$

这里F_{n_1,n_2}为双模光场具有n_1个频率为ν_1、n_2个频率为ν_2的光子的概率幅，它满足归一化条件. 那么原子-光场耦合系统的态矢在$t=0$时刻可表示为

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n_1,n_2}[\cos(\theta/2)F_{n_1-1,n_2}|a, n_1-1, n_2\rangle + \sin(\theta/2)e^{-i\varphi}F_{n_1,n_2-1}|b, n_1, n_2-1\rangle] \tag{3.3.8}$$

利用(3.3.8)式，可得方程组(3.3.5)式的解为

$$C_a(t) = -A_1g_1\sqrt{n_1}\left\{\frac{\exp[i(\frac{\Delta}{2}+\beta)t]-1}{\frac{\Delta}{2}+\beta} - \frac{\exp[i(\frac{\Delta}{2}-\beta)t]-1}{\frac{\Delta}{2}-\beta}\right\} + \cos(\theta/2)F_{n_1-1,n_2}$$

$$C_b(t) = -A_1g_2\sqrt{n_2}\left\{\frac{\exp[i(\frac{\Delta}{2}+\beta)t]-1}{\frac{\Delta}{2}+\beta} - \frac{\exp[i(\frac{\Delta}{2}-\beta)t]-1}{\frac{\Delta}{2}-\beta}\right\} + \sin(\theta/2)e^{-i\varphi}F_{n_1,n_2-1} \tag{3.3.9}$$

$$C_c(t) = -A_1\{\exp[-i(\Delta/2-\beta)t] - \exp[-i(\Delta/2+\beta)t]\}$$

这里我们已用简记符号 $C_{a,n_1-1,n_2} \to C_a$，$C_{b,n_1,n_2-1} \to C_b$，$C_{c,n_1,n_2} \to C_c$，并且令

$$A_1 = -\frac{1}{2\beta}\left[g_1\sqrt{n_1}\cos(\theta/2)F_{n_1-1,n_2}\right.$$

$$\left.+ g_2\sqrt{n_2}\sin(\theta/2)\exp(-i\psi)F_{n_1,n_2-1}\right]$$

$$\beta = (\Delta^2/4 + g_1^2 n_1 + g_2^2 n_2)^{1/2}$$

β 是与原子拉比振荡频率有关的参数. 求出了(3.3.4)式中 $C_a(t)$、$C_b(t)$，$C_c(t)$ 的表达式(3.3.9)式以后，我们就求出了 t 时刻系统在相互作用绘景中的态矢，再把它变换到薛定谔绘景中，就得到系统态矢的一般表达式：

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n_1,n_2}\{\exp\{-i[(n_1-1)\nu_1 + n_2\nu_2 + \omega_a]t\}C_a(t)$$

$$\times |a, n_1-1, n_2\rangle + \exp\{-i[n_1\nu_1 + (n_2-1)\nu_2$$

$$+ \omega_b]t\}C_b(t)|b, n_1, n_2-1\rangle + \exp\{-i[n_1\nu_1$$

$$+ n_2\nu_2 + \omega_c]t\}C_c(t)|c, n_1, n_2\rangle\} \qquad (3.3.10)$$

得知系统的态矢(3.3.10)式以后，我们就可以讨论光场的相位随时间的演化规律，进而分析原子初始态对系统性质的影响.

第二节　光场的相位随时间的演化

我们仍利用第一篇第三章给出的由 Pegg 和 Barnett 发展的相位理论来讨论原子-光场耦合系统中，光场相位随时间的演化规律.

对于这里讨论的双模光场，可定义完备和正交的双模光场相位本征态矢为

$$|\theta_{m_1}, \theta_{m_2}\rangle = [(s_1+1)(s_2+1)]^{-1/2}\sum_{m_1=0}^{s_1}\sum_{m_2=0}^{s_2}\exp[i(n_1\theta_{m_1}$$

$$+ n_2\theta_{m_2})]|n_1, n_2\rangle \qquad (3.3.11)$$

这里

$$\theta_{m_i}=\theta_{0_i}+2\pi m_i/(s_i+1)\quad (m_i=0,1,2,\cdots,s_i;\ i=1,2)$$

其中 θ_{0_i} 为一参考相位，$(s_1-1)(s_2+1)$是相位本征态矢集张开的希尔伯特空间的维数．由于 s_1 和 s_2 的值在最后都将趋于无穷大，因此不失一般性可令 $s_1=s_2=s$．那么光场的厄米相位算符可定义为

$$\Phi_i=\sum_{m_1,m_2=0}^{s}\theta_{m_i}\,|\theta_{m_1},\theta_{m_2}\rangle\langle\theta_{m_1},\theta_{m_2}|\quad (i=1,2)\tag{3.3.12}$$

显然，Φ_i 是描述双模光场第 i 模的厄米相位算符，θ_{m_i} 为频率为 ν_i 的光场相位本征态矢 $|\theta_{m_i}\rangle$ 对应的本征值．于是，原子-光场耦合系统的态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 按光场相位本征态展开的表达式可写为

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle=\sum_{m_1,m_2}\{&\langle a,\theta_{m_1},\theta_{m_2}|\Psi(t)\rangle|a,\theta_{m_1},\theta_{m_2}\rangle\\&+\langle b,\theta_{m_1},\theta_{m_2}|\Psi(t)\rangle|b,\theta_{m_1},\theta_{m_2}\rangle\\&+\langle c,\theta_{m_1},\theta_{m_2}|\Psi(t)\rangle|c,\theta_{m_1},\theta_{m_2}\rangle\}\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

这里

$$\begin{aligned}P(\theta_{m_1},\theta_{m_2},t)=&|\langle a,\theta_{m_1},\theta_{m_2}|\Psi(t)\rangle|^2+|\langle b,\theta_{m_1},\theta_{m_2}|\Psi(t)\rangle|^2\\&+|\langle c,\theta_{m_1},\theta_{m_2}|\Psi(t)\rangle|^2\end{aligned}\tag{3.3.14}$$

代表光场相位概率分布函数，因此光场相位算符的期望值为

$$\langle\Phi_1^n\Phi_2^k\rangle=\sum_{m_1,m_2=0}^{s}\theta_{m_1}^n\theta_{m_2}^kP(\theta_{m_1},\theta_{m_2},t)\quad (n,k=0,1,2)\tag{3.3.15}$$

假设双模光场的两模初始时均处于相干态，即令(3.3.7)式中的 F_{n_1,n_2} 满足

$$F_{n_1,n_2}=\exp[-(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)]\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}/(\sqrt{n_1!\,n_2!})\tag{3.3.16}$$

如果双模光场很强，也就是平均光子数 $\bar{n}_1=|\alpha_1|^2$，$\bar{n}_2=|\alpha_2|^2$ 均很

大，那么与(1.3.173)式相似的证明可以发现，F_{n_1,n_2}可表示为

$$F_{n_1,n_2} \approx (4\pi^2 \bar{n}_1 \bar{n}_2)^{-1/4} \exp[i(n_1\zeta_1 + n_2\zeta_2)] \exp[-(n_1 - \bar{n}_1)^2/(4\bar{n}_1)]$$

$$\times \exp[-(n_2 - \bar{n}_2)^2/(4\bar{n}_2)] \tag{3.3.17}$$

其中 $\alpha_i = \sqrt{\bar{n}_i} \exp(i\zeta_i)$. 而且还由于平均光子数很大时，$|F_{n_1,n_2}|^2$ 在 $n_1 = \bar{n}_1$、$n_2 = \bar{n}_2$ 附近形成一个尖锐的峰，因此在对 n_1、n_2 作和时还可作近似：

$$F_{n_1-1,n_2} \approx F_{n_1,n_2-1} \approx F_{n_1,n_2} \tag{3.3.18}$$

(3.3.9)式中的 β 也可近似为

$$\beta(n_1, n_2) = \bar{\beta} + g_1^2(n_1 - \bar{n}_1)/(2\bar{\beta}) + g_2^2(n_2 - \bar{n}_2)/(2\bar{\beta}) \tag{3.3.19}$$

其中$\bar{\beta} = \beta(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$. 由(3.3.17)～(3.3.19)式，可以求得原子-光场耦合系统中光场相位概率分布函数[(3.3.14)式]为

$$P(\theta_{m_1}, \theta_{m_2}, t) = \left(\frac{2\pi}{s+1}\right)^2 \left(\frac{4\bar{n}_1\bar{n}_2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \{\exp[-2(\bar{n}_1 z_1 + \bar{n}_2 z_2)]$$

$$\times \frac{g_1^2\bar{n}_1 \sin^2\frac{\theta}{2} + g_2^2\bar{n}_2\cos^2\frac{\theta}{2} - g_1g_2\sqrt{\bar{n}_1\bar{n}_2}\sin\theta\cos\psi}{g_1^2\bar{n}_1 + g_2^2\bar{n}_2}$$

$$+ \exp[-2(\bar{n}_1 x_1 + \bar{n}_2 x_2)]$$

$$\times \frac{g_1^2\bar{n}_1\cos^2\frac{\theta}{2} + g_2^2\bar{n}_2\sin^2\frac{\theta}{2} + g_1g_2\sqrt{\bar{n}_1\bar{n}_2}\sin\theta\cos\psi}{2\bar{\beta}(\bar{\beta} + \frac{\Delta}{2})}$$

$$+ \exp[-2(\bar{n}_1 y_1 + \bar{n}_2 y_2)]$$

$$\times \frac{g_1^2\bar{n}_1\cos^2\frac{\theta}{2} + g_2^2\bar{n}_2\sin^2\frac{\theta}{2} + g_1g_2\sqrt{\bar{n}_1\bar{n}_2}\sin\theta\cos\psi}{2\bar{\beta}(\bar{\beta} - \frac{\Delta}{2})}\} \tag{3.3.20}$$

其中

$$z_i = (\zeta_i - \theta_{m_i} - \nu_i t)^2$$

$$x_i = (\zeta_i - \theta_{m_i} - \nu_i t + \frac{g_i^2 t}{2\bar{\beta}})^2$$

$$y_i = (\zeta_i - \theta_{m_i} - \nu_i t - \frac{g_i^2 t}{2\bar{\beta}})^2$$

显然，当 $s \to \infty$ 时，θ_{m_1}，θ_{m_2} 由分立变量过渡为连续变量 θ_1，θ_2，容易得出

$$\int_{\theta_{01}}^{\theta_{01}+2\pi} d\theta_1 \int_{\theta_{02}}^{\theta_{02}-2\pi} d\theta_2 P(\theta_1, \theta_2, t)\left(\frac{s+1}{2\pi}\right)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 P(\theta_1, \theta_2, t)\left(\frac{s+1}{2\pi}\right)^2 = 1$$

这里已注意到 $P(\theta_1, \theta_2, t)$ 呈高斯型分布，在 $\bar{n}_1$、$\bar{n}_2 \gg 1$ 时，积分限 $\theta_{0_i} \sim \theta_{0_i} + 2\pi$ 可拓展为 $-\infty \to \infty$，其中 $\left(\frac{s+1}{2\pi}\right)^2$ 为相位态密度.

利用(3.3.20)式，由(3.3.15)式可得光场相位随时间的演化规律：

$$\langle \Phi_1 \rangle = \zeta_1 - \nu_1 t - A_2 g_1^2 t \Delta \qquad (3.3.21)$$

$$\langle \Phi_2 \rangle = \zeta_2 - \nu_2 t - A_2 g_2^2 t \Delta \qquad (3.3.22)$$

$$\langle \Phi_1^2 \rangle = \frac{1}{4\bar{n}_1} + (\zeta_1 - \nu_1 t)^2 + A_2 g_1^4 t^2 - 2A_2 g_1^2 \Delta(\zeta_1 - \nu_1 t)t \qquad (3.3.23)$$

$$\langle \Phi_2^2 \rangle = \frac{1}{4\bar{n}_2} + (\zeta_2 - \nu_2 t)^2 + A_2 g_2^4 t^2 - 2A_2 g_2^2 \Delta(\zeta_2 - \nu_2 t)t \qquad (3.3.24)$$

于是光场相位涨落为

$$(\Delta\Phi_1)^2 = \langle \Phi_1^2 \rangle - \langle \Phi_1 \rangle^2 = \frac{1}{4\bar{n}_1} + g_1^4 t^2 A_2(1 - A_2 \Delta^2) \qquad (3.3.25)$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta\Phi_2)^2 &= \langle\Phi_2^2\rangle - \langle\Phi_2\rangle^2 \\
&= \frac{1}{4\bar{n}_2} + g_2^4 t^2 A_2 (1 - A_2 \Delta^2) \qquad (3.3.26)
\end{aligned}
$$

其中

$$
A_2 = \frac{g_1^2\bar{n}_1\cos^2\dfrac{\theta}{2} + g_2^2\bar{n}_2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + g_1 g_2\sqrt{\bar{n}_1\bar{n}_2}\sin\theta\cos\psi}{4\bar{\beta}^2(g_1^2\bar{n}_1 + g_2^2\bar{n}_2)}
$$

从(3.3.21)—(3.3.26)式可明显看出，虽然光场两模间无直接的相互作用，但光场两模通过与原子的耦合而有间接的相互作用，使得双模光场中频率为 ν_1 的模的相位函数中出现了 g_2，$\bar{n}_2$ 这些与频率为 ν_2 的光子有关的参数；频率为 ν_2 模的光场相位函数中则出现了 g_1，$\bar{n}_1$ 这些与频率为 ν_1 的光子有关的参数. 同时，从(3.3.25)，(3.3.26)式看到，光场两模的相位涨落明显地依赖于描述原子初态的参数 θ,ψ. 那么原子初态对原子-光场耦合系统性质的影响如何呢？下面我们来作进一步的讨论.

第三节　原子的相干捕获

当 $\theta=0$ 时，即初始原子处在上能态 $|a\rangle$，此时由(3.3.25)到(3.3.26)式给出光场两模的相位涨落分别为

$$
(\Delta\Phi_1)^2 = \frac{1}{4\bar{n}_1} + \frac{g_1^6\bar{n}_1 t^2}{4\bar{\beta}^2(g_1^2\bar{n}_1 + g_2^2\bar{n}_2)}\left[1 - \frac{\Delta^2 g_1^2\bar{n}_1}{4\bar{\beta}^2(g_1^2\bar{n}_1 + g_2^2\bar{n}_2)}\right] \qquad (3.3.27)
$$

$$
(\Delta\Phi_2)^2 = \frac{1}{4\bar{n}_2} + \frac{g_1^2 g_2^4\bar{n}_1 t^2}{4\bar{\beta}^2(g_1^2\bar{n}_1 + g_2^2\bar{n}_2)}\left[1 - \frac{\Delta^2 g_1^2\bar{n}_1}{4\bar{\beta}^2(g_1^2\bar{n}_1 + g_2^2\bar{n}_2)}\right] \qquad (3.3.28)
$$

如果初始时原子处在上能态 $|b\rangle$，即 $\theta=\pi$，此时(3.3.25)和

(3.3.26)式化为

$$(\Delta\Phi_1)^2 = \frac{1}{4\bar{n}_1} + \frac{g_1^2 g_2^2 \bar{n}_2 t^2}{4\,\bar{\beta}^2 (g_1^2 n_1 + g_2^2 n_2)} \left[1 - \frac{\Delta^2 g_2^2 n_2}{4\,\bar{\beta}^2 (g_1^2 \bar{n}_1 + g_2^2 \bar{n}_2)}\right] \tag{3.3.29}$$

$$(\Delta\Phi_2)^2 = \frac{1}{4\bar{n}_2} + \frac{g_2^6 \bar{n}_2 t}{4\,\bar{\beta}^2 (g_1^2 \bar{n}_1 + g_2^2 n_2)} \left[1 - \frac{\Delta^2 g_2^2 \bar{n}_2}{4\,\bar{\beta}^2 (g_1^2 \bar{n}_1 + g_2^2 \bar{n}_2)}\right] \tag{3.3.30}$$

显然，相位涨落随时间的增加而增大，(3.3.27)—(3.3.30)式说明，当初始时原子处在$|a\rangle$或$|b\rangle$这类非相干态时，初始为相干态的双模光场会由于原子-光场的耦合而破坏双模的初始相干性，并且如(3.1.98)和(3.1.100)式所示，原子的粒子布居数也将展现出崩塌-回复效应.

如果初始时原子处在上能态$|a\rangle$和$|b\rangle$的相干叠加态，此时(3.3.6)式表示的$|\Psi_A(0)\rangle$态中$\theta\neq 0$或π，那么由(3.3.25)和(3.3.26)式可知，当

$$g_1^2\bar{n}_1\cos^2(\theta/2) + g_2^2\bar{n}_2\sin^2(\theta/2) - g_1 g_2 \sqrt{\bar{n}_1\bar{n}_2}\,\sin\theta\cos\psi = 0$$

时，即原子的初态条件满足

$$\psi = \pi,\ \theta = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{g_1}{g_2}\sqrt{\frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2}}\right) \tag{3.3.31}$$

时，光场的相位涨落变为

$$(\Delta\Phi_1^2) = \frac{1}{4\bar{n}_1} \tag{3.3.32}$$

$$(\Delta\Phi_2^2) = \frac{1}{4\bar{n}_2} \tag{3.3.33}$$

这说明此种情况下双模光场每一模的相位涨落均不随时间变化，而保持为各自的初始值. 由于在$\bar{n}_1$，$\bar{n}_1\gg 1$时，可以认为随着时间的演化，光场每模的光子数保持为泊松分布，即$(\Delta N_1)^2=\bar{n}_1$、$(\Delta N_2)^2=\bar{n}_2$，因此此时双模光场每一模的光子数-相位不确定关系

均满足

$$(\Delta\Phi_1)^2(\Delta N_1)^2=(\Delta\Phi_2)^2(\Delta N_2)^2=1/4 \qquad (3.3.34)$$

可见在原子初始条件满足(3.3.31)式时，双模光场的每一模都处于最小测不准态，保持其初始时的相干光场特性，光场的相干性质不会由于原子-光场的耦合而发生改变.

然而，初始时原子处于相干叠加态(3.3.6)式的情况下，原子的粒子布居数随时间的演化行为怎样呢？对于 θ,ψ 满足初始条件(3.3.31)式的情况，原子初始时处在能级 $|a\rangle$、$|b\rangle$，$|c\rangle$ 的粒子布居数可由(3.3.8)式求得，它们分别为

$$P_a(0)=\cos^2(\theta/2)=\frac{g_2^2\bar{n}_2}{g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2} \qquad (3.3.35)$$

$$P_b(0)=\sin^2(\theta/2)=\frac{g_1^2\bar{n}_1}{g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2} \qquad (3.3.36)$$

$$P_c(0)=0 \qquad (3.3.37)$$

而随着时间的演化，在原子-光场相位本征态张开的希尔伯特空间内，原子处在能级 $|a\rangle$，$|b\rangle$，$|c\rangle$ 的粒子布居数分别为

$$\begin{aligned}P_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{s+1}{2\pi}\right)^2|\langle a,\ \theta_1,\ \theta_2|\Psi(t)\rangle|^2 d\theta_1 d\theta_2 \\ &= (4\bar{n}_1\bar{n}_2/\pi^2)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_2^2\bar{n}_2}{g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2}\exp[-2(\bar{n}_1 z_1 \\ &\quad + \bar{n}_2 z_2)]d\theta_1 d\theta_2 = \frac{g_2^2\bar{n}_2}{g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2}\end{aligned} \qquad (3.3.38)$$

$$P_b(t)=\frac{g_1^2\bar{n}_1}{g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2} \qquad (3.3.39)$$

$$P_c(t)=0 \qquad (3.3.40)$$

(3.3.38)—(3.3.40)式表明，此时原子粒子布居数随时间的演化不再呈现崩塌-回复效应，并且 $P_a(t)$，$P_b(t)$，$P_c(t)$ 的值与初始时的值相同. 这说明，在双光子共振条件下，初始处在相干叠加态

$(g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2)^{-1/2}(g_2\sqrt{\bar{n}_2}|a\rangle-g_1\sqrt{\bar{n}_1}|b\rangle)$的原子，在与双模相干光场作用时，原子粒子布居数出现稳恒的状态，这种现象称为原子的相干捕获，此时原子的粒子布居数和光场的相干性质都与初时相同．导致这种现象的原因是由于如图 3.3.1 所示的三能级原子与双模光场的耦合系统中，原子具有$|a\rangle\longleftrightarrow|c\rangle$和$|b\rangle\longleftrightarrow|c\rangle$的两种不同的单光子跃迁过程，两种跃迁过程之间存在有一定的干涉效应，而初始处于态$(g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2)^{-1/2}(g_2\sqrt{\bar{n}_2}|a\rangle-g_1\sqrt{\bar{n}_1}|b\rangle)$的原子在由$|a\rangle\longleftrightarrow|c\rangle$和$|b\rangle\longleftrightarrow|c\rangle$的跃迁过程中导致的是相消干涉，从而造成光场-原子相互作用系统彼此退耦，使得原子处在基态$|c\rangle$的概率为零．此时处在上能态的粒子布居数保持初始值不变，而光场的相干性质也未发生变化，系统发生原子的相干捕获，我们还把发生相干捕获的原子所处的态矢称为原子相干捕获态．上面的讨论说明，在原子-光场相互作用系统中，原子的初始状态，对原子光场的时间演化特性有着强烈的影响．那么，能够导致原子相干捕获的原子初态$(g_1^2\bar{n}_1+g_2^2\bar{n}_2)^{-1/2}(g_2\sqrt{\bar{n}_2}|a\rangle-g_1\times\sqrt{\bar{n}_1}|b\rangle)$具备什么样的性质呢？下面就来讨论这一问题．

从(3.3.31)式看到，导致发生原子相干捕获的原子初态条件与原子-光场间的单光子失谐量没有依赖关系，因此在以下的讨论中，为计算简单起见，我们令$\Delta=0$．首先我们来求出如图 3.3.1 所示的光场-原子耦合系统的本征态矢(修饰态)，显然，系统的修饰态可以表示为

$$|i\rangle=\alpha_i|a,n_1-1,n_2\rangle+\beta_i|b,n_1,n_2-1\rangle+\gamma_i|c,n_1,n_2\rangle=\begin{bmatrix}\alpha_i\\\beta_i\\\gamma_i\end{bmatrix}\quad(i=1,2,3)\tag{3.3.41}$$

相应地，系统的哈密顿量的矩阵表示为

$$H=(n_1\nu_1+n_2\nu_2+\omega_c)\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_1\sqrt{n_1} \\ 0 & 0 & g_2\sqrt{n_2} \\ g_1\sqrt{n_1} & g_2\sqrt{n_2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.42}
$$

将系统能量的本征值表示为

$$
E_i = n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \omega_c + \lambda_i \tag{3.3.43}
$$

则本征值方程满足

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_1\sqrt{n_1} \\ 0 & 0 & g_2\sqrt{n_2} \\ g_1\sqrt{n_1} & g_2\sqrt{n_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} \tag{3.3.44}
$$

由方程(3.3.44)式可得本征值 E_i 和与之相应的本征态矢 $|i\rangle$ 分别为

$$
\begin{aligned}
E_1 &= n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \omega_c, \\
|1\rangle &= (g_1^2 n_1 + g_2^2 n_2)^{-1/2}(g_2\sqrt{n_2}\,|a, n_1-1, n_2\rangle \\
&\quad - g_1\sqrt{n_1}\,|b, n_1, n_2-1\rangle)
\end{aligned} \tag{3.3.45}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2 &= n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \omega_c + \sqrt{g_1^2 n_1 + g_2^2 n_2}, \\
|2\rangle &= 2^{-1/2}[\,|c, n_1, n_2\rangle + (g_1^2 n_1 + g_2^2 n_2)^{-1/2}(g_2\sqrt{n_2}\,|a, n_1 \\
&\quad -1, n_2\rangle + g_1\sqrt{n_1}\,|b, n_1, n_2-1\rangle)]
\end{aligned} \tag{3.3.46}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3 &= n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \omega_c - \sqrt{g_1^2 n_1 + g_2^2 n_2}, \\
|3\rangle &= 2^{-1/2}[\,|c, n_1, n_2\rangle - (g_1^2 n_1 - g_2^2 n_2)^{-1/2}(g_2\sqrt{n_2}\,|a, n_1 \\
&\quad -1, n_2\rangle + g_1\sqrt{n_1}\,|b, n_1, n_2-1\rangle)]
\end{aligned} \tag{3.3.47}
$$

(3.3.45)式表明,修饰态 $|1\rangle$ 对应的系统的本征能量 E_1 是自由光

场和自由原子的能量,因此态矢$|1\rangle$是系统的退耦合态. 考虑到这里讨论的双模光场是强相干光场,即光子数分布的概率幅F_{n_1,n_2}满足(3.3.18)式,并且在对n_1、n_2作和时,$\bar{n}_1$,$\bar{n}_2$附近的值对作和式的结果贡献最大,因此可将由(3.3.8)和(3.3.31)式描述的系统(原子+光场)的初始态矢表示为

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n_1,n_2} F_{n_1,n_2}|1\rangle \tag{3.3.48}$$

随着时间的演化,系统的态矢变为

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle &= \exp(-iHt)|\Psi(0)\rangle \\ &= \sum_{n_1,n_2} F_{n_1,n_2}|1\rangle\exp[-i(n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \omega_c)t]\end{aligned} \tag{3.3.49}$$

(3.3.49)式表明,在时间演化过程中,系统处在态矢$|1\rangle$的概率与时间无关,因此原子的粒子布居数将保持为其初始值,而不随时间变化. 因而我们看到,在与强双模相干光场作用的V型三能级原子系统中,发生原子相干捕获的初始状态$(g_1^2\bar{n}_1 + g_2^2\bar{n}_2)^{-1/2}\times(g_2\sqrt{\bar{n}_2}|a\rangle - g_1\sqrt{\bar{n}_1}|b\rangle)$实际上是系统的某一修饰本征态按光场概率幅的叠加态,由于修饰态是系统的定态,因此在时间演化过程中原子的粒子布居数将保持其初始值,光场的相干性也不会发生变化.

最后还要指出的是,虽然在这里我们忽略了真空起伏诱导的原子自发发射对光与原子相互作用系统性质的影响,但D. A. Cardimona 等人的研究结果表明,在与强相干光场相互作用的V型三能级原子系统中,原子的相干捕获现象在考虑自发发射效应时也可以发生;并且正是真空起伏和光场一起对原子发生作用,可使初始处在基态$|c\rangle$的原子将很快地演化到由$(g_1^2 n_1 + g_2^2 n_2)^{-1/2}\times(g_2\sqrt{\bar{n}_2}|a\rangle - g_1\sqrt{n_1}|b\rangle)$描述的原子相干捕获态,从而使系统发生原子的相干捕获现象. 有关这一问题的证明,有兴趣的读者可参考本章所列的文献.

参 考 文 献

[1] P. M. Radmore and P. L. Knight, *J. Phys.*, B15, 561 (1982).

[2] S. Swain, *J. Phys.*, **B15**, 3045 (1982).
[3] D. A. Cardimona, M. G. Raymer and C. R. Stroud Jr., *J. Phys.* **B15**, 55 (1982).
[4] Z. Deng, *Opt. Commun.*, **48**, 284 (1983).
[5] H. I. Yoo and J. H. Eberly, *Phys. Rep.*, **118**, 232 (1985).
[6] B. J. Dalton, R. McDuff and P. L. Knight, *Opt. Acta*, **32**, 61 (1985).
[7] D. A. Cardimona, *Phys. Rev.*, **A41**, 5016 (1990).
[8] 彭金生、李高翔、周 鹏,*Phys. Rev.*, **A46**, 1516 (1992).
[9] 李高翔、彭金生、周 鹏,*Chin. J. Laser*, **1**, 221 (1992).
[10] 李高翔、彭金生,量子电子学,**10**,84 (1993).
[11] G. C. Hegerfeldt and M. B. Plenio, *Phys. Rev.*, **A47**, 2186 (1993).
[12] Bimalendu Deb, Gautam Gangopadhyay and Deb Shankar Ray, *Phys. Rev.*, **A48**, 1100 (1993).
[13] 李高翔、彭金生,*Phys. Lett.*, **189**, 149 (1994).
[14] 李高翔、彭金生,物理学报,**44**, 700 (1995).
[15] 李高翔、彭金生,*Phys. Rev.*, **A52**, 465 (1995).
[16] 李高翔、彭金生、周 鹏,*Opt. Commun.*, **123**, 94 (1995).
[17] 李高翔、彭金生,物理学报,**45**, 37 (1996).
[18] 李高翔、彭金生,*Phys. Lett.*, **A** (将发表) (1996).

第四章　与光场作用的双原子系统的量子特性

前面我们讨论的大多是单个原子与辐射场相互作用的系统，即使在第二篇第四章研究多原子系统的超荧光辐射时，也是假定原子间的间距较远，因而忽略原子间的偶极-偶极相互作用．实际上，当原子间的间距不是太大时，原子间相互作用的效应是不可忽视的．那么，在光与原子相互作用系统中，原子间的偶极-偶极相互作用对原子行为的量子特性有什么影响呢？本章中我们将着重讨论这一问题．从理论上讲，光场作用下双原子系统的量子特性，原则上就可以推广到实际的多原子系统．本章中，我们首先导出描述两个二能级原子间偶极-偶极相互作用的哈密顿量，接着讨论与弱光场作用的双原子体系中偶极-偶极相互作用对双原子粒子布居差和双原子偶极压缩的影响，最后研究在强相干光场作用下双原子粒子布居数因原子间偶极-偶极相互作用展现的不同特征的崩塌-回复现象，以及双原子体系相干捕获条件等问题．

第一节　有偶极-偶极相互作用的双原子系统的哈密顿量

为简化讨论，我们仍假定两个原子均为二能级原子，原子间的偶极-偶极相互作用一般来自两部分，一部分是电偶极相互作用，另一部分则是真空起伏导致的偶极-偶极相互作用．下面先讨论电偶极相互作用部分．

一、原子间的电偶极相互作用能

我们知道，在经典电动力学中，两个单电子原子可以近似看作

为两个电偶极子．如图 3.4.1 所示，图中 A、B 两点表示 A、B 两个原子核的位置，$\boldsymbol{r}_A$，$\boldsymbol{r}_B$ 分别表示 A、B 两个原子核外电子的位置，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 是两个原子之间的相对位置矢量，相应地两个原子的电偶极矩分别为：$\boldsymbol{d}_1=e\boldsymbol{r}_A$，$\boldsymbol{d}_2=e\boldsymbol{r}_B$．这两个原子之间的静电相互作用能具有熟知的形式：

$$V_1=\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2(1-3\cos^2\theta)/R^3 \tag{3.4.1}$$

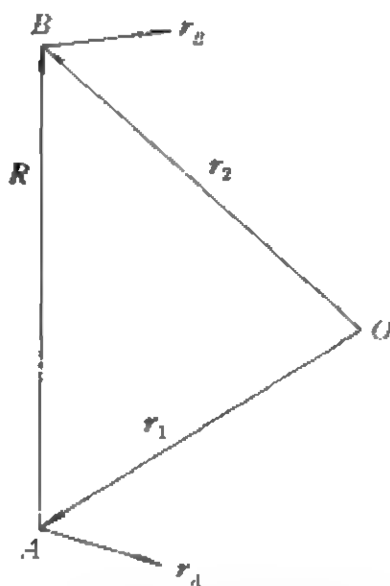


图 3.4.1　有耦合作用的双原子系统示意图

式中 θ 为电偶极矩 $\boldsymbol{d}_1$（或 $\boldsymbol{d}_2$）与 $\boldsymbol{R}$ 之间的夹角．由第一篇第二章知道，二能级原子的偶极矩 $\boldsymbol{d}_i$，可以用赝自旋算符 $S_+^{(i)}$，$S_-^{(i)}$ 表示为

$$\boldsymbol{d}_i=d(S_+^{(i)}+S_-^{(i)})\boldsymbol{e}_d \tag{3.4.2}$$

这里已令两个原子的偶极矩大小相等，即 $|\boldsymbol{d}_1|=|\boldsymbol{d}_2|=\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}_d$ 为偶极矩的单位方向矢量．将(3.4.2)式代入(3.4.1)式，得到

$$V_1=\frac{d^2}{R^3}(1-3\cos^2\theta)(S_+^{(1)}S_+^{(2)}+S_-^{(1)}S_-^{(2)}+S_+^{(1)}S_-^{(2)}+S_-^{(1)}S_-^{(2)}) \tag{3.4.3}$$

式中 $S_+^{(1)}S_-^{(2)}$表征 A 原子从基态 $|-\rangle$ 跃迁到激发态 $|+\rangle$、而 B 原子同时从 $|+\rangle$ 跃迁到 $|-\rangle$ 的过程，$S_-^{(1)}S_+^{(2)}$描述的是 A 原子从 $|+\rangle$ 跃迁到 $|-\rangle$、同时 B 原子从 $|-\rangle$ 跃迁到 $|+\rangle$ 的过程，显然这两种过程的能量改变值较小。而式中 $S_+^{(1)}S_+^{(2)}$（$S_-^{(1)}S_-^{(2)}$）反映的则是两个原子同时从 $|-\rangle$（$|+\rangle$）跃迁到 $|+\rangle$（$|-\rangle$）的过程，这两种跃迁过程具有很大的能量改变值．基于旋波近似相似的考虑，在两个原子的静电相互作用哈密顿量(3.4.3)式中可以略去 $S_+^{(1)}S_+^{(2)}$ 及其共轭项，这样(3.4.3)式化为

$$V_1=\Omega_1(S_+^{(1)}S_-^{(2)}+S_-^{(1)}S_+^{(2)}) \tag{3.4.4}$$

其中已令

$$\Omega_1=d^2(1-3\cos^2\theta)/R^3 \tag{3.4.5}$$

(3.4.4)式就是描述两个二能级原子之间静电偶极-偶极相互作用的哈密顿量.

二、真空起伏诱导的偶极-偶极相互作用

由第二篇第六章的讨论知道,处于基态的单个原子在真空辐射场作用下,会不断地发射和吸收虚光子. 对于双原子体系,原子在真空起伏诱导下也将通过虚光子交换而发生偶极-偶极相互作用. 现在来讨论这种相互作用能的表达式.

我们仍以两个二能级原子为例,并假设它们具有相同的本征跃迁频率 ω_0. 在真空辐射场作用下,考虑原子间静电相互作用能(3.4.4)式以后,双原子体系的哈密顿量可表示为

$$\begin{aligned}H &= \omega_0\sum_{l=1}^{2}S_3^{(l)}+\sum_{kj}\omega_{kj}a_{kj}^{+}a_{kj}+\Omega_1(S_+^{(1)}S_-^{(2)}+S_-^{(1)}S_+^{(2)})\\&\quad+\sum_{l=1}^{2}\sum_{kj}\epsilon_{kj}[a_{kj}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_l)(S_+^{(l)}+S_-^{(l)})\\&\quad+a_{kj}^{+}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_l)(S_+^{(l)}+S_-^{(l)})] \quad (\hbar=1)\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

其中$\sum_{kj}\omega_{kj}a_{kj}^{+}a_{kj}$表示辐射场的能量,$a_{kj}$代表波矢为$\boldsymbol{k}$、极化矢量为$\boldsymbol{e}_{kj}$的光子的湮灭算符,$\epsilon_{kj}$为原子与辐射场间的耦合常数,由第一篇第四章知道,它表示为

$$\epsilon_{kj}=\left(\frac{2\pi\omega_0^2}{V\omega_{kj}}\right)^{\frac{1}{2}}d\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{e}_d \tag{3.4.7}$$

由海森伯运动方程可得

$$\begin{aligned}i\dot{a}_{kj}&=[a_{kj},H]\\&=\omega_{kj}a_{kj}+\sum_{l=1}^{2}\epsilon_{kj}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_l)(S_+^{(l)}+S_-^{(l)})\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

$$i\dot{S}_-^{(l)} = \omega_0 S_-^{(l)} - 2\Omega_1 S_3^{(l)} \sum_{l'} S_-^{(l')} (1 - \delta_{l,l'})$$

$$- 2\sum_{kj} \varepsilon_{kj} S_3^{(l)} [a_{kj} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l) + a_{kj}^{+} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l)] \quad (3.4.9)$$

(3.4.9)式中的第二项反映两原子间的静电偶极-偶极相互作用对第 l 个原子自旋算符 $S_-^{(l)}$ 的影响;第三项则表示真空辐射场对 $S_-^{(l)}$ 的影响,为考察这种影响,需要求解出 $a_{kj}(t)$ 及其共轭 $a_{kj}^{+}(t)$. 由(3.4.8)式可得,$a_{kj}(t)$满足

$$a_{kj}(t) = a_{kj}(0)\exp(-i\omega_{kj}t)$$

$$- i\sum_{kj} \varepsilon_{kj} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l)\{\int_0^t \exp[-i\omega_{kj}(t-t')]$$

$$\times [S_-^{(l)}(t') + S_+^{(l)}(t')]dt'\} \quad (3.4.10)$$

由于原子间静电偶极-偶极相互作用能与 ω_0 相比是一个小量,因此(3.4.10)式中的 $S_-^{(l)}(t')$,$S_+^{(l)}(t')$可近似表示为

$$S_-^{(l)}(t') = S_-^{(l)}(t)\exp[i\omega_0(t-t')] \quad (3.4.11a)$$

$$S_+^{(l)}(t') = [S_-^{(l)}(t')]^{+} \quad (3.4.11b)$$

将(3.4.11)式代入(3.4.10)式得到

$$a_{kj}(t) = a_{kj}(0)\exp(-i\omega_{kj}t)$$

$$- i\sum_{l=1}^{2} \varepsilon_{kj} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l)\{S_-^{(l)}(t)\int_0^t \exp[i(\omega_0$$

$$- \omega_{kj})(t-t')]dt' + S_+^{(l)}(t)\int_0^t \exp[-i(\omega_0$$

$$+ \omega_{kj})(t-t')]dt'\} = a_{kj}(0)\exp(-i\omega_{kj}t)$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \varepsilon_{kj} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l)\{S_-^{(l)}(t)(\omega_0 - \omega_{kj})^{-1}$$

$$- S_+^{(l)}(t)(\omega_0 + \omega_{kj})^{-1}\} \quad (3.4.12)$$

再把上式及其共轭代入(3.4.9)式,可得

$$i\dot{S}_-^{(l)} = \omega_0 S_-^{(l)} - 2\Omega_1 S_3^{(l)} \sum_{l'} S_-^{(l')} (1 - \delta_{l,l'})$$

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_{kj}\varepsilon_{kj}^{2}S_{3}^{(l)}[a_{kj}(0)\exp(-i\omega_{kj}t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{l})+h.c.]\\
&-2\sum_{l'}\varepsilon_{kj}^{2}S_{3}^{(l)}\{\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})[S_{-}^{(l')}(t)(\omega_{0}-\omega_{kj})^{-1}\\
&-S_{+}^{(l')}(t)(\omega_{0}+\omega_{kj})^{-1}]+h.c\}
\end{aligned}
\tag{3.4.13}
$$

很明显,上式右边第一项描述 $S_{-}^{(l)}$ 的自由振动,第二项反映的是第 l' $(l\neq l')$ 个原子通过静电偶极-偶极相互作用对 $S_{-}^{(l)}$ 的影响,第三项是真空场对第 l 个原子的作用,第四项中 $l=l'$ 的项表征的是第 l 个原子在真空场作用下通过发射和吸收虚光子对自身的反作用,它是第 l 个原子的基态能级兰姆移位的根源,第四项中的 $S_{3}^{(l)}S_{+}^{(l')}$ $(l=l')$ 项是一个快变项,它对应的是双光子跃迁过程,因此可以略去这一项对 $S_{-}^{(l)}$ 的影响. 而第四项中 $S_{3}^{(l)}S_{-}^{(l')}(l=l')$ 项的形式与表征第 l' 个原子对第 l 个原子的静电偶极-偶极相互作用效应的第二项具有相同的形式,因此它反映的是第 l' 个原子通过与第 l 个原子交换虚光子造成的原子间相互作用的效应. 同 V_1 相似,原子间的这种相互作用哈密顿量的形式可写为

$$
V_{2}=\Omega_{2}(S_{+}^{(1)}S_{-}^{(2)}+S_{-}^{(1)}S_{+}^{(2)}) \tag{3.4.14}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\Omega_{2}=\sum_{kj}\varepsilon_{kj}^{2}\{&\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})(\omega_{0}-\omega_{kj})^{-1}\\
&-\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})(\omega_{0}+\omega_{kj})^{-1}\}
\end{aligned}
\tag{3.4.15}
$$

很显然,V_2 描述的是双原子体系由真空起伏导致的原子间偶极-偶极相互作用,这种偶极-偶极相互作用是通过两个原子交换虚光子产生的,因此从这种意义上讲,也可把原子的这种相互作用称为辐射偶极-偶极相互作用.

综合上面的讨论可以看出,两个原子间的偶极-偶极相互作用来源于两个方面,即原子间的静电偶极-偶极相互作用和辐射偶极-偶极相互作用,因此描述两个原子间的偶极-偶极相互作用的哈密顿量可表示为

$$
V=V_{1}+V_{2}=(\Omega_{1}+\Omega_{2})(S_{+}^{(1)}S_{-}^{(2)}+S_{-}^{(1)}S_{+}^{(2)}) \tag{3.4.16}
$$

那么原子间的两种不同起因的偶极-偶极相互作用的相对强度是一种什么样的关系呢？也就是说 Ω_1 和 Ω_2 谁大谁小呢？下面就来讨论这一问题.

为此需将 Ω_2[(3.4.15)式] 化简. 将(3.4.7)式代入(3.4.15)式，得到

$$\Omega_2 = \sum_k \frac{2\pi\omega_0^2}{V\omega_k} d^2 \{\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})\ (\omega_0-\omega_{kj})^{-1} - \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})\ (\omega_0-\omega_{kj})^{-1}\} \times \sum_{j=1}^{2}(\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{e}_d)^2 \tag{3.4.17}$$

利用光子极化矢量的作和可得

$$\sum_{j=1}^{2}(\boldsymbol{e}_{kj}\cdot\boldsymbol{e}_d)^2 = (\boldsymbol{e}_{kd}^{(1)})^2 + (\boldsymbol{e}_{kd}^{(2)})^2 = 1-(\hat{k}_d)^2 \tag{3.4.18}$$

式中 $\hat{k}_d$表示光场的单位波矢在 $\boldsymbol{e}_d$ 方向的投影. 考虑到连续谱极限时，(3.4.17)式中的作和 $(V)^{-1}\sum_k$ 可以用积分 $(2\pi)^{-3}\int d^3\boldsymbol{k}$ 来代替，即

$$(V)^{-1}\sum_k \Rightarrow \int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \tag{3.4.19}$$

把(3.4.18)，(3.4.19)式一并代入(3.4.17)式中，得到

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{d^2\omega_0^2}{4\pi^2\omega_k}\ [1-(\hat{k}_d)^2]\ (\omega_0^2-\omega_k^2)^{-1}\{\omega_0[\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'}) \\ &\quad - \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})] + \omega_k[\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'}) + \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})]\} \\ &= \int dk\ \frac{d^2k_0^2k}{4\pi^2(k_0^2-k^2)}\int d\Omega\ [1-(\hat{k}_d)^2]\{k_0[\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'}) \\ &\quad - \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})] + k[\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'}) + \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})]\}\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

注意到

$$\frac{1}{4\pi}\int\exp(\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}\exp(\pm ikR\cos\gamma)\ d\ (\cos\gamma)$$

$$= \sin(kR)/(kR) \tag{3.4.21}$$

以及

$$\frac{1}{k}\nabla_d \int \exp(\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})d\Omega = \pm i \int \hat{\boldsymbol{k}}_d \exp(\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})d\Omega \tag{3.4.22}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int (\hat{\boldsymbol{k}}_d)^2 \exp(\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})d\Omega \\
&= -\frac{1}{4\pi k^2}\nabla_d^2 \int \exp(\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})d\Omega \\
&= -\frac{1}{k^2}\nabla_d^2 \left[\sin(kR)/(kR)\right] \\
&= -(1-3\cos^2\theta)\left(\frac{\cos kR}{k^2R^2} - \frac{\sin kR}{k^3R^3}\right) \\
&\quad + \cos^2\theta\frac{\sin kR}{kR}
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

因而

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int \left[1-(\hat{\boldsymbol{k}}_d)^2\right]\exp(\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ll'})d\Omega \\
&\quad = (1-\cos^2\theta)\frac{\sin kR}{kR} \\
&\qquad + (1-3\cos^2\theta)\left(\frac{\cos kR}{k^2R^2} - \frac{\sin kR}{k^3R^3}\right)
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

把上式代入(3.4.20)式中，则 Ω_2 简化为

$$\begin{aligned}
\Omega_2 = \frac{2d^2k_0^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{k^2}{k_0^2-k^2}\Big[(1-\cos^2\theta)\frac{\sin kR}{kR} \\
+ (1-3\cos^2\theta)\left(\frac{\cos kR}{k^2R^2} - \frac{\sin kR}{k^3R^3}\right)\Big]dk
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

上式中形如 $\int_0^\infty \frac{k^2}{k_0^2+R^2} f(kR)dk$ 的积分可以利用复变函数的留数定理计算，例如对于积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{k\sin kR}{(k_0^2-k^2)R}\,dk=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ikR}}{(k_0^2-k^2)R}\,dk$$

积分 I 可以利用如图 3.4.2 所示的积分回路来计算，这里 C_r 是一个半径趋近于∞的半圆，根据复变函数的留数定理得到

$$I=\frac{\pi i}{2i}\frac{1}{R}\left[-\frac{1}{2}e^{ik_0R}-\frac{1}{2}e^{-ik_0R}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{2R}\cos(k_0R)$$

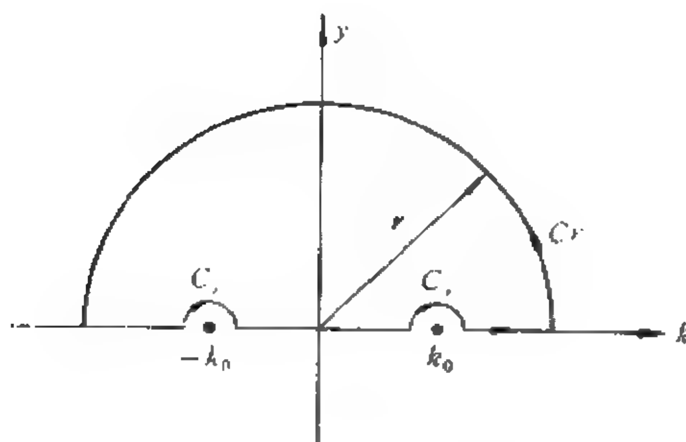


图 3.4.2 I 的回路积分示意图

利用相同的方法计算(3.4.25)式中后面的两个积分，最后 Ω_2 简化为

$$\Omega_2=-d^2k_0^3\Big[(1-\cos^2\theta)\frac{\cos k_0R}{k_0R}$$

$$-(1-3\cos^2\theta)\Big(\frac{\sin k_0R}{k_0^2R^2}+\frac{\cos k_0R-1}{k_0^3R^3}\Big)\Big] \qquad (3.4.26)$$

这样，原子间的偶极-偶极相互作用强度表示为

$$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$$

$$=d^2k_0^3\Big\{(1-3\cos^2\theta)\left[\frac{\sin k_0R}{k_0^2R^2}+\frac{\cos k_0R-1}{k_0^3R^3}\right]$$

$$-(1-\cos^2\theta)\frac{\cos k_0R}{k_0^3R^3}\Big\} \qquad (3.4.27)$$

比较(3.4.5)和(3.4.26)式可以看到，当两个原子相距很远以

致于 $k_0R\gg1$ 时，$\Omega_1=\Omega_2=0$，这说明此时两个原子间的偶极-偶极相互作用可以忽略，可以认为两个原子是彼此独立的．如果两个原子相距不太远，如 $k_0R=3$，这时(3.4.27)式中起主要作用的是含因子$(k_0R)^{-1}$的项，两种偶极-偶极相互作用的强度之比 $\Omega_2/\Omega_1\sim(k_0R)^2=9$，因此此时对原子间偶极-偶极相互作用起主要贡献的是由真空起伏诱导的原子相互作用．假若两个原子相距较近，即 $k_0R=1$，这时 Ω_1 和 Ω_2 具有相同的量级，在这种情况下原子间的偶极-偶极相互作用由 V_1 和 V_2 共同决定．当两个原子相距很近(但还没有发生电子云的交叠)，即 $k_0R\ll1$ 时，$\Omega_2\propto(k_0R)^{-2}$，$\Omega_1\propto(k_0R)^{-3}$，显然在这种情况下，原子间的偶极-偶极相互作用主要依赖于静电偶极-偶极相互作用．

第二节　与弱光场作用的有耦合双原子系统的量子特性

下面我们来考察与弱光场相互作用的两个二能级原子体系中，双原子的粒子布居差和原子算符的压缩随时间的演化规律，用以考察原子间的偶极-偶极相互作用对系统性质的影响．

描述两个二能级原子与单模光场相互作用的哈密顿量可表为

$$H=\omega_0\sum_{i=1}^{2}S_3^{(i)}+\omega a^+a+\sum_{i=1}^{2}g\,(a^+S_-^{(i)}+aS_+^{(i)})$$
$$+\Omega(S_+^{(1)}S_-^{(2)}+S_-^{(1)}S_+^{(2)})\qquad(3.4.28)$$

这里为讨论简单起见，我们仅考虑共振情况，即光场频率 ω 等于原子本征跃迁频率 ω_0 的情况．

如果初始时刻，双原子体系处在激发态$|+,+\rangle$和基态$|-,-\rangle$的相干叠加态：

$$|\Psi_A(0)\rangle=\cos(\theta/2)|-,-\rangle$$
$$-\sin(\theta/2)e^{i\psi}|+,-\rangle\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ -\pi\leqslant\psi<\pi)\qquad(3.4.29)$$

而单模光场处在真空态$|0\rangle$，即系统初始时处在态

$$|\Psi(0)\rangle=\cos(\theta/2)|-,-,0\rangle-\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}|+,+,0\rangle \tag{3.4.30}$$

在相互作用绘景中，系统在 t 时刻的态矢演化为

$$\begin{aligned}|\Psi^{I}(t)\rangle=&\cos(\theta/2)|-,-,0\rangle\\&-\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}[C_0(t)|+,+,0\rangle+C_1(t)|+,-,1\rangle\\&+C_2(t)|-,+,1\rangle+C_3(t)|-,-,2\rangle]\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

由相互作用绘景中的薛定谔方程，可得

$$\begin{cases}\dot{C}_0(t)=-ig[C_1(t)+C_2(t)]\\ \dot{C}_1(t)=-ig[\sqrt{2}C_3(t)+C_0(t)]-i\Omega C_2(t)\\ \dot{C}_2(t)=-ig[\sqrt{2}C_3(t)+C_0(t)]-i\Omega C_1(t)\\ \dot{C}_3(t)=-ig\sqrt{2}[C_1(t)+C_2(t)]\end{cases} \tag{3.4.32}$$

考虑到初始条件(3.4.30)式，则可求出 $C_i(t)$：

$$\begin{aligned}&C_0(t)=\frac{2g^2}{\sqrt{\Omega^2-24g^2}}(e^{iat}/a-e^{ibt}/b)+2/3\\&C_1(t)=C_2(t)=-\frac{g}{\sqrt{\Omega^2+24g^2}}(e^{iat}-e^{ibt})\\&C_3(t)=\frac{2g^2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega^2+24g^2}}(e^{iat}/a-e^{ibt}/b)-\sqrt{2}/3\end{aligned} \tag{3.4.33}$$

式中

$$a=[-\Omega+\sqrt{\Omega^2+24g^2}]/2,\ b=[-\Omega-\sqrt{\Omega^2+24g^2}]/2 \tag{3.4.34}$$

从(3.4.31)和(3.4.33)式出发，即可方便地讨论计及耦合的双原子系统的性质.

一、有耦合双原子系统粒子布居差随时间的演化

在(3.4.29)式中，令 $\theta=\pi$，即假定初始时两个原子均处在各

自的激发态$|+\rangle$，那么由(3.4.31)式可得在t时刻双原子系统在激发态$|+,+\rangle$和基态$|-,-\rangle$间的粒子布居差为

$$\begin{aligned}\langle S_3\rangle &= \langle \Psi^{\mathrm{I}}(t)|(S_3^{(1)} + S_3^{(2)})|\Psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle \\ &= \frac{1}{9} + \frac{8g^2}{3(\Omega^2 + 24g^2)}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - 24g^2}}{2}t\right) \\ &\quad - \frac{8}{9\sqrt{\Omega^2 - 24g^2}}(b\cos at - a\cos bt) \qquad (3.4.35)\end{aligned}$$

上式表明，由于原子间的合作效应和偶极-偶极相互作用，双原子系统的粒子布居差随时间演化的规律比单原子系统要复杂得多. 当两原子相距很远，以致于可以略去原子间的偶极-偶极相互作用(即$\Omega=0$)时，$\langle S_3\rangle$简化为

$$\langle S_3\rangle = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\sin^2(\sqrt{6}\,gt) + \frac{8}{9}\cos(\sqrt{6}\,gt) \qquad (3.4.36)$$

可见，与真空辐射场相互作用的双原子系统，由于原子间的合作效应的影响，$\langle S_3\rangle$中含有两种频率的振荡. 图3.4.3(a)给出了由(3.4.36)式描述的$\langle S_3\rangle$随时间演化的规律，可以看到，$\langle S_3\rangle$作周期为$\frac{2\pi}{\sqrt{6}\,g}$的振荡，其幅值在1和$-7/9$之间变化. 这表明，由于原子间的合作效应的影响，初始处在激发态$|+,+\rangle$的双原子系统，在真空辐射场作用下不会完全演化到基态$|-,-\rangle$，也就是说处于激发态的两个原子不会同时衰变到基态. 例如在$t'=\frac{\pi}{\sqrt{6}\,g}$时刻，此时$\langle S_3\rangle$有负的最大值$-7/9$，系统的态矢由(3.4.31)和(3.4.33)式可知为

$$|\Psi^{\mathrm{I}}(t')\rangle = e^{i\varphi}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}|-,-,2\rangle - \frac{1}{3}|+,+,0\rangle\right] \qquad (3.4.37)$$

这一情况与本篇第一章讨论的单原子系统是不相同的. 在那里，初始处在激发态的单个二能级原子，在真空辐射场的影响下，经过半个拉比振荡周期，原子将辐射一个光子而衰变到基态. 而

(3.4.37)式表明,双原子体系还将部分地停留在激发态$|+,+\rangle$.这说明,在与真空辐射场作用的双原子系统中,原子间的合作效应对激发态能量的衰变具有抑制作用.

我们不妨来看看$t=t'$这一特定时刻光场的强度,由(3.4.37)式得

$$\langle a^+ a\rangle^{(1)}(t') = 16/9 \tag{3.4.38}$$

如果再假设系统演化到t'时,它所辐射的光子均飞出腔体之外,并把此时再作为系统的起始时刻,即系统处在新的初态:

$$|\Psi(0)\rangle^{(1)} = e^{i\phi}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}|-,-,0\rangle - \frac{1}{3}|+,+,0\rangle\right) \tag{3.4.39}$$

由(3.4.31)和(3.4.33)式可得,系统再演化到$t=t'$时刻的态矢为

$$|\Psi'(t')\rangle^{(2)}=e^{i\phi}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}|-,-,0\rangle+\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}|-,-,2\rangle - \frac{1}{3}|+,+,0\rangle\right)\right] \tag{3.4.40}$$

这时腔体内原子辐射的光场强度的最大值为

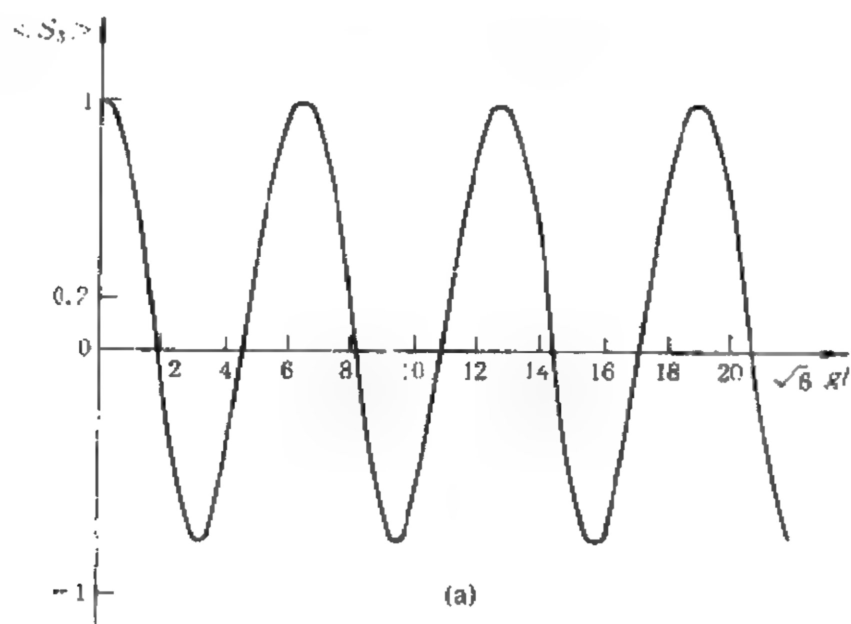
$$\langle a^+ a\rangle^{(2)}(t') = 16/81 = \langle a^+ a\rangle^{(1)}(t')/9 \tag{3.4.41}$$

可见,双原子体系在真空起伏的作用下会发生第二次辐射,辐射的光强比第一次辐射要弱得多.这种情况说明,对于多原子系统,由于原子间的合作效应对激发态能量衰变的抑制,可使系统呈现衰减脉冲辐射.这也是超荧光出现振铃现象(第二篇第四章)的一种物理原因.

不忽略原子间偶极-偶极相互作用时,$\langle S_3\rangle$的时间演化由(3.4.35)的数值解展示.图3.4.3(b)显示的是原子间偶极-偶极相互作用较弱($\Omega=0.2g$)的情形,比较图3.4.3(a)和图3.4.3(b)可以看到,双原子体系的粒子布居差$\langle S_3\rangle$的振荡频率的变化不很明显,但振荡幅度随着时间的演化逐渐减小,这也就是说,原子间的这种弱偶极-偶极相互作用对抑制双原子激发态能量的衰变起着加强的作用.图3.4.3(c)给出了$\Omega=5g$时$\langle S_3\rangle$随时间的演化,

此时原子间较强的偶极-偶极相互作用使得$\langle S_3\rangle$的振荡频率明显变小，即$\langle S_3\rangle$更加难以演化到负的最大值$-7/9$.

图 3.4.3(d)描绘的是偶极-偶极相互作用很强($\Omega=12g$)，即$\Omega^2\gg24g^2$的情形. 由图可见，此时$\langle S_3\rangle$作幅值在$-7/9$和1之间



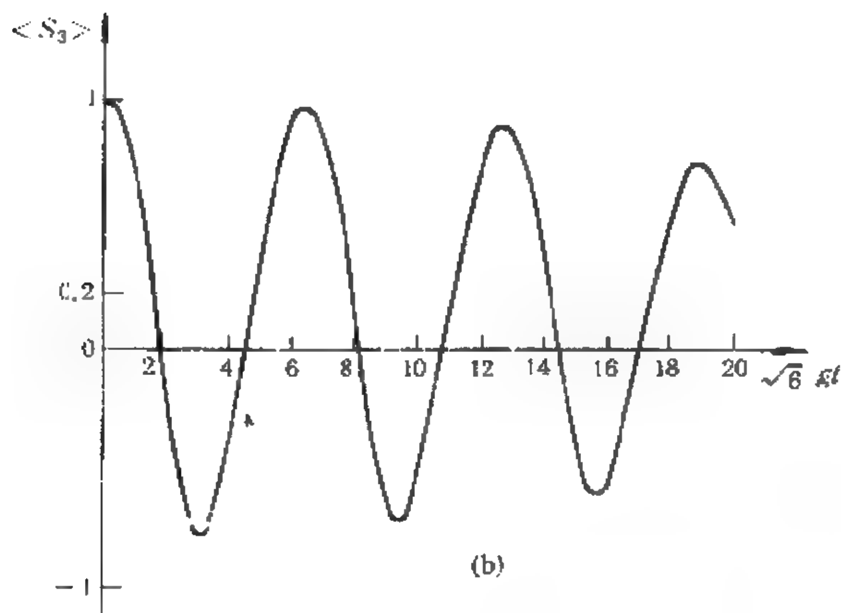
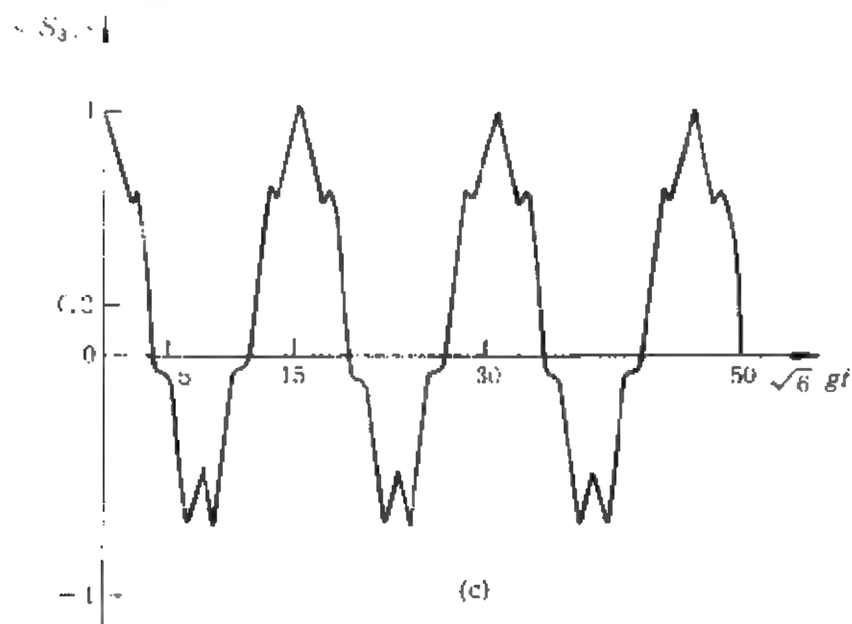


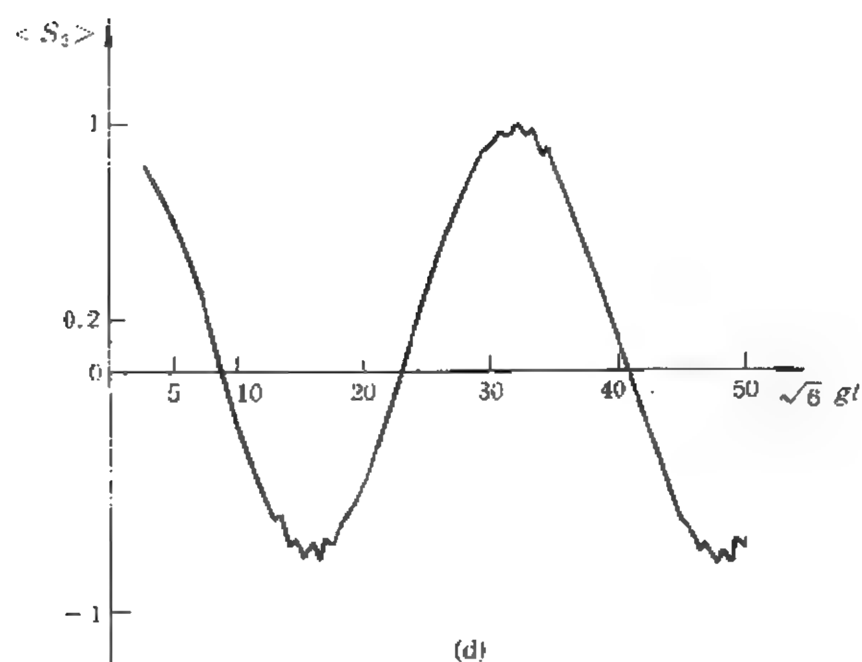
图 3.4.3 耦合强度 Ω 取不同值

(a) $\Omega=0$; (b) $\Omega=0.2g$;

变化的较规则的余弦振荡. 为理解这时$\langle S_3\rangle$随时间的演化规律，下面对这一情况先作一解析分析. 由于$\Omega^2\gg 24g^2$时，a和b可以近似表示为



(c)



(d)

时，$\langle S_3\rangle$的时间演化规律($\theta=\pi$)

(c)$\Omega=5g$；(d) $\Omega=12g$

$$a \approx \frac{6g^2}{\Omega}, \quad b \approx -\Omega \tag{3.4.42}$$

此时系统的态矢和$\langle S_3 \rangle$变为

$$|\Psi'(t)\rangle = -\frac{e^{i\gamma}}{3}\{2\sqrt{2}\, i\sin(3g^2t/\Omega)\exp(i3g^2t/\Omega)|-,-,2\rangle + [2\exp(i3g^2t/\Omega)\cos(3g^2t/\Omega)+1]|+,+,0\rangle\} \tag{3.4.43}$$

$$\langle S_3 \rangle = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}\cos(6g^2t/\Omega) \tag{3.4.44}$$

显然(3.4.44)式展现出如图3.4.3(d)所示的特征. 导致这种现象的原因是,对于这里的双原子体系,可以看作为具有三个对称能级态

$$E_3 = \omega_0, \quad |3\rangle = |+,+\rangle \tag{3.4.45a}$$

$$E_2 = \omega_0/2, \quad |2\rangle = 2^{-1/2}(|+,-\rangle + |-,+\rangle) \tag{3.4.45b}$$

$$E_1 = 0, \quad |1\rangle = |-,-\rangle \tag{3.4.45c}$$

和一个反对称能态

$$E_0 = 0, \quad |0\rangle = 2^{-1/2}(|+,-\rangle - |-,+\rangle) \tag{3.4.45d}$$

的原子体系,式中已令原子基态$|-,-\rangle$的本征能量为0. 由于能态$|0\rangle$在双原子-光场相互作用时不参加作用,因此双原子体系可以等效为一个级联三能级原子. 又由于原子的偶极-偶极相互作用造成能级$|2\rangle$发生移位:

$$\Omega(S_+^{(1)}S_-^{(2)} + S_-^{(1)}S_+^{(2)})|2\rangle = \Omega|2\rangle \tag{3.4.46}$$

使得原子在光场的作用下在$|1\rangle \longleftrightarrow |2\rangle$和$|2\rangle \longleftrightarrow |3\rangle$的跃迁过程中发生单光子失谐,所以在$\Omega^2 \gg 24g^2$时,系统的双光子跃迁过程占据主要地位,从而态矢(3.4.43)式中的单光子项$|+,-,1\rangle$

$+|-,+,1\rangle$的幅值为 0,因此$\langle S_3\rangle$表现出单一频率的余弦振荡.但由于原子间合作效应和偶极-偶极相互作用对激发态能量衰变的抑制,因此$\langle S_3\rangle$不能演化到-1.

二、耦合效应对原子算符压缩的影响

为讨论原子间偶极-偶极相互作用对多原子系统原子算符压缩效应的影响,我们先来介绍双原子系统的原子算符压缩的定义.

1. 双原子系统原子算符压缩的定义

在第二篇第二章讨论双模光场的压缩效应时,是将单模光场的定义加以推广. 对于双原子系统中原子算符的压缩,我们也可将单原子算符压缩的定义作相似的推广. 定义两个厄米正交的算符:

$$S_1=(D_+-D_-)/2, \quad S_2=(D_+-D_-)/(2i) \tag{3.4.47}$$

式中D_+,D_-为双原子系统的赝自旋算符:

$$D_+=S_+^{(1)}+S_+^{(2)}, \quad D_-=S_-^{(1)}+S_-^{(2)}, \quad S_3=S_3^{(1)}+S_3^{(2)} \tag{3.4.48}$$

显然,S_1,S_2分别代表双原子偶极矩的色散和吸收分量,它们满足对易关系:

$$[S_1, S_2]=iS_3 \tag{3.4.49}$$

与之相应的海森伯不确定关系为

$$(\Delta S_1)^2(\Delta S_2)^2\geqslant\frac{1}{4}\langle S_3\rangle^2 \tag{3.4.50}$$

如果双原子处于某种状态$|\Psi\rangle$,使得$(\Delta S_i)^2(i=1,2)$满足

$$(\Delta S_i)^2<\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle| \qquad (i=1\text{ 或 }2) \tag{3.4.51a}$$

或

$$F_i=(\Delta S_i)^2-\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle|<0 \qquad (i=1\text{ 或 }2) \tag{3.4.51b}$$

我们就说双原子算符 S_i 分量的涨落被压缩，此时原子系统所处的状态就称为双原子偶极压缩态.

对于双原子系统初始处于由(3.4.29)式所描述的态，容易求得

$$\langle S_i\rangle=0 \qquad (i=1,2) \tag{3.4.52a}$$

$$\langle S_3\rangle=\sin^2(\theta/2)-\cos^2(\theta/2)=-\cos\theta \tag{3.4.52b}$$

$$\langle S_1^2\rangle=\langle\Psi_A(0)\left|\frac{(S_+^{(1)}+S_+^{(2)}+S_-^{(1)}+S_-^{(2)})^2}{4}\right|\Psi_A(0)\rangle$$
$$=\frac{1}{2}(1-\sin\theta\cos\psi) \tag{3.4.52c}$$

$$\langle S_2^2\rangle=\frac{1}{2}(1+\sin\theta\cos\psi) \tag{3.4.52d}$$

此时双原子算符 S_i 分量的涨落值分别为

$$(\Delta S_1)^2=\langle S_1^2\rangle-\langle S_1\rangle^2=\frac{1}{2}(1-\sin\theta\cos\psi) \tag{3.4.53}$$

$$(\Delta S_2)^2=\langle S_2^2\rangle-\langle S_2\rangle^2=\frac{1}{2}(1+\sin\theta\cos\psi) \tag{3.4.54}$$

由(3.4.53)、(3.4.54)及(3.4.52b)式可知，当 $\psi=-\pi,0$ 时

$$(\Delta S_1)^2(\Delta S_2)^2=\frac{1}{4}\langle S_3\rangle^2 \tag{3.4.55}$$

这说明，当选取 $\psi=0,-\pi$ 时，由(3.4.29)式描述的原子态矢是双原子体系的最小不确定态.

下面我们再来看看处在态矢 $|\Psi_A(0)\rangle$[(3.4.29)式]的双原子系统是否能展现原子的偶极压缩. 由(3.4.52b)，(3.4.53)和(3.4.54)式得到

$$F_1=\frac{1}{2}(1-\sin\theta\cos\psi-|\cos\theta|) \tag{3.4.56}$$

$$F_2=\frac{1}{2}(1+\sin\theta\cos\psi-|\cos\theta|) \tag{3.4.57}$$

很明显，在 $\psi=0$ 时，只要取 $\theta\neq 0,\pi/2,\pi$，则有 $F_1<0$，而 $F_2>0$，这说明处在态 $|\Psi_A(0)\rangle$ 的双原子体系，它的原子算符 S_1 分量的涨落可展现出压缩效应，而 S_2 分量不能被压缩；但当 $\psi=-\pi$，$\theta\neq 0,\pi/2,\pi$ 时，有 $F_2\langle 0,F_1\rangle 0$，此时双原子算符 S_2 分量的涨落可被压缩，而 S_1 分量不能被压缩．同时从(3.4.56)和(3.4.57)式还可得到，当 $\theta=\pi/4$，$\psi=0$ 或 $-\pi$ 时，双原子算符 S_1 分量和 S_2 分量的涨落可分别得到最大压缩，最大压缩量为 $(1-\sqrt{2})/4$．与单原子系统相比可以看出，双原子系统中原子偶极矩的最大压缩量比单原子系统的要大（单原子系统中，原子偶极矩色散和吸收分量的最大压缩量为 $-1/16$）．造成这种差别的原因是由于双原子系统和单原子系统中产生压缩的机制不同．在单原子系统中，$\langle S_i^2\rangle=1/4$，S_i 分量的压缩量是由 $\langle S_+\pm S_-\rangle$ 的值决定的；而在双原子系统中，$\langle S_i\rangle=0$，S_i 分量的压缩量则取决于 $\langle S_+^{(1)}S_-^{(2)}+S_-^{(1)}S_+^{(2)}\rangle$ 的值，显然这对应着两种不同的跃迁过程，两种系统中原子偶极压缩的机制不同，因而最大压缩程度不同．

2．偶极-偶极相互作用对双原子算符压缩的影响

下面我们来讨论与光场相互作用的双原子系统中，原子间的偶极-偶极相互作用对双原子偶极压缩效应的影响．同本篇第二章第二节相似，这里我们关心的是双原子系统中偶极矩吸收和色散分量的缓变振幅的涨落值．为此，对双原子体系定义两个缓变正交的厄米算符：

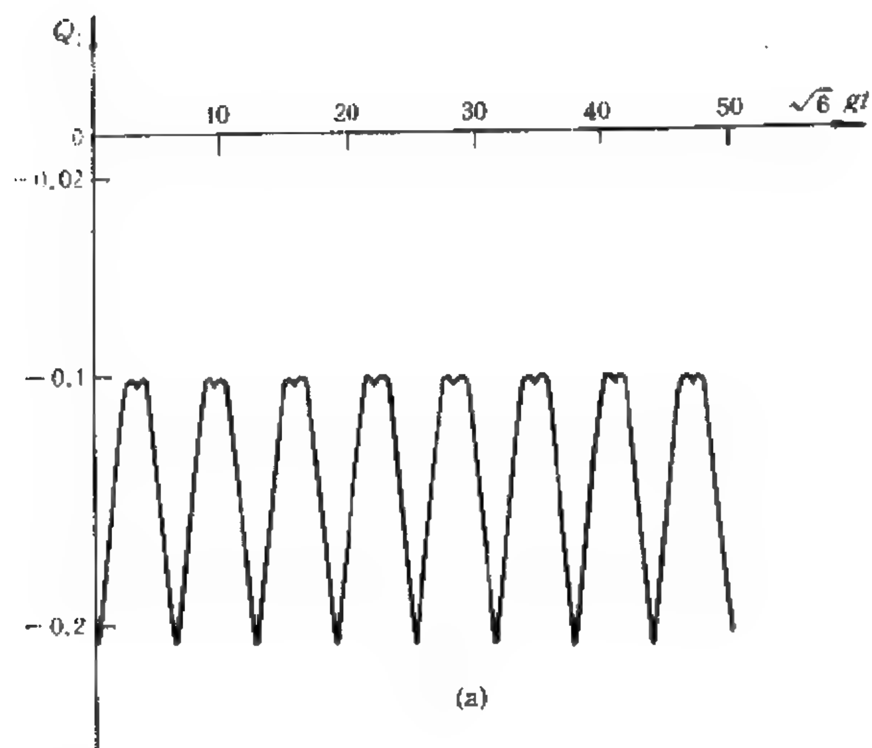
$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}[S_+^{(i)}\exp(-i\omega_0 t)+S_-^{(i)}\exp(i\omega_0 t)] \\
S_2 &= \frac{1}{2i}\sum_{i=1}^{2}[S_+^{(i)}\exp(-i\omega_0 t)-S_-^{(i)}\exp(i\omega_0 t)]
\end{aligned}
\qquad (3.4.58)
$$

显然，它们满足对易关系：

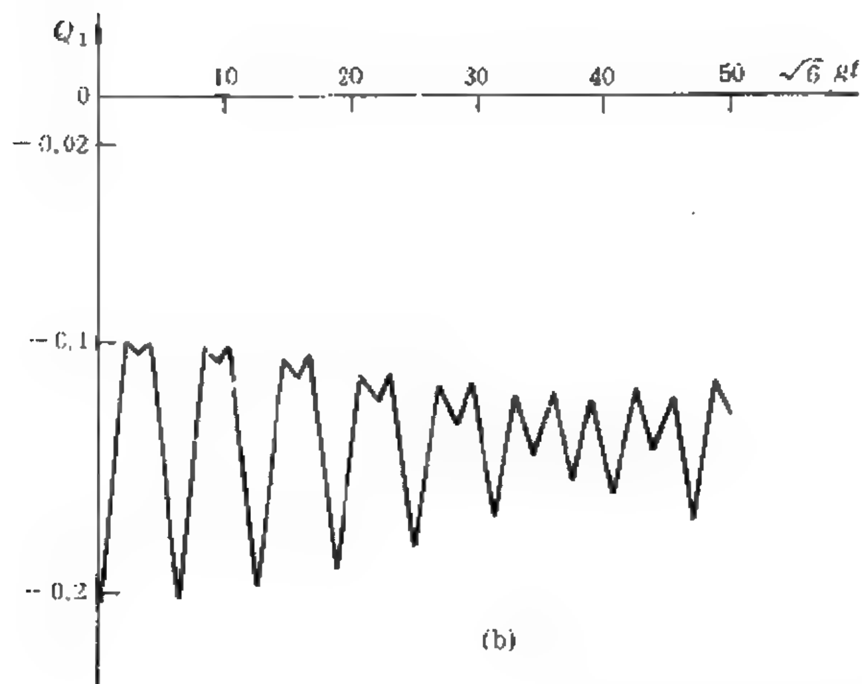
$$[S_1,S_2]=i\sum_{i=1}^{2}S_3^{(i)}=iS_3$$

如果

$$(\Delta S_j)^2<\frac{1}{2}|\langle S_3\rangle|\quad (j=1\text{ 或 }2)$$



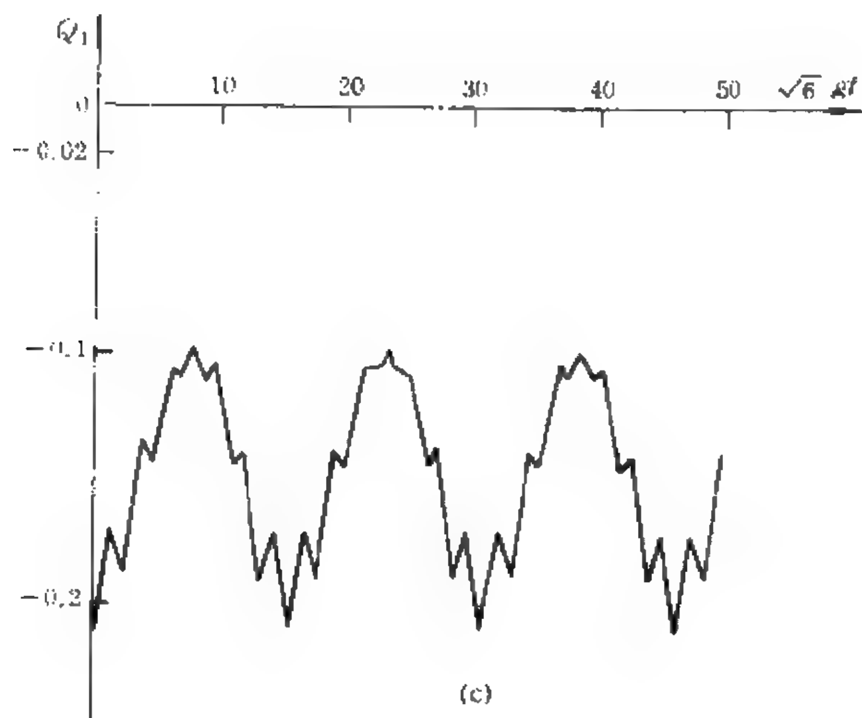
(a)



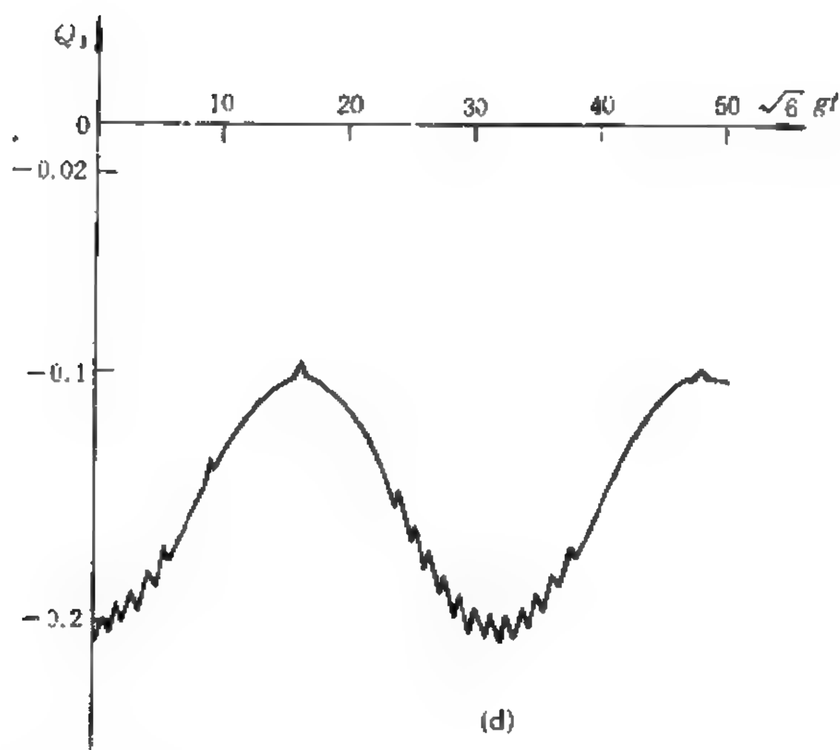
(b)

图 3.4.4 耦合强度 Ω 取不同值时，

(a) $\Omega=0$；(b) $\Omega=0.2g$；



(c)



(d)

Q_1 的时间演化规律($\theta=\pi/4$, $\psi=0$)

(c) $\Omega=5g$; (d) $\Omega=12g$

或

$$Q_j = (\Delta S_j)^2 - \frac{1}{2}|\langle S_3\rangle| < 0 \quad (j = 1 \text{ 或 } 2) \tag{3.4.59}$$

那么就称双原子系统中偶极矩 S_j 分量的涨落被压缩. 由(3.4.31),(3.4.33)及(3.4.58)式可得

$$\begin{aligned}
Q_{\frac{1}{2}} = & \frac{1}{2} \mp \sin\theta\Big\{\frac{2}{3}\cos\psi - \frac{1}{3\sqrt{\Omega^2+24g^2}}[b\cos(at+\psi) \\
& - a\cos(bt+\psi)]\Big\} \\
& + 4\sin^2(\theta/2)\frac{g^2}{\Omega^2-24g^2}\sin^2\frac{\sqrt{\Omega^2+24g^2}}{2}t \\
& - \frac{1}{2}\Big|\sin^2\frac{\theta}{2}\Big[\frac{1}{9} + \frac{8g^2\sin^2\frac{\sqrt{\Omega^2+24g^2}}{2}t}{3(\Omega^2+24g^2)} \\
& - \frac{8(b\cos at - a\cos bt)}{9\sqrt{\Omega^2+24g^2}}\Big] - \cos^2\frac{\theta}{2}\Big|
\end{aligned} \tag{3.4.60}$$

上式右边第二项前的负(正)号与 $Q_1(Q_2)$ 相对应. 很显然,当 $\psi=0$ 时,$Q_2\geqslant0$,即 S_2 分量的涨落不会被压缩. 而当 $\psi=\pi$ 时,则 $Q_1\geqslant0$,这说明 S_1 分量的涨落不会被压缩. 下面来讨论 $\psi=0$ 时,Q_1 随时间演化的情况,看看此时是否出现 S_1 分量被压缩的情况.

如果不计及原子间的耦合,即令 $\Omega=0$,此时 Q_1 简化为

$$\begin{aligned}
Q_1 = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\sqrt{6}gt\right) + \frac{1}{6}\sin^2(\theta/2)\sin^2\sqrt{6}gt \\
& - \frac{1}{2}\left|\sin^2(\theta/2)\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\sin^2\sqrt{6}gt\right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{8}{9}\cos\sqrt{6}gt\right) - \cos^2(\theta/2)\right|
\end{aligned} \tag{3.4.61}$$

图 3.4.4(a)描述了上式的结果,它表明在 $t_k=\frac{2k\pi}{\sqrt{6}g}(k=0,1,2\cdots)$时,$Q_1$ 的值和 $t=0$ 时相同. 可见如果双原子体系初始时处在最佳偶极压缩状态 $|\Psi_A(0)\rangle(\theta=\pi/4,\ \psi=0)$,那么在 $t=t_k$ 的时间

点，Q_1 仍具有负的最大值 $Q_{1m}=(1-\sqrt{2})/4$，也就是在这些时间点，双原子体系偶极矩的噪声可得到最大程度的抑制，压缩量随时间的演化具有周期性．从图 3.4.4(a)中还可以得知，初始处在偶极压缩状态($\theta=\pi/4,\psi=0$)的双原子系统，在时间演化过程中将恒处于压缩状态．这一结果与单原子系统是有所不同的．在单原子系统中，初始处于压缩状态的原子在真空态光场作用下，其偶极矩 S_1 分量的涨落在一定的时间点是不会出现压缩的．造成这些差别的原因是，原子间的合作效应使得初始处在偶极压缩状态的双原子系统，绝不会演化到$|+，+\rangle$或$|-，-\rangle$这些非相干叠加态，系统在时间演化过程中总处于呈现偶极压缩的相干叠加态．

如果 $\Omega\neq0$，也就是计及原子间的耦合效应以后，Q_1 随时间的演化如图 3.4.4(b)，(c)所示，图中分别给出了 $\Omega=0.2g$ 和 $5g$ 时的情况．图中结果表明，在时间演化过程中，双原子系统偶极矩 S_1 分量的压缩量要小于初始时刻的压缩量．这说明对于原子间的偶极-偶极相互作用不很强的情况，原子间的耦合作用对双原子系统的偶极压缩起着减弱的作用．而当原子间的偶极-偶极相互作用较强时[$\Omega=12g$，如图 3.4.4(d)所示]，初始时最强的压缩在一定的时间点又周期性地出现了．这些情况说明，原子间的偶极-偶极相互作用对双原子偶极压缩的影响是一种非线性效应．

第三节　相干光场作用下，双原子系统中粒子布居数的周期崩塌与回复效应及原子的相干捕获现象

对于由哈密顿量(3.4.28)式描述的与单模光场相互作用的双原子系统，假若初始时第 i 个原子处在其激发态$|+\rangle$和基态$|-\rangle$的相干叠加态：

$$|\Psi_A^i(0)\rangle=\cos\theta_i|+\rangle+\sin\theta_i\exp(-i\psi_i)|-\rangle\quad(i=1,2)\tag{3.4.62}$$

即令原子系统的初态为

$$
\begin{aligned}
|\Psi_{A}(0)\rangle = |\Psi_{A}^{1}(0)\rangle \otimes |\Psi_{A}^{2}(0)\rangle = & \cos\theta_1\cos\theta_2|+,+\rangle \\
& +\sin\theta_1\cos\theta_2\exp(-i\psi_1)|-,+\rangle \\
& +\sin\theta_2\cos\theta_1\exp(-i\psi_2)|+,-\rangle \\
& +\sin\theta_1\sin\theta_2\exp[-i(\psi_1+\psi_2)]|-,-\rangle \quad (3.4.63)
\end{aligned}
$$

并假定初始时光场处在相干态：

$$
|\Psi_{F}(0)\rangle = \sum_{n} F_n|n\rangle,\ F_n = \exp(-\frac{1}{2}\bar{n})\bar{n}^{n/2}\exp(in\xi)/\sqrt{n!} \quad (3.4.64)
$$

这里 $\alpha=\sqrt{\bar{n}}\,e^{i\xi}$. 以下为计算简单起见，令 $\xi=0$. 因此双原子-光场耦合系统在初始时刻的态矢为

$$
|\Psi_{AF}(0)\rangle = |\Psi_{A}(0)\rangle \otimes |\Psi_{F}(0)\rangle \quad (3.4.65)
$$

显然，随着时间的演化，系统 t 时刻的态矢在相互作用绘景中可写为

$$
\begin{aligned}
|\Psi_{AF}^{I}(t)\rangle = \sum_{n} [& C_1^{n}(t)|-,-,n\rangle + C_2^{n-1}(t)|+,-,n-1\rangle \\
& + C_3^{n-1}(t)|-,+,n-1\rangle \\
& + C_4^{n-2}(t)|+,+,n-2\rangle] \quad (3.4.66)
\end{aligned}
$$

利用相互作用绘景中的薛定谔方程，可得

$$
\begin{cases}
i\dot{C}_1^{n}(t) = DC_2^{n-1}(t) + DC_3^{n-1}(t) \\
i\dot{C}_2^{n-1}(t) = DC_1^{n}(t) + D'C_4^{n-2}(t) + \Omega C_3^{n-1}(t) \\
i\dot{C}_3^{n-1}(t) = DC_1^{n}(t) + D'C_4^{n-2}(t) + \Omega C_2^{n-1}(t) \\
i\dot{C}_4^{n-2}(t) = D'C_2^{n-1}(t) + D'C_3^{n-1}(t)
\end{cases} \quad (3.4.67)
$$

式中

$$
D=g\sqrt{n},\quad D'=g\sqrt{n-1}
$$

考虑到系统的初始条件(3.4.65)式，可得方程组(3.4.67)式的解

为

$$C_1^n(t)=B_1\exp(iat)+B_2\exp(ibt)-\frac{ADD'}{2(D^2+D'^2)} \qquad (3.4.68)$$

$$C_2^{n-1}(t)=-(2D)^{-1}[aB_1\exp(iat)+bB_2\exp(ibt)]$$

$$+\frac{1}{2}D_1\exp(i\Omega t) \qquad (3.4.69)$$

$$C_3^{n-1}(t)=-(2D)^{-1}[aB_1\exp(iat)+bB_2\exp(ibt)]$$

$$-\frac{1}{2}D_1\exp(i\Omega t) \qquad (3.4.70)$$

$$C_4^{n-2}(t)=D'[B_1\exp(iat)+B_2\exp(ibt)]/D+\frac{AD^2}{2(D^2+D'^2)}. \qquad (3.4.71)$$

这里

$$A=2\{F_{n-2}\cos\theta_1\cos\theta_2-D'F_n\sin\theta_1\sin\theta_2\exp[-i(\psi_1+\psi_2)]/D\} \qquad (3.4.72)$$

$$B_1=(b-a)^{-1}\{DF_{n-1}[\sin\theta_1\cos\theta_2\exp(-i\psi_1)$$

$$+\sin\theta_2\cos\theta_1\exp(-i\psi_2)]$$

$$+(D^2+D'^2)^{-1}bD^2F_n\sin\theta_1\sin\theta_2\exp[-i(\psi_1+\psi_2)]$$

$$+(D^2+D'^2)^{-1}ADD'F_{n-2}\cos\theta_1\cos\theta_2\} \qquad (3.4.73)$$

$$B_2=(a-b)^{-1}\{DF_{n-1}[\sin\theta_1\cos\theta_2\exp(-i\psi_1)$$

$$+\sin\theta_2\cos\theta_1\exp(-i\psi_2)]$$

$$+(D^2+D'^2)^{-1}aD^2F_n\sin\theta_1\sin\theta_2\exp[-i(\psi_1+\psi_2)]$$

$$+(D^2+D'^2)^{-1}ADD'F_{n-2}\cos\theta_1\cos\theta_2\} \qquad (3.4.74)$$

$$a=[-\Omega+\sqrt{\Omega^2+8(D^2+D'^2)}]/2,$$

$$b=[-\Omega-\sqrt{\Omega^2+8(D^2+D'^2)}]/2, \qquad (3.4.75)$$

$$D_1 = F_{n-1}[\sin\theta_1\cos\theta_2\exp(-i\psi_1) - \sin\theta_2\cos\theta_1\exp(-i\psi_2)]$$
$$(3.4.76)$$

将(3.4.68)–(3.4.76)式代入(3.4.66)式，即得相互作用绘景中系统任意时刻的态矢(3.4.66)式的一般表达式，依据这一表达式，即可讨论原子间偶极-偶极相互作用对双原子系统的粒子布居数的时间演化以及原子相干捕获性质的影响.

一、有耦合双原子系统粒子布居数的周期崩塌与回复

利用(3.4.68)–(3.4.76)式可求出系统处在态$|+,+\rangle$，$|-,-\rangle$，$|-,+\rangle$和$|+,-\rangle$的粒子布居概率. 这里仅考虑光场较强的情况，即令$\bar{n}\gg 1$，因此在对n作和时，利用相干光场光子数分布的泊松分布性质，考虑近似

$$F_n \approx F_{n-1} \approx F_{n-2}, \quad D \approx D'$$

是合理的. 那么两个原子均处在基态的概率为

$$\begin{aligned}
P_1(t) = &\sum_n |C_1^n(t)|^2 \\
= &\sum_n F_n^2\{\frac{1}{4}[\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 \\
&- \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\cos(\psi_1 + \psi_2)] \\
&+ \frac{1}{4(b-a)^2}\{(b^2 + a^2)[\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 \\
&+ \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\cos(\psi_1 + \psi_2)] \\
&- 2\Omega D[\sin 2\theta_1\cos\psi_1 + \sin 2\theta_2\cos\psi_2] \\
&+ 8D^2[\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2\cos^2\theta_1 \\
&+ \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\cos(\psi_1 + \psi_2)]\} \\
&- 2(a-b)^{-2}\{\cos(a-b)t[D^2(\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2
\end{aligned}$$

$$\times \sin\phi_1 \sin\phi_2 - \cos 2\theta_1 \cos 2\theta_2)$$

$$- \frac{1}{4} \Omega D (\cos\phi_1 \sin 2\theta_1 + \cos\phi_2 \sin 2\theta_2)]$$

$$+ \frac{D\sqrt{\Omega^2 + 16D^2}}{4} \sin(a-b)t [\sin\phi_1 \cos 2\theta_2 \sin 2\theta_1$$

$$+ \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_1 \sin\phi_2]\}$$

$$+ \frac{1}{2(a-b)} \{\cos at [b(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2)$$

$$+ D(\sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \cos\phi_1 + \cos\phi_2 \cos 2\theta_1 \sin 2\theta_2)]$$

$$+ \sin at [\frac{b}{2} \sin 2\theta_1 \sin(\phi_1 + \phi_2) + D(\sin 2\theta_1 \sin\phi_1$$

$$+ \sin 2\theta_2 \sin\phi_2)] - \cos bt [a(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2$$

$$- \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2) + D(\sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \cos\phi_1$$

$$+ \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_1 \cos\phi_2)] + \sin bt [\frac{a}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin(\phi_1$$

$$+ \phi_2) + D(\sin\phi_1 \sin 2\theta_1 + \sin\phi_2 \sin 2\theta_2)]\}\} \quad (3.4.77)$$

两个原子处在激发态 $|+,+\rangle$ 和基态 $|-,-\rangle$ 之间的粒子布居差为

$$\langle S_3 \rangle = \langle \Psi^1(t) | S_3^{(1)} + S_3^{(2)} | \Psi^1(t) \rangle$$

$$= \sum_n |C_4^{n-2}(t)|^2 - \sum_n |C_1^n|^2 = P_4(t) - P_1(t)$$

$$= \sum_n F_n^2 (b-a)^{-1} \{\cos at [b(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2$$

$$- \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2) + D(\sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \cos\phi_1$$

$$+ \cos\phi_2 \cos 2\theta_1 \sin 2\theta_2)] + \sin at [\frac{b}{2} \sin 2\theta_1 \sin(\phi_1$$

$$+ \phi_2) + D(\sin 2\theta_1 \sin\phi_1 - \sin 2\theta_2 \sin\phi_2)]$$

$$- \cos bt [a(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2)$$

$$+ D(\sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \cos\psi_1 + \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_1 \cos\psi_2)]$$

$$+ \sin bt[\frac{a}{2}\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin(\psi_1 + \psi_2)$$

$$+ D(\sin\psi_1 \sin 2\theta_1 + \sin\psi_2 \sin 2\theta_2)]\} \tag{3.4.78}$$

同理可得两个原子处在态$|+,-\rangle$和$|-,+\rangle$的粒子布居数的相应表达式.

如果令$\theta_1=\theta_2=\pi/2$,即假定两原子初始时均处在基态,那么(3.4.76)式简化为

$$P_1(t) = \sum_n F_n^2 \left\{ \frac{-ab}{2(a-b)^2}\cos(a-b)t + \frac{1}{4} + \frac{a^2+b^2}{4(a-b)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\Omega}{2(a-b)}\sin\frac{\Omega}{2}t\sin\frac{a-b}{2}t + \frac{1}{2}\cos\frac{\Omega}{2}t\cos\frac{a-b}{2}t \right\} \tag{3.4.79}$$

可见,$P_1(t)$随时间演化的规律明显地依赖于原子间偶极-偶极相互作用强度Ω. 下面对此作进一步的分析,如果两个原子相距较远,以致于可以略去两原子间的偶极-偶极相互作用,即令$\Omega=0$,那么此时(3.4.79)式变为

$$P_1(t) = \sum_n F_n^2 \{ 3/8 + \cos(2\sqrt{4n-2}gt)/8$$

$$+ \cos(\sqrt{4n-2}gt)/2 \} \tag{3.4.80}$$

可见这种情况下,$P_1(t)$在时间演化过程中出现了两种系列的崩塌与回复. 这是由于当双原子系统与光场作用时,不仅有单光子跃迁过程,而且还存在着双光子跃迁过程,使得$P_1(t)$中含有两种频率的余弦振荡函数,导致图 3.4.5(a)中出现了两种不同系列的崩塌-回复现象. 图 3.4.5(a)展现了这种情形,图中$P_1(t)$的第二次回复是两种频率余弦函数以幅值 1∶4 叠加的结果,因此回复后的崩塌不再是高斯型的.

如果两原子之间有较弱的偶极-偶极相互作用,$\Omega\neq0$,但满足条件:$g^2\bar{n}\gg\Omega^2$,此时$P_1(t)$可化为

$$P_1(t) = \sum_n F_n^2 \left\{ \frac{1}{8}\cos(a - b)t + \frac{3}{8} \right.$$

$$+ \frac{\Omega}{2(a - b)}\sin\frac{\Omega}{2}t\sin\frac{a - b}{2}t$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cos\frac{\Omega}{2}t\cos\frac{a - b}{2}t \right\} \tag{3.4.81}$$

图 3.4.5(b)展示了上式的时间演化，从图 3.4.5(b)中看到，由于原子间偶极-偶极相互作用的影响，$P_1(t)$在第一次回复以后的时间演化过程，与 $\Omega=0$ 的情况显然不同.

图 3.4.5(c)—(d)分别给出了 $\Omega=4g$，$16g$ 时 $P_1(t)$随时间演化的情况，可以看出，随着时间的演化，$P_1(t)$第一次回复的幅值明显减小，第二次回复的振荡比较有规则性($\Omega=16g$). 同时从图 3.4.5(a)—(d)还可看出，随着 Ω 的增大，$P_1(t)$的回复时间变长.

如果两原子间偶极-偶极相互作用很强，以致于 $\Omega^2 \gg 16g^2\bar{n}$ 时，$P_1(t)$的时间演化如图 3.4.5(e)所示. 这时 $P_1(t)$展现的是较规则的回复-崩塌现象，并且第一次回复的幅值接近于零. 与图 3.1.2 相比可以看到，两者的规律几乎相同，也就是说在 $\Omega^2 \gg 16g^2\bar{n}$ 时，双原子系统的粒子布居数的演化规律与双光子 J-C 模型相同. 这种情况的出现是可以理解的，因为当原子间的偶极-偶极相互作用强度 Ω 满足 $\Omega^2 \gg 16g^2\bar{n}$ 时，考虑到强相干光场光子数的泊松分布性质，对 a 和 b 可作近似

$$a \approx 2g^2(2n-1)/\Omega, \quad b \approx -\Omega \tag{3.4.82}$$

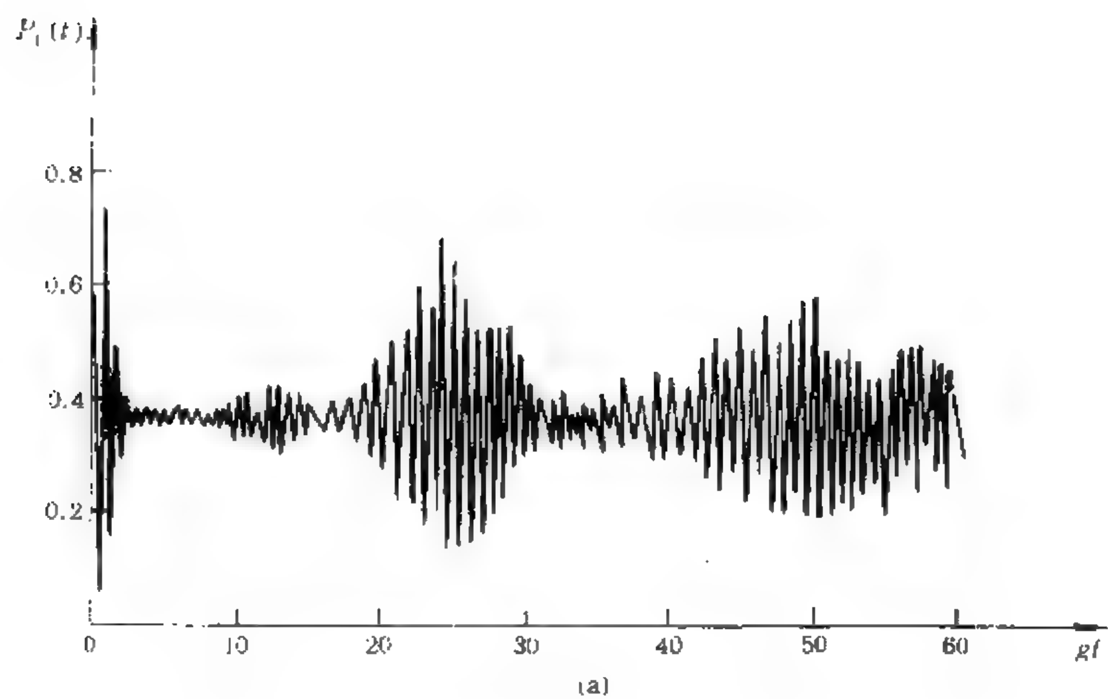
把上式代入(3.4.79)式，即得

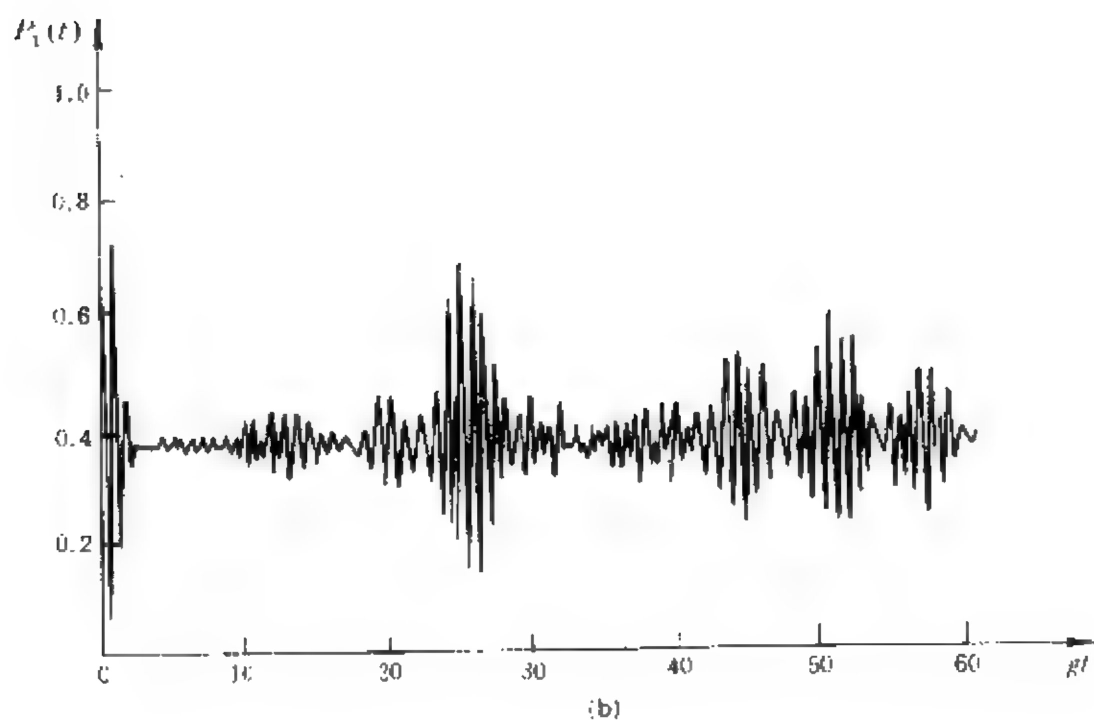
$$P_1(t) \approx \sum_n F_n^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos[2g^2(2n - 1)t/\Omega] \right\}$$

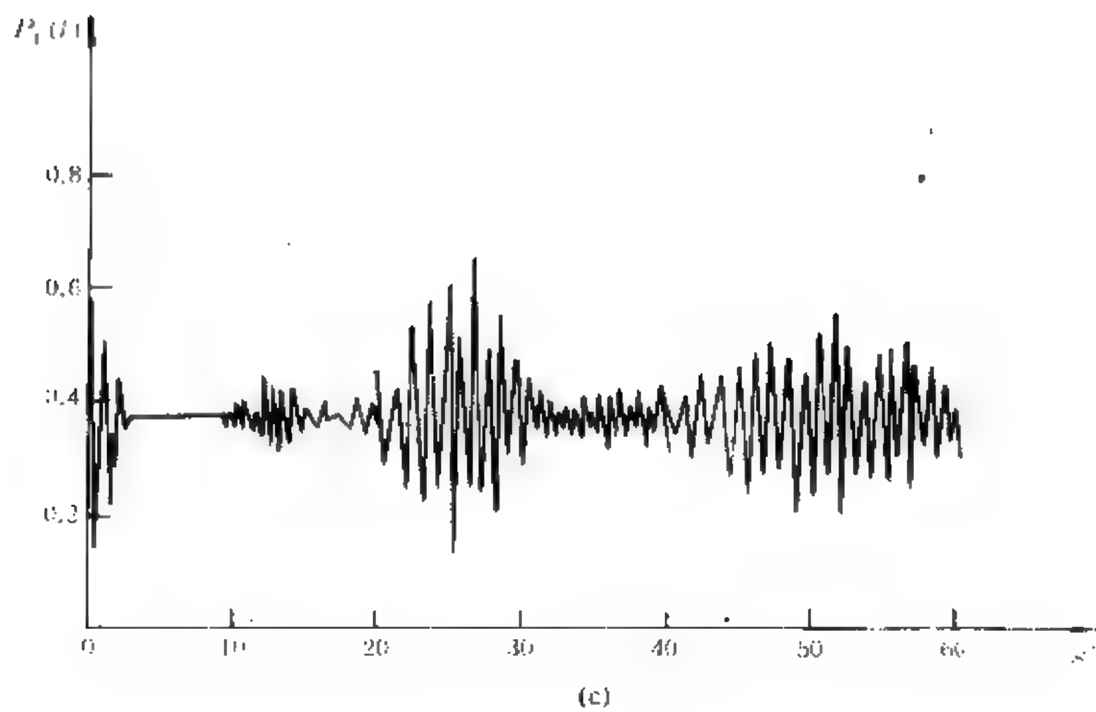
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp[-2\bar{n}\sin^2(2g^2t/\Omega)]\cos[\bar{n}\sin(4g^2t/\Omega)$$

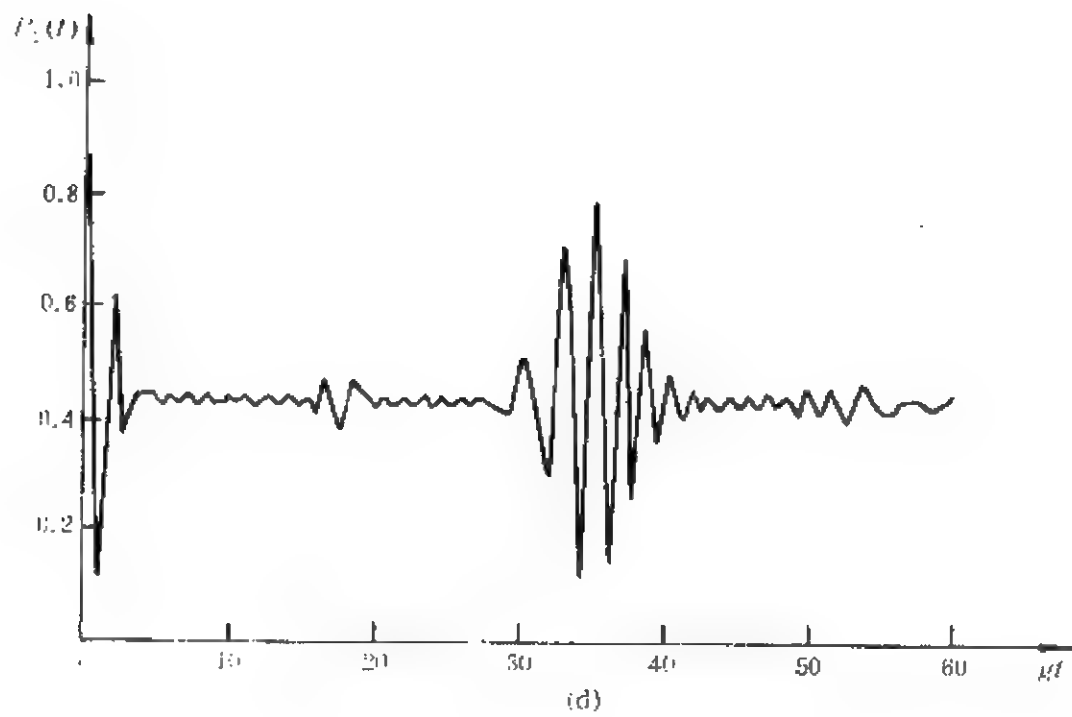
$$- 2g^2t/\Omega] \tag{3.4.83}$$

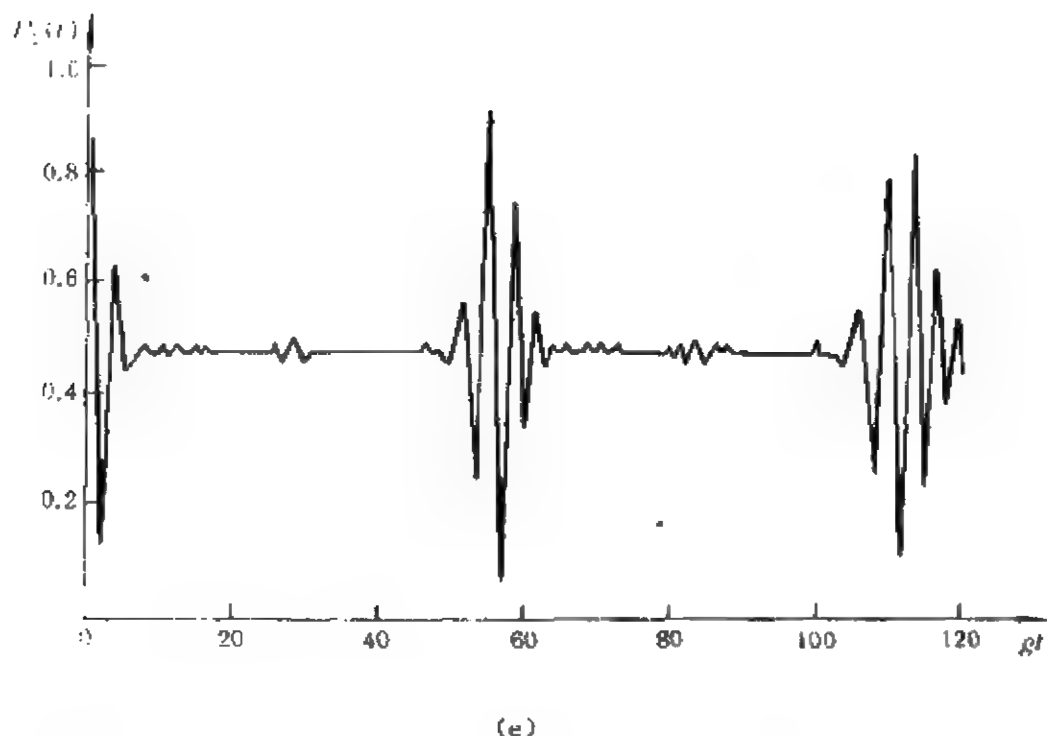
如果令 $\varepsilon=2g^2/\Omega$，则(3.4.83)式和双光子 J-C 模型中的粒子布居


$P_1(t)$
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
30
40
50
60
gt
(a)


$P_1(t)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
30
40
50
60
gt
(b)


$P_1(t)$
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
30
40
50
60
(c)


$P_2(t)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
10
20
30
40
50
60
μt
(d)



(e)

图 3.4.5 耦合强度 Ω 取不同值时，P_1 的时间演化规律($\theta_1=\theta_2=\frac{\pi}{2}$, $\bar{n}=16$)

(a) $\Omega=0$; (b) $\Omega=g$; (c) $\Omega=4g$; (d) $\Omega=16g$; (e) $\Omega=32g$

数(3.1.76)式具有完全相同的形式. 可见与强相干光场作用的双原子系统在原子间偶极-偶极相互作用很强时，其粒子布居数的崩塌-回复规律与双光子 J-C 模型完全一致，即此时双光子跃迁占据主导地位. 这时我们不妨来看看t时刻系统的态矢，在$\theta_1=\theta_2=\pi/2$时，(3.4.72)－(3.4.76)式简化为

$$A=-2F_n,\quad B_1=bD^2(b-a)^{-1}(D^2+D'^2)^{-1}$$

$$B_2=aD^2(a-b)^{-1}(D^2+D'^2)^{-1},\quad D_1=0 \qquad (3.4.84)$$

考虑到 $\Omega^2\gg 16g^2n$，把(3.4.84)式代入(3.4.68)—(3.4.71)式，则

$$C_2^{n-1}(t)=C_3^{n-1}(t)\approx 0 \qquad (3.4.85)$$

$$C_1^n(t)\approx\frac{1}{2}F_n\exp[i2g^2(2n-1)gt/\Omega]-\frac{1}{2}F_n$$

$$=-iF_n\exp[ig^2(2n-1)t/\Omega]\sin[g^2(2n-1)t/\Omega] \qquad (3.4.86)$$

$$C_4^{n-2}(t)\approx F_n\exp[ig^2(2n-1)t/\Omega]\cos[g^2(2n-1)t/\Omega] \qquad (3.4.87)$$

由于这里考察的是强相干光场，因此

$$n-1/2\approx\sqrt{n(n-1)} \tag{3.4.88}$$

把(3.4.88)式代入(3.4.86)—(3.4.87)式，则

$$C_1^n(t)=iF_n\exp[i\epsilon\sqrt{n(n-1)}t]\sin\epsilon\sqrt{n(n-1)}t \tag{3.4.89}$$

$$C_1^{n-2}(t)=F_n\exp[i\epsilon\sqrt{n(n-1)}t]\cos\epsilon\sqrt{n(n-1)}t \tag{3.4.90}$$

这里已令 $\epsilon=2g^2/\Omega$. 如果忽略掉(3.4.89)，(3.4.90)式中不重要的相位因子 $\exp[i\epsilon\sqrt{n(n-1)}t]$，那么此时双原子-光场耦合系统的态矢就与双光子 J-C 模型的态矢完全一致. 可见在强耦合的情况下，当光场为强相干光场时，双原子-光场相互作用系统完全可以用双光子 J-C 模型来描述.

在强相干光场作用下，具有很强耦合的双原子系统，其粒子布居数展现出双光子崩塌-回复现象，从物理上可以这样理解：由于强耦合的双原子系统可以等效为一个级联三能级原子，原子间偶极-偶极相互作用造成了中间能级的移位，因而使系统的单光子跃迁失谐，使得系统中的双光子跃迁占据主要地位，因此粒子布居数的崩塌-回复性质与双光子 J-C 模型相同.

以上的讨论表明，原子间耦合强度对双原子系统粒子布居数的崩塌-回复效应有很强的影响.

二、有耦合双原子系统中原子的相干捕获

上一章中我们知道，当原子处在适当的初态时，原子的粒子布居数会呈现不随时间变化的情况，出现原子的相干捕获现象. 那么对于与强相干光场作用的双原子系统，是否也会出现原子的相干捕获现象呢？下面来讨论这一问题.

从(3.4.77)式可知，若 θ_i、ϕ_i 满足下述方程：

$$D(\sin2\theta_1\sin2\theta_2\sin\phi_1\sin\phi_2-\cos2\theta_1\cos2\theta_2)$$

$$-\frac{1}{4}\Omega(\cos\phi_1\sin2\theta_1+\cos\phi_2\sin2\theta_2)=0 \tag{3.4.91}$$

$$\sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \sin\psi_1 + \sin\psi_2 \cos 2\theta_1 \sin 2\theta_2 = 0 \quad (3.4.92)$$

$$b(\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2)$$
$$+ D(\cos\psi_1\sin 2\theta_1\cos 2\theta_2 + \cos\psi_2\cos 2\theta_1\sin 2\theta_2) = 0 \quad (3.4.93)$$

$$a(\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2)$$
$$+ D(\cos\psi_1\sin 2\theta_1\cos 2\theta_2 + \cos\psi_2\cos 2\theta_1\sin 2\theta_2) = 0 \quad (3.4.94)$$

$$\frac{b}{2}\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\sin(\psi_1+\psi_2)$$
$$+ D(\sin\psi_1\sin 2\theta_1 + \sin\psi_2\sin 2\theta_2) = 0 \quad (3.4.95)$$

$$\frac{a}{2}\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\sin(\psi_1+\psi_2)$$
$$+ D(\sin\psi_1\sin 2\theta_1 + \sin\psi_2\sin 2\theta_2) = 0 \quad (3.4.96)$$

则 $P_1(t)=$常数，$P_4(t)-P_1(t)=$常数，从而出现原子的相干捕获现象. 求解方程(3.4.91)—(3.4.96)式可得下述产生原子相干捕获的条件：

$$\text{Ⅰ}: \psi_1=\psi_2=0, \quad \theta_1+\theta_2=\pi/2, \quad \theta_1=\frac{1}{2}\arcsin(a/2D) \quad (3.4.97)$$

$$\text{Ⅱ}: \psi_1=-\psi_2=\arccos(-a/2D), \quad \theta_1=\theta_2=\pi/4 \quad (3.4.98)$$

$$\text{Ⅲ}: \psi_1=\psi_2=0, \quad \theta_1=\pi/4, \quad \theta_2=-\pi/4 \quad (3.4.99)$$

也就是说，当双原子系统的初态满足(3.4.97)—(3.4.99)式时，均可以发生原子的相干捕获现象. 同时，由于(3.4.97)、(3.4.98)式中含有参量 a，可见相干捕获的条件是依赖于原子间的偶极-偶极相互作用强度 Ω 的，但由条件Ⅲ[(3.4.99)式]描述的原子初态条件却与 Ω 无关.

当 $\Omega=0$ 时，(3.4.97)和(3.4.98)式化为

$$\theta_1=\theta_2=\pi/4, \quad \psi_1=\psi_2=0 \quad (3.4.100)$$

这时双原子系统的粒子布居数由(3.4.77)式可知

$$P_i(t)=P_i(0)=1/4 \quad (i=1,2,3,4) \quad (3.4.101)$$

并且由(3.4.99)式描述的双原子初态的粒子布居数也是满足上式，因此在不考虑原子间偶极-偶极相互作用时，发生双原子相干捕获的原子初态条件即为(3.4.99)—(3.4.100)式.

当 $\Omega \neq 0$ 时，把(3.4.98)式代入(3.4.77)式可得

$$P_1(t)=P_1(0)=1/4 \tag{3.4.102}$$

这表明，虽然条件Ⅱ依赖于 Ω 的取值，但 $P_1(t)$ 的值和条件Ⅲ的结果一样，并不依赖于 Ω 的取值. 但对于条件Ⅰ，由(3.4.77)式可知

$$P_1(t)\approx(-\Omega+\sqrt{\Omega^2+16g^2\bar{n}})^2/(64g^2\bar{n})=P_1(0) \tag{3.4.103}$$

这说明，此时 $P_1(t)$ 的值取决于原子间的偶极-偶极相互作用. $P_1(t)$ 和 Ω 的依赖关系如图3.4.6所示. 图中表明，$P_1(t)$ 随着 Ω

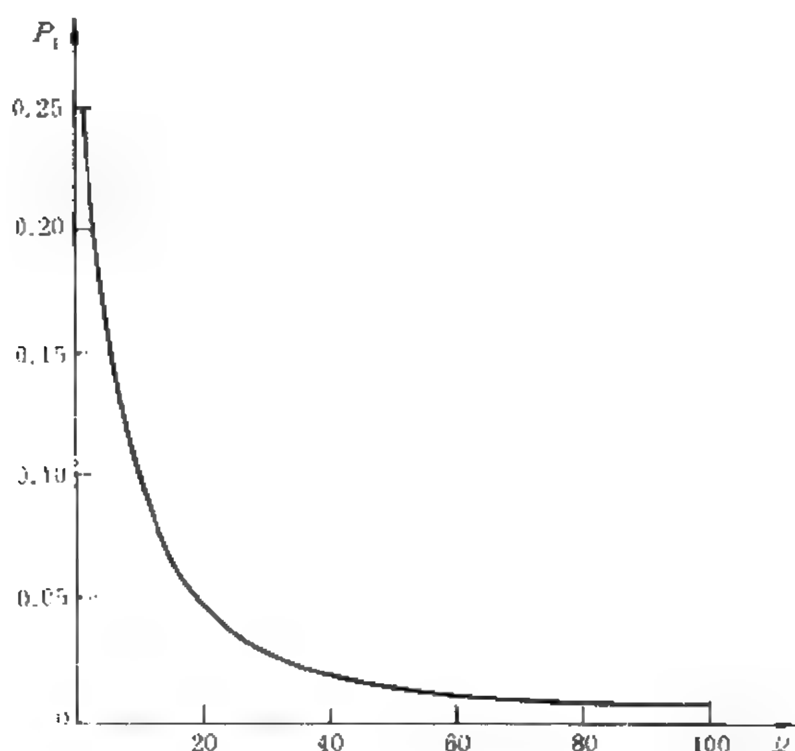


图 3.4.6　$P_1(t)$ 与 Ω 的依赖关系

的增大非线性地从 1/4 减小到 0. 这是因为与能态 $|+,-\rangle$ 和 $|-,+\rangle$ 相对应的能级在偶极-偶极相互作用下发生能级移位，导致单原子跃迁(如 $|+,+\rangle\longleftrightarrow|-,+\rangle\longleftrightarrow|-,-\rangle$ 和 $|+,+\rangle$

$\longleftrightarrow|+,-\rangle\longleftrightarrow|-,-\rangle$)的概率减小，使得原子在$|+,-\rangle$和$|-,+\rangle$的粒子布居值增加，从而$P_1(t)$的值减小. 当$\Omega^2\gg 16g^2n$时，这时由条件Ⅰ描述的双原子初态实际上是$|-,+\rangle$或$|+,-\rangle$，在这种情况下，双原子在原子间的强偶极-偶极相互作用下只能在$|+,-\rangle$和$|-,+\rangle$振荡，故系统发生单光子跃迁的概率为0，系统不再辐射光子，从而双原子在基态(或激发态)的粒子布居值为0.

值得指出的是，对于条件Ⅲ我们看到，此时

$$P_i(t)=P_i(0)=1/4\quad(i=1,2,3,4)\qquad(3.4.104)$$

这表明在强相干光场作用下，如果双原子初始时处在由条件Ⅲ这一与Ω值无关的原子初态，那么随时间演化的粒子布居数也与Ω无关. 换句话说，此时原子的动力学行为与偶极-偶极相互作用无关，即与不考虑原子间的偶极-偶极相互作用的结果相同. 这就意味着，由于强光场与原子的相互作用，使得原子间的偶极-偶极相互作用被屏蔽了. 可见在一定条件下，强光场对原子间的耦合具有屏蔽效应.

下面我们再来看看双原子系统发生相干捕获的三种原子初态具有什么样的性质. 同第三章一样，这里也用原子-光场的修饰态来分析. 显然，系统的修饰态可以表示为

$$|n_j\rangle=C_{1jn}|-,-,n\rangle+C_{2jn}|-,+,n-1\rangle+C_{3jn}|+,-,n-1\rangle$$
$$+C_{4jn}|+,+,n-2\rangle\quad(i=1,2,3,4)\qquad(3.4.105)$$

在相互作用绘景中，通过求解系统的本征值方程

$$V^{\mathrm{I}}|n(j)\rangle=\omega_{jn}|n(j)\rangle\qquad(3.4.106)$$

式中

$$V^{\mathrm{I}}=\sum_{i=1}^{2}g(a^+S_-^{(i)}+aS_+^{(i)})+\Omega(S_+^{(1)}S_-^{(2)}+S_-^{(1)}S_+^{(2)})$$
$$(3.4.107)$$

容易得到本征值 ω_{jn} 和相应的修饰态 $|n(j)\rangle$:

$$\omega_{1n}=0,\quad |n(1)\rangle=-|-,-,n\rangle+|+,+,n-2\rangle \tag{3.4.108}$$

$$\omega_{2n}=-\Omega_1,\quad |n(2)\rangle=|-,+,n-1\rangle-|+,-,n-1\rangle \tag{3.4.109}$$

$$\omega_{3n}=-a,\quad |n(3)\rangle=|-,-,n\rangle-(a/2D)|-,+,n-1\rangle -(a/2D)|+,-,n-1\rangle+|+,+,n-2\rangle \tag{3.4.110}$$

$$\omega_{4n}=-b,\quad |n(4)\rangle=|-,-,n\rangle-(b/2D)|-,+,n-1\rangle -(b/2D)|+,-,n-1\rangle+|+,+,n-2\rangle \tag{3.4.111}$$

将由条件Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ描述的三种原子初态用系统的修饰态展开,可得

$$\text{Ⅰ}:|\Psi^{\text{Ⅰ}}_{AF}(0)\rangle=\sum_n F_n\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta_1|n(4)\rangle-\frac{1}{2}\cos 2\theta_1|n(2)\rangle\right] \tag{3.4.112}$$

$$\text{Ⅱ}:|\Psi^{\text{Ⅱ}}_{AF}(0)\rangle=\sum_n F_n\left[\frac{1}{2}|n(3)\rangle-\frac{i}{2}\sin\phi_1|n(2)\rangle\right] \tag{3.4.113}$$

$$\text{Ⅲ}:|\Psi^{\text{Ⅲ}}_{AF}(0)\rangle=\sum_n \frac{1}{2}F_n[|n(1)\rangle-|n(2)\rangle] \tag{3.4.114}$$

这里已利用了强场条件

$$F_n\approx F_{n-1}\approx F_{n-2} \tag{3.4.115}$$

从(3.4.112)—(3.4.114)式可以看到,发生双原子相干捕获的初态条件分别是修饰态 $|n(2)\rangle$ 和 $|n(j)\rangle$ $(j=1,3,4)$ 的叠加态.这一结果与第三章中的单原子系统是不相同的,在那里发生原子相干捕获的初态只与系统的某一修饰态有关.为分析这种差别,我们分别来看看三种原子初态在 t 时刻的演化行为,由(3.4.71)

式可知

$$|\Psi_{AF}^{1}(t)\rangle = \sum_{n} F_n\Big[\frac{1}{2}\sin 2\theta_1 e^{i\delta t}|n(4)\rangle - \frac{1}{2}\cos 2\theta_1 e^{i\Omega t}|n(2)\rangle\Big] \tag{3.4.116}$$

$$|\Psi_{AF}^{1}(0)\rangle = \sum_{n} F_n\Big[\frac{1}{2}e^{i\alpha t}|n(3)\rangle - \frac{i}{2}\sin\phi_1 e^{i\Omega t}|n(2)\rangle\Big] \tag{3.4.117}$$

$$|\Psi_{AF}^{1}(0)\rangle = \sum_{n} \frac{1}{2}F_n[\, n(1)\rangle - e^{i\Omega t}|n(2)\rangle] \tag{3.4.118}$$

从上面三式看到，t 时刻系统处在修饰态 $|n(j)\rangle$ 的概率与 $t=0$ 时刻相同，由于修饰态 $|n(2)\rangle$ 与裸原子态 $|+,+\rangle$ 和 $|-,-\rangle$ 无关，因此 $P_1(t)$ 和 $P_1(t)$ 只依赖于系统处在 $|n(j)\rangle$ 的概率幅值. 又因为修饰态 $|n(j)\rangle$ 是系统的定态，所以双原子处在激发态 $|+,+\rangle$ 和基态 $|-,-\rangle$ 的粒子布居值和初始时的值相同，因此双原子的粒子布居差不呈现出崩塌-回复效应. 从双原子与光场相互作用的角度来看，由于反对称态 $2^{-1/2}(|+,-\rangle-|-,+\rangle)$ 是与光场-原子相互作用无关的状态，它只受到原子间的偶极-偶极相互作用的影响，因此初始时双原子处在 $|n(2)\rangle$ 的布居数对 t 时间系统处在 $|n(j)\rangle(j=1,3,4)$ 的概率幅值是没有影响的. 所以对 $P_1(t)$ 和 $P_4(t)$ 的值起决定作用的只是双原子初始时在对称态 $|+,+\rangle$，$|-,-\rangle$ 和 $2^{-1/2}(|+,-\rangle+|-,+\rangle)$ 的布居值.

总之在强相干光场作用下，有耦合双原子系统的相干捕获现象，与单原子系统中的情况不同，在这里原子的相干捕获现象发生在原子初态是原子-光场修饰态的反对称态与任一对称态的叠加态.

参 考 文 献

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, Quantum Mechanics, P. 1120, John Wiley & Sons, 1977.

[2] D. P. Craig, Molecular Quantum Electrodynamics -- An Introduction to Radiation-Molecular Interaction, P. 142, Acamedic Press, 1984.

[3] R. H. Lehmberg, *Phys. Rev.*, **A2**, 889 (1970).
[4] R. Friedberg, S. R. Hartmann and J. T. Manssan, *Phys. Rep.*, **7**, 101(1973).
[5] P. Carbonaro and F. Persico., *Phys. Lett.*, **A76**, 37 (1980).
[6] M. Gross and S. Haroche, *Phys. Rep.*, **93**, 301 (1982).
[7] R. D. Griffin and S. M. Harris, *Phys. Rev.*, **A25**, 1528 (1982).
[8] Z. Deng, *Opt. Commun.*, **54**, 222 (1985).
[9] S. M. Barnett and M. D. A. Dupertuis, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**, 505 (1987).
[10] K. Yamada and P. R. Berman, *Phys. Rev.*, **A41**, 453 (1990).
[11] F. Seminara and C. Leonardi, *Phys. Rev.*, **A42**, 5695 (1990).
[12] G. Kurizdki, *Phys. Rev.*, **A43**, 2599 (1991).
[13] A. Joshi, R. R. Puri and S. V. Lawande, *Phys. Rev.*, **A44**, 2135 (1991).
[14] Z. Ficek, *Phys. Rev.*, **A44**, 7759 (1991).
[15] 彭金生、李高翔、周鹏, *Chin. J. Lasers*, **1**, 221 (1992).
[16] G. V. Varada and G. S. Agrawal, *Phys. Rev.*, **A45**, 6721 (1992).
[17] 彭金生、李高翔, *Phys. Rev.*, **A47**, 4212 (1993).
[18] 彭金生、李高翔, *Phys. Lett.*, **A176**, 230 (1993).
[19] P. A. Brau, V. N. Ostrovsky and N. V. Prudpv, *Phys. Rev.*, **A48**, 941 (1993).
[20] Georg and P. Meystre, *Phys. Rev.*, **A48**, 3365 (1993).
[21] 李高翔、彭金生, 光电子·激光, 376 (1994).

第五章　激光场作用下原子的自电离

我们知道，处于基态的原子吸收一定的激发能量以后，它的电子将被激发到能量较高的激发态. 如果激发态能量很高达到电离限以后，电子会脱离原子成为自由电子，原子发生电离。由于自由电子的能量是任意的，所以当受激原子吸收电离限以上的能量以后，原子系统将由束缚态跃迁到连续态. 对于多电子原子，它外层电子的电离限显然比内层电子的电离限要低，因此电离内层电子比电离外层电子需要更大的能量.

在强激光场作用下，原子除了在不同分离态之间的跃迁，展现原子行为的量子特性如崩塌-回复、相干捕获等效应以外，如果激光光子能量很高，那么原子中处于束缚态的外层电子，也可能吸收高于外层电离限的高能光子而脱离原子成为自由电子，使原子跃迁到连续态，原子实现光电离过程. 另一方面，处于束缚态的内层电子，则可能在吸收高能光子后，由于激光光子的能量低于内层电子的电离限而跃迁到一些新分离态. 处于这些分离态的电子会同处于连续态的电子发生库仑相互作用，使系统发生组态混合. 此外，同时激发两个外层电子的电离限，比激发一个外层电子的电离限要高，因此激发两个外层电子时，原子也可能处于一个电子位于连续态，而另一个电子处在分离态的组态混合. 处于这种组态的原子具有自电离性质，所以称这些态为原子的自电离态. 在激光场作用下，原子处于自电离态而具有自电离性质，是光场作用下多电子原子的重要量子特性，它也是近年来原子、分子物理学研究中的重要课题之一. 本章将概述有关原子自电离理论研究的基本内容.

首先介绍 Fano 关于一个分离态和一连续区相互作用系统的理论处理，讨论弱激光场作用下原子的自电离，然后研究强激光场作用下原子的自电离及光电子谱的特性，最后讨论近年来在理论

和实验研究均很活跃的原子阈上离化性质.

第一节　弱激光场作用下原子的自电离

在激光场作用下,多电子原子可能处于自电离态,即一个电子处于束缚分离态,而另一个电子处于连续态的组态,其能级图如图3.5.1所示. 一方面,处于某一束缚能级$|a\rangle$的原子的外层电子,吸收能量高于电离限的光子后,从束缚态跃迁到连续态$|c, \omega\rangle$,在连续态的电子具有正的能量. 它将脱离原子而成为自由电子,实现光电离过程. 另一方面,处于束缚态$|a\rangle$的原子的内层电子,吸收高于其电离限的光子后,原子会跃迁到新的分离态$|b\rangle$,它嵌在连续区中,与连续区交叠. 由于电子间的库仑相互作用使束缚分离态与连续态混合,构成原子的自电离态. 原子中电子间的库仑相互作用,称为组态相互作用. 从能级$|a\rangle$吸收一个光子跃迁到能级$|b\rangle$的电子,会在组态相互作用的影响下跃迁到$|c, \omega\rangle$,使这个电子也变成为一个自由电子,这就是由组态相互作用导致的自电离过程. 这一跃迁过程中不存在光子的吸收和发射,我们把与连续能级交叠的原子能级$|b\rangle$称为自电离能级,并把由组态相互作用导致的电离现象称为自电离. 这样我们看到,处于束缚态$|a\rangle$的原子在光场作用下发生的电离,是由从$|a\rangle\longleftrightarrow|c, \omega\rangle$以及由$|a\rangle\longleftrightarrow|b\rangle\longleftrightarrow|c, \omega\rangle$的两种跃迁过程共同作用的结果,在讨论原子的离化性质时,应计及这两种过程的效应. 由于涉及到两种跃迁过程,理论处理比较复杂,为此我们先对如图3.5.1所示的模型进行简化处理.

由于原子的组态相互作用只发生在自电离态$|b\rangle$和连续态矢集$\{|c, \omega\rangle\}$之间,与束缚态$|a\rangle$无关,因此可以把$|b\rangle$和连续态矢集$\{|c, \omega\rangle\}$作为原子能级的一个子空间,在这个子空间中,原子的哈密顿量写为

$$H_{A}=H_{A0}+T \tag{3.5.1}$$

式中H_{A0}为不考虑组态相互作用时,原子在由$|b\rangle$和$\{|c, \omega\rangle\}$构成的子空间中的哈密顿量,即

$$H_{A0} = E_b|b\rangle\langle b| + \int_0^{\infty} d\omega\omega|c, \omega\rangle\langle c, \omega| \quad (\hbar = 1) \tag{3.5.2}$$

T 代表原子在$|b\rangle$和$\{|c, \omega\rangle\}$之间的组态相互作用：

$$T = \int_0^{\infty} d\omega T_{b\omega}|b\rangle\langle c, \omega| + h. c. \tag{3.5.3}$$

式中$T_{b\omega}$为组态相互作用矩阵元：

$$T_{b\omega} = \langle b|T|c, \omega\rangle \tag{3.5.4}$$

如果能够找到一组新的连续态矢集$\{|F, \omega\rangle\}$，满足

$$H_A|F, \omega\rangle = \omega|F, \omega\rangle \tag{3.5.5}$$

即$\{|F, \omega\rangle\}$是包括组态相互作用的原子哈密顿量H_A的本征态矢集，那么图 3.5.1 所示的模型就等效为如图 3.5.2 所示的模型，这时原子在自电离能级$|b\rangle$和连续态$|c, \omega\rangle$之间的相互作用归并到连续态$|F, \omega\rangle$中，从而使包括自电离过程的光电离问题变得简单. 下面我们来求解H_A的本征态矢集$\{|F, \omega\rangle\}$，即通常所称的Fano 本征态.

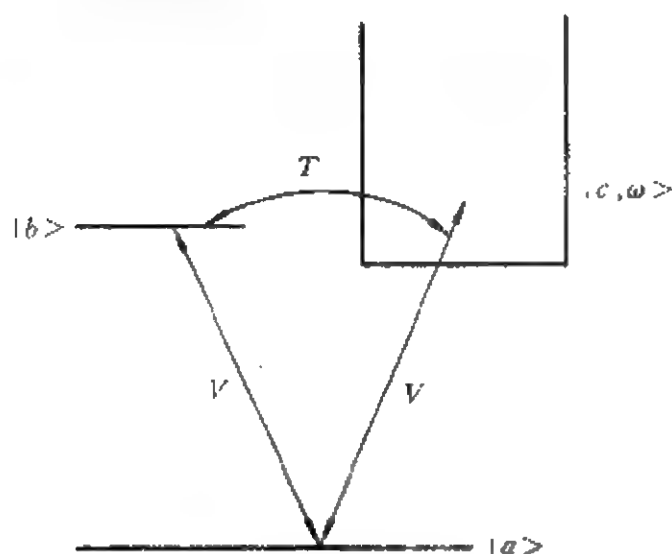


图 3.5.1 激光场作用下原子自电离能级示意图

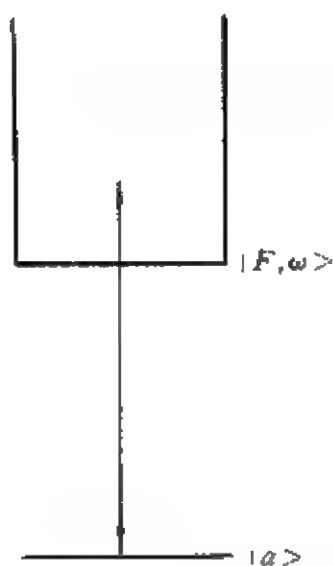


图 3.5.2 包括组态相互作用的 Fano 本征态$\{|F, \omega\rangle\}$的能级示意图

显然，Fano 本征态$|F, \omega\rangle$在由$|b\rangle$和连续态矢集$\{|c, \omega\rangle\}$构成的子空间中可以表示为

$$|F, \omega\rangle = B(\omega)|b\rangle + \int_0^\infty d\omega' C(\omega,\omega')|c, \omega'\rangle \quad (3.5.6)$$

把上式代入(3.5.5)式，并在两边左乘$\langle b|$，考虑(3.5.1)—(3.5.4)式可得

$$\langle b|(H_{A0} + T)|[B(\omega)\ b\rangle + \int_0^\infty d\omega' C(\omega, \omega')|c, \omega'\rangle]$$

$$= \omega\langle b|[B(\omega)|b\rangle + \int_0^\infty d\omega' C(\omega, \omega')|c, \omega'\rangle]$$

$$(3.5.7)$$

由于$|b\rangle$，$|c, \omega\rangle$满足

$$\langle b|b\rangle = 1$$
$$\langle c, \omega'|c, \omega\rangle = \delta(\omega - \omega') \quad (3.5.8)$$
$$\langle b|c, \omega\rangle = 0$$

因此(3.5.7)式化为

$$(\omega - E_b)B(\omega) = \int_0^\infty d\omega' C(\omega, \omega')T_{b\omega'} \quad (3.5.9)$$

同样地，在(3.5.5)式两边左乘$\langle c, \omega'|$可得

$$(\omega-\omega')C(\omega,\omega')=T_{\omega',b}B(\omega) \quad (3.5.10)$$

联立(3.5.9)和(3.5.10)式，即可得到关于概率幅$B(\omega)$的方程，但是必须注意到$\omega=\omega'$是函数$(\omega-\omega')^{-1}$的一阶奇点，因此在由(3.5.10)式求$C(\omega, \omega')$时，应把它写成主部函数和δ函数的形式，即

$$C(\omega, \omega')=B(\omega)T_{\omega' b}\left\{\frac{P}{\omega-\omega'}+Z(\omega)\delta(\omega-\omega')\right\} \quad (3.5.11)$$

这里$Z(\omega)$是一个待定的、与ω有关的函数. 将(3.5.11)式代入(3.5.9)式得到

$$(\omega - E_b)B(\omega) = B(\omega)\int_0^\infty d\omega' |T_{b\omega'}|^2\left[\frac{P}{\omega-\omega'}\right.$$

$$\left. + Z(\omega)\delta(\omega - \omega')\right] \quad (3.5.12)$$

一般说来，$B(\omega)\neq 0$，因此(3.5.12)式化为

$$Z(\omega)=[\omega-E_b'(\omega)]/|T_{b\omega}|^2 \qquad (3.5.13)$$

式中

$$E_b'(\omega) = E_b + \int_0^\infty d\omega' |T_{b\omega'}|^2 \frac{P}{\omega-\omega'} \qquad (3.5.14)$$

上式表明，原子组态间的相互作用使得能级$|b\rangle$的本征能量有一个移动．把(3.5.11)，(3.5.13)式代入(3.5.6)式，得

$$\begin{aligned}
|F,\omega\rangle &= B(\omega)|b\rangle + \int_0^\infty d\omega' B(\omega) T_{\omega' b}\frac{P}{\omega-\omega'}|c,\omega'\rangle \\
&\quad + \int_0^\infty d\omega' B(\omega) T_{\omega' b} Z(\omega)\delta(\omega-\omega')|c,\omega'\rangle \\
&= B(\omega)\Big[|b\rangle + \frac{\omega-E_b'(\omega)}{T_{b\omega}}|c,\omega\rangle \\
&\quad + \int_0^\infty d\omega' T_{\omega' b}\frac{P}{\omega-\omega'}|c,\omega'\rangle\Big] \qquad (3.5.15)
\end{aligned}$$

上式中的 $B(\omega)$可以利用$|F,\omega\rangle$的正交归一化性质求出．由于

$$\begin{aligned}
\langle F,\omega'|F,\omega\rangle &= \delta(\omega-\omega') \\
&= B^*(\omega')B(\omega)\Big\{1+\int_0^\infty d\omega'' |T_{b\omega''}|^2\Big[\frac{P}{\omega'-\omega''} \\
&\quad + Z(\omega')\delta(\omega'-\omega'')\Big]\times\Big[\frac{P}{\omega-\omega''} \\
&\quad + Z(\omega)\delta(\omega-\omega'')\Big]\Big\} \\
&= B^*(\omega')B(\omega)\Big\{1+\int_0^\infty d\omega'' |T_{b\omega''}|^2\Big[\frac{P}{\omega'-\omega''} \\
&\quad \times\frac{P}{\omega-\omega''} + Z(\omega')Z(\omega)\delta(\omega'-\omega'')\delta(\omega \\
&\quad -\omega'') + \frac{P}{\omega'-\omega''}Z(\omega)\delta(\omega-\omega'') \\
&\quad + \frac{P}{\omega-\omega''}Z(\omega')\delta(\omega'-\omega'')\Big]\Big\} \qquad (3.5.16)
\end{aligned}$$

为计算上式中的积分，注意到函数$(\omega'-\omega'')^{-1}$可以有如下的傅里叶积分表述形式：

$$\frac{P}{\omega'-\omega''}=-\pi i\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{k}{|k|}\exp[2\pi ik(\omega'-\omega'')] \tag{3.5.17}$$

因此

$$\frac{P}{\omega'-\omega''}\times\frac{P}{\omega-\omega''}=-\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dk'\,\frac{kk'}{|kk'|}\exp\{2\pi i[k(\omega'-\omega'')+k'(\omega-\omega'')]\} \tag{3.5.18}$$

令

$$u=k+k',\quad v=(k-k')/2 \tag{3.5.19}$$

则

$$kk'/|kk'|=(u^2-4v^2)/|u^2-4v^2|=-1+2S_t(u^2-4v^2) \tag{3.5.20}$$

其中$S_t(u^2-4v^2)$为阶跃函数，它的定义为

$$S_t(u^2-4v^2)=\begin{cases}0 & (|u|<2|v|)\\ 1 & (|u|>2|v|)\end{cases} \tag{3.5.21}$$

这样，(3.5.18)式可化为

$$\begin{aligned}\frac{P}{\omega'-\omega''}\times\frac{P}{\omega-\omega''}&=\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}du\exp\left[2\pi ui\left(\frac{\omega-\omega'}{2}-\omega''\right)\right]\\&\quad\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}dv-2\int_{-|u|/2}^{|u|/2}dv\right]\exp\left[2\pi iv(\omega'-\omega)\right]=\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}du\exp\left[2\pi ui\left(\frac{\omega+\omega'}{2}-\omega''\right)\right]\times\left[\delta(\omega'-\omega)\right.\\&\quad\left.-\frac{2\sin\pi|u|(\omega'-\omega)}{\pi(\omega'-\omega)}\right]\end{aligned}$$

$$= \pi^2\delta\left[\omega'' - \frac{1}{2}(\omega + \omega')\right]\delta(\omega - \omega')$$

$$+ \frac{i}{\omega' - \omega}\pi \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp\left[2\pi ui(\omega' - \omega'')\right]$$

$$- \exp\left[2\pi iu(\omega - \omega'')\right]\} \frac{u}{|u|}du \qquad (3.5.22)$$

注意到(3.5.17)式，则

$$\frac{P}{\omega' - \omega''} \times \frac{P}{\omega - \omega''} = \pi^2\delta[\omega'' - (\omega + \omega')/2]\delta(\omega - \omega')$$

$$- \frac{1}{\omega' - \omega}\left[\frac{P}{\omega - \omega''} - \frac{P}{\omega' - \omega''}\right] \qquad (3.5.23)$$

将(3.5.23)式及 $\delta(\omega - \omega'')\delta(\omega' - \omega'') = \delta[\omega'' - (\omega + \omega')/2]\delta(\omega - \omega')$ 代入(3.5.16)式，得到

$$\delta(\omega - \omega') = B^*(\omega')B(\omega)\Big\{1 + \Big[\;|T_{ab}|^2\pi^2$$

$$+ Z(\omega)Z(\omega')\Big]\delta(\omega - \omega')$$

$$+ \int_0^{\infty} d\omega'' |T_{b\omega''}|^2\Big[(\omega' - \omega)^{-1}\Big(\frac{P}{\omega - \omega'}$$

$$- \frac{P}{\omega' - \omega''}\Big) + \frac{P}{\omega' - \omega''}Z(\omega)\delta(\omega - \omega'')$$

$$+ \frac{P}{\omega - \omega''}Z(\omega')\delta(\omega' - \omega'')\Big]\Big\} \qquad (3.5.24)$$

再利用(3.5.14)式，使上式进一步简化为

$$\delta(\omega - \omega') = B^*(\omega')B(\omega)\delta(\omega - \omega')[\pi^2 + Z(\omega)Z(\omega')]|T_{ab}|^2$$

$$(3.5.25)$$

所以有

$$|B(\omega)|^2 = \frac{|T_{ab}|^2}{\pi^2|T_{ab}|^4 + [\omega - E_b'(\omega)]^2} \qquad (3.5.26)$$

如果选择适当的相位因子，则 $|F, \omega\rangle$ 表示为

$$|F, \omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi^2|T_{\omega b}|^4 + [\omega - E_b'(\omega)]^2}}\Big\{T_{b\omega}|b\rangle$$

$$+ [\omega - E_b'(\omega)]|c, \omega\rangle + T_{b\omega}\int_0^{\infty} d\omega' T_{\omega' b}\frac{P}{\omega - \omega'}|c, \omega'\rangle\Big\}$$

(3.5.27)

这样我们就得到了包括原子组态相互作用的系统的 Fano 本征态,它是一组新的连续态. 上式也可以写为

$$|F, \omega\rangle = \{(\pi|T_{b\omega}|^2)^2 + [\omega - E_b'(\omega)]^2\}^{-1/2}\{T_{b\omega}|\varphi(\omega)\rangle$$

$$+ [\omega - E_b'(\omega)]|c, \omega\rangle\} \qquad (3.5.28)$$

其中

$$|\varphi(\omega)\rangle = |b\rangle + \int_0^{\infty} d\omega' T_{\omega' b}\frac{P}{\omega - \omega'}|c, \omega'\rangle \qquad (3.5.29)$$

表征原子的自电离态$|b\rangle$通过与连续态矢集$\{|c, \omega\rangle\}$间的组态相互作用而形成的新的分离态. 由(3.5.28)式可以看到,连续态$|F, \omega\rangle$具有一个奇点$\omega = E_b'(\omega)$. 如果假设组态相互作用矩阵元$T_{\omega b}$对ω的依赖不很明显,那么旧的连续态$|c, \omega\rangle$由于$|b\rangle$与$\{|c, \omega\rangle\}$间的组态相互作用而在$\omega = E_b'(\omega)$处有一个发散修正因子,而且新的分立态$|\varphi(\omega)\rangle$由于组态相互作用而含有一个中心为$\omega = E_b'(\omega)$的洛伦兹因子.

得知包括原子组态相互作用的本征态$|F, \omega\rangle$以后,我们就可以在这组态矢集$\{|F, \omega\rangle\}$中讨论弱光场作用下原子的离化问题. 在如图 3.5.2 所示的模型中,如果假设光场很弱,那么在系统的哈密顿量$H = H_A + V$中,原子-光场相互作用哈密顿量V的量级较小. 因此可以利用微扰理论,在$\{|F, \omega\rangle\}$态空间进行处理. 由费米黄金定律可知,初始处在束缚态$|a\rangle$的原子在弱光场作用下跃迁到态$|F, \omega\rangle$的概率为

$$\Gamma_{aF} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\delta(\omega - \omega_l)|\langle a|V|F, \omega\rangle|^2 d\omega \qquad (3.5.30)$$

式中

$$\omega_i = \omega_a + \omega_L$$

ω_L 为光场的频率，ω_a为原子在$|a\rangle$的本征频率，即$H_{A0}|a\rangle = \omega_a \times |a\rangle$. (3.5.30)式中的跃迁矩阵元$\langle a|V|F, \omega\rangle$表示为

$$\langle a|V|F, \omega\rangle = \{(\pi|T_{b\omega}|^2)^2 + [\omega - E_b'(\omega)]^2\}^{-1/2}[T_{b\omega}\langle a|V|\varphi(\omega)\rangle + (\omega - E_b'(\omega))\langle a|V|c, \omega\rangle] \quad (3.5.31)$$

若令

$$\gamma = \pi|T_{b\omega}|^2 \quad (3.5.32)$$

$$\varepsilon = [\omega - E_b'(\omega)]/\gamma \quad (3.5.33)$$

$$q(\omega) = \langle a|V|\varphi(\omega)\rangle / (\langle a|V|c, \omega\rangle \pi T_{\omega b}) \quad (3.5.34)$$

显然γ描述原子从自电离能级$|b\rangle$跃迁到$|c, \omega\rangle$的衰变率，它反映由于$|b\rangle$和$|c, \omega\rangle$间的组态相互作用使原子发生自电离的强度；ε称为Fano约化能量；$q(\omega)$称为Fano因子，可以通过选择适当的相位因子使它为实数，显然它表征原子在光场作用下，从$|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$和从$|a\rangle \leftrightarrow |c, \omega\rangle$间的辐射耦合的相对强度. 如果原子在$|a\rangle \leftrightarrow |c, \omega\rangle$间的耦合很弱，那么$q(\omega)$的值就很大，一般说来，矩阵元$\langle a|V|\varphi(\omega)\rangle$及$T_{\omega b}$对$\omega$的依赖不很明显，因此为计算简单起见，以下均假设$q$与$\omega$无关. 现在把(3.5.32)—(3.5.34)式代入(3.5.31)式，则得

$$\begin{aligned}\langle a|V|F, \omega\rangle &= (1+\varepsilon^2)^{-1/2}\langle a|V|c, \omega\rangle(\varepsilon+q) \\ &= (\varepsilon - i)^{-1}\langle a|V|c, \omega\rangle e^{i\psi}(\varepsilon+q) \\ &= \langle a|V|c, \omega\rangle(q+i)e^{i\psi}\left[\frac{1}{\varepsilon-i} + \frac{1}{q+i}\right] \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

这里ψ为相位因子. 再把(3.5.35)式代入(3.5.30)式，我们得原子从态$|a\rangle$跃迁到态$|F, \omega\rangle$的概率，也就是原子在弱光场作用下的离化率：

$$\Gamma_{aF} = \Gamma_{a\omega}(\varepsilon+q)^2/(1+\varepsilon^2) \quad (3.5.36)$$

式中

$$\Gamma_{a\omega}=\frac{\pi}{2}|\langle a|V|c,\omega\rangle|^2=\frac{\pi}{2}|V_{a\omega}|^2 \qquad (3.5.37)$$

这里$\Gamma_{a\omega}$代表在光场作用下，原子从$|a\rangle$跃迁到连续态$|c,\omega\rangle$的概率．$\Gamma_{aF}/\Gamma_{a\omega}$表征了在光场作用下，由态$|a\rangle$跃迁到态$|F,\omega\rangle$的概率与由态$|a\rangle$跃迁到态$|c,\omega\rangle$的概率之比．由于已假定$q$与$\omega$无关，所以它通过$\epsilon$与$\omega$相关，它是$\epsilon$的函数，因此

$$F(\epsilon)=\Gamma_{aF}/\Gamma_{a\omega}=(\epsilon+q)^2/(1+q^2) \qquad (3.5.38)$$

在图3.5.3中，我们给出了q取不同值时，$F(\epsilon)$与ϵ的关系，由图可见，当q取不同值时，即原子在光场作用下，系统在$|a\rangle\longleftrightarrow|b\rangle$和$|a\rangle\longleftrightarrow|c,\omega\rangle$之间具有不同辐射耦合强度时，$F(\epsilon)$的值是不一样的．我们看到，当$q=0$时，即原子在光场作用下，从$|a\rangle$向$|b\rangle$的跃迁不允许的情况下，$F(\epsilon)$在$\epsilon=0$两侧呈对称分布．当$\epsilon=0$时，$F(0)=0$，即原子在$\omega=E_b'(\omega)$点出现了一个不被离化的很窄的区域，这是因为原子在$|b\rangle$和$|c,\omega\rangle$间的组态相互作用，使得本征能量为$E_b'(\omega)$的能级$|c,E_b'(\omega)\rangle$发生了移动，导致在Fano态$|F,\omega\rangle$(3.5.29)式中不存在$|c,E_b'(\omega)\rangle$这一能态，使得原子不可能从$|a\rangle$中吸收一个光子跃迁到$|c,E_b'(\omega)\rangle$，从而有$q=0$时，$F(0)=0$．当$\epsilon\neq0$时，$F(\epsilon)$的值随着$|\epsilon|$的增大趋近于1，这说明由于原子从$|a\rangle$到$|b\rangle$的跃迁是禁戒的，对$\Gamma_{aF}$起主要贡献的是原子从$|a\rangle$到连续态矢集$\{|c,\omega\rangle\}$的跃迁过程．

随着q值的增大，即原子的$|a\rangle\longleftrightarrow|c,\omega\rangle$的跃迁减弱，从图3.5.3中($q=0,1,2,3$)看到，$F(\epsilon)$随$\epsilon$的变化曲线不再是对称的．同时，$F(\epsilon)$在$\epsilon=-q$出现零点；在$\epsilon<-q$区域，$F(\epsilon)$的值小于$q=0$时的值；而在$\epsilon>0$的区域，$F(\epsilon)$的值则明显大于$q=0$时的值；在$\epsilon=1/q$处，$F(\epsilon)$有极大值，峰值为$1+q^2$．这是因为从(3.5.31)，(3.5.35)式可以看到，原子在光场作用下，从束缚态$|a\rangle$向Fano本征态$|F,\omega\rangle$的跃迁过程是由从$|a\rangle$到新的分立态$|\varphi(\omega)\rangle$以及从$|a\rangle$到连续态$|c,\omega\rangle$共同构成的，这两种跃迁过程彼

此干涉. 在 $\varepsilon<-q$,即 $\omega-E_b'(\omega)<-\Gamma q$ 时,(3.5.31)式中右边的两个矩阵元相位因子相差 π,即发生相消干涉,使得在 $\varepsilon<-q$ 区域,$F(\varepsilon)$的值比 $q=0$ 时的值要小. 在 $\varepsilon=-q$ 时,这种相消干涉最强,导致$F(-q)=0$,通常将$\varepsilon=-q$称为Fano零点. 在$\varepsilon>0$,即 $\omega-E_b'(\omega)>0$ 时,两种跃迁过程具有相同的相位,发生相长干涉,在 $\varepsilon=1/q$ 点,这种相长干涉最强. 再加上当 $q\neq0$ 时,原子从$|a\rangle$向$|c,\omega\rangle$直接跃迁的概率减小,使得在 $\varepsilon>0$ 区域,$F(\varepsilon)$的值比 $q=0$ 时的值要大. 而在 $\varepsilon\to0$ 这一极窄的区域,虽然 $q\neq0$ 时,原子的$|a\rangle\longleftrightarrow|\varphi(\omega)\rangle$和$|a\rangle\longleftrightarrow|c,\omega\rangle$的跃迁过程也是相消干涉,但由于 $q=0$ 时,原子在 $\varepsilon=0$ 这一极窄的区域不会被离化,因此 $q\neq0$ 时 $F(\varepsilon)$的值仍比 $q=0$ 时要大.

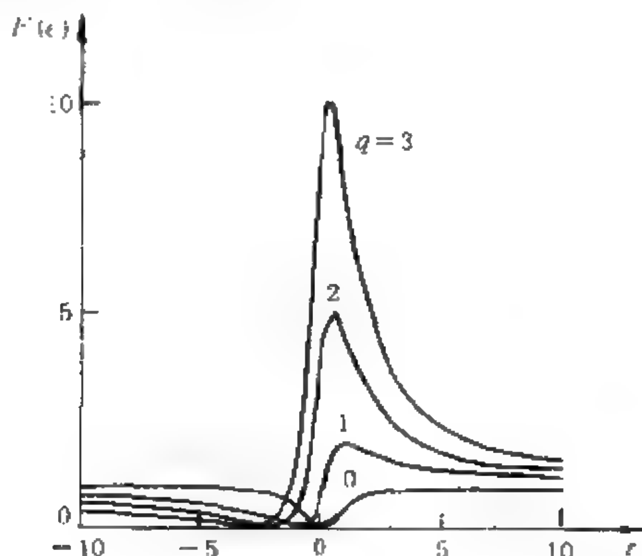


图 3.5.3 q 取不同值时,$F(\varepsilon)$随 ε 的变化曲线

图 3.5.4 给出了另一极限情况,即 q 很大时 $F^{1/10}(\varepsilon)$随 ε 的变化曲线. 为和 q 值不很大的情况相比较,这里也给出了 $q=1$ 时 $F^{1/10}(\varepsilon)$的曲线. 我们看到,此时原子在光场作用下从$|a\rangle$直接跃迁至$|c,\omega\rangle$,跃迁的耦合强度虽然很弱,但原子通过向自电离能级$|b\rangle$跃迁,然后在组态相互作用下仍可能跃迁到$|c,\omega\rangle$而发生自电离现象. 显然 $\varepsilon=-q$ 仍是 $F(\varepsilon)$的零点,并且在 $\varepsilon=1/q$ 时,$F(\varepsilon)$仍然出现极大值.

从上面的讨论可以看到，原子的自电离在原子的光致离化过程中是起重要作用的物理过程，因此在研究原子的光致离化问题时，必须考虑自电离过程的效应. 上面我们讨论了在弱光场作用下原子的自电离问题，那么在激光场很强时，原子的自电离过程的情况怎样呢？下面来讨论强激光场作用下原子的自电离问题.

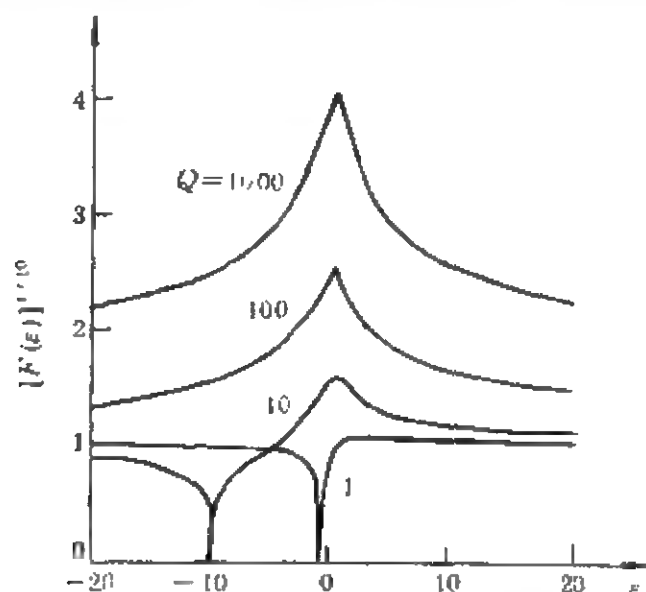


图 3.5.4　q 取很大值时，$[\overline{F}(\varepsilon)]^{1/10}$ 值随 ε 的变化曲线

第二节　强激光场作用下原子的自电离

我们仍以如图 3.5.2 所示的模型为例，但这里假定与原子相互作用的光场是强激光场，原子与光场相互作用的哈密顿量 V 较大，因此微扰论不再适用，故需要采用新的方法来处理原子的自电离问题.

假设图 3.5.2 中的激光场是强单模光场，以致于可以用经典电磁波描述，那么在旋波近似下系统的哈密顿量可写为

$$H = E_a|a\rangle\langle a| + \int d\omega\omega|\omega\rangle\langle\omega| + \left[\int d\omega\Omega_\omega|a\rangle\langle\omega| + h.c.\right] \qquad (3.5.39)$$

为书写简单起见，这里已用$|\omega\rangle$代替 Fano 本征态$|F,\omega\rangle$，Ω_ω表示在光场作用下，原子从$|a\rangle$向$|\omega\rangle$跃迁的矩阵元：

$$\Omega_\omega=(q+i)e^{i\psi}\langle a|V|c,\omega\rangle[(\epsilon-i)^{-1}+(q+i)^{-1}] \tag{3.5.40}$$

如果定义与原子-光场相互作用强度有关的参数Ω_0为

$$\Omega_0=(4\pi\gamma)^{1/2}V_{a\omega}\exp(i\psi) \tag{3.5.41}$$

其中

$$V_{a\omega}=\langle a|V|c,\omega\rangle \tag{3.5.42}$$

通过选择适当的相位因子使得Ω_0为实数，那么(3.5.40)式变为

$$\Omega_\omega=[(\epsilon-i)^{-1}+(q+i)^{-1}]\Omega_0(4\pi\gamma)^{-1/2} \tag{3.5.43}$$

如果原子初始时处在束缚态$|a\rangle$，那么随着时间的演化，系统的态矢演化为

$$|\Psi(t)\rangle=\alpha(t)|a\rangle+\int\beta_\omega(t)|\omega\rangle d\omega \tag{3.5.44}$$

为得知$|\Psi(t)\rangle$的表达式，需要知道$\alpha(t)$和$\beta_\omega(t)$，为此利用薛定谔方程可得

$$\dot{\alpha}(t)=-i\int\Omega_\omega\beta_\omega(t)d\omega \tag{3.5.45}$$

$$\dot{\beta}_\omega(t)=-i(\omega-\omega_L)\beta_\omega-i\Omega_\omega^*\alpha(t) \tag{3.5.46}$$

其中已令$E_a=0$，式中ω_L为激光场的频率．对方程(3.5.45)，(3.5.46)式作拉普拉斯变换，即定义

$$\tilde{\beta}_\omega(z)=\int_0^\infty\beta_\omega(\tau)e^{-z\tau}d\tau,$$

$$\tilde{\alpha}(z)=\int_0^\infty\alpha(\tau)e^{-z\tau}d\tau \tag{3.5.47}$$

那么(3.5.45)，(3.5.46)式变为

$$z\tilde{\alpha}-1=-i\int d\omega\Omega_\omega\tilde{\beta}_\omega \tag{3.5.48}$$

$$z\tilde{\beta}_{\omega}=-i\delta\tilde{\beta}_{\omega}-i\Omega_{\omega}^{*}\tilde{\alpha} \tag{3.5.49}$$

式中已令 $\delta=\omega-\omega_{L}$. 由(3.5.49)式可得

$$\tilde{\beta}_{\omega}=-i\Omega_{\omega}^{*}\tilde{\alpha}/(z+i\delta) \tag{3.5.50}$$

将(3.5.51)式代入(3.5.48)式得

$$\tilde{\alpha}=1/(z+N) \tag{3.5.51}$$

式中

$$N=\int d\omega\Omega_{\omega}^{*}\Omega_{\omega}/(z+i\delta) \tag{3.5.52}$$

再将(3.5.43)式代入上式,得到

$$N=[(q^{2}+1)4\pi\gamma]^{-1}\Omega_{0}^{2}\int d\omega(\varepsilon+q)^{2}/[(z+i\delta)(1+\varepsilon^{2})] \tag{3.5.53}$$

由于在(3.5.14)式中,组态相互作用导致的频移项相对 E_b 来说很小,因此在以下的讨论中可略去它的影响,即假设 $E_b'(\omega)=E_b$;并且令 $\omega_L=E_b$,即认为激光场的频率与自电离能级 $|b\rangle$ 和束缚能级 $|a\rangle$ 之间的本征跃迁频率是共振的. 然后将(3.5.33)式代入(3.5.53)式,利用复变函数的留数定理计算积分以后可以得到

$$N=[4(q^{2}+1)(z-\gamma)]^{-1}\Omega_{0}^{2}(q^{2}+z/\gamma-i2q) \tag{3.5.54}$$

将(3.5.51),(3.5.54)式一并代入(3.5.50)式,即得 $\beta_{\omega}(z)$ 的表达式:

$$\tilde{\beta}_{\omega}(z)=-i\Omega_{\omega}^{*}/[(z+i\delta)(z+N)] \tag{3.5.55}$$

对 $\tilde{\alpha}(z)$, $\tilde{\beta}_{\omega}(z)$ 作拉普拉斯逆变换,就可以求出相应的概率幅 $\alpha(t)$, $\beta_{\omega}(t)$ 的表示式,由此可进一步讨论在任意时刻 t 系统处于态 $|a\rangle$ 和 $|\omega\rangle$ 的概率,从而得知系统中光电子随时间变化的性质.

实验上对原子离化情况的观察,主要是测量原子的稳态光电子谱,所以下面讨论原子的稳态光电子谱. 在(3.5.44)式中,$\beta_{\omega}(t)$ 的傅里叶变换,就是逸出电子的频谱,而稳态光电子谱即是

$\beta_\omega(t)$在长时极限下即 $t\to\infty$时的傅里叶变换．令

$$x=\Omega_0^2/[4(1+q^2)]$$

则(3.5.55)式化为

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_\omega(z)&=-i\Omega_\omega^*(z+\gamma)/[(z+i\delta)(z-z_1)(z-z_2)]\\&=-i\Omega_\omega^*\left[\frac{\gamma+z_1}{i\delta+z_1}\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z+i\delta}\right)\right.\\&\quad\left.-\frac{\gamma+z_2}{i\delta+z_2}\left(\frac{1}{z-z_2}-\frac{1}{z+i\delta}\right)\right]\end{aligned}\tag{3.5.56}$$

式中

$$z_{1,2}=\frac{-\left(\gamma+\dfrac{x}{\gamma}\right)\pm\sqrt{\left(\gamma+\dfrac{x}{\gamma}\right)^2-4(xq^2-2iqx)}}{2}$$

对(3.5.56)式作拉普拉斯逆变换，并利用

$$\int_0^\infty e^{-zt}e^{at}dt=(z-a)^{-1}\quad[\mathrm{Re}(z)>\mathrm{Re}(a)]$$

则

$$\begin{aligned}\beta_\omega(t)=&-i\Omega_\omega^*\left\{\frac{\gamma+z_1}{i\delta+z_1}[\exp(z_1t)-\exp(-i\delta t)]\right.\\&\left.-\frac{\gamma+z_2}{i\delta+z_2}[\exp(z_1t)-\exp(-i\delta t)]\right\}\frac{1}{z_1-z_2}\end{aligned}\tag{3.5.57}$$

当 $t\to\infty$时，上式化为

$$\beta_\omega(t)|_{t\to\infty}=-i\Omega_\omega^*\frac{(\gamma-i\delta)}{(i\delta+z_1)(i\delta+z_2)}\exp(-i\delta t)\tag{3.5.58}$$

显然上式中的$|\beta_\omega(t)|^2_{t\to\infty}$对应的即是光电子的频谱，从而

$$\begin{aligned}\pi\overline{W}(\omega)&=\pi|\beta_\omega(t)|^2|_{t\to\infty}\\&=\frac{\Omega_0^2}{4\gamma(1+q^2)}\frac{(\delta+q\gamma)^2}{\left\{\left[\delta^2-\dfrac{\Omega_0^2q^2}{4(1+q^2)}\right]^2+\left[\delta\gamma+\dfrac{\Omega_0^2}{4(1+q^2)\gamma}(\delta+2q\gamma)\right]^2\right\}}\end{aligned}\tag{3.5.59}$$

注意到(3.5.56),(3.5.58)以及(3.5.59)式的第一行,原子的稳态光电子谱又可写成

$$\pi \overline{W}(\omega)=\lim_{Z\to -i\delta}\pi|\beta_\omega(z)\times(z+i\delta)|^2 \tag{3.5.60}$$

从(3.5.59)式出发,即可讨论稳态光电子谱 $\pi\overline{W}(\omega)$ 与 Fano 因子 q 以及与激光场强度有关的参数 Ω_0 之间的关系. 下面先来分析 $q\to\infty$ 时,即原子在激光场作用下从束缚态 $|a\rangle$ 向连续态 $|c,\omega\rangle$ 跃迁的概率很小,而由束缚态 $|a\rangle$ 到自电离态 $|b\rangle$ 的跃迁概率相对很大的情况下,稳态光电子谱 $\pi\overline{W}(\omega)$ 的性质.

1. 当 $q\to\infty$ 时

$q\to\infty$ 的极限下,(3.5.59)式化为

$$\pi\overline{W}(\omega)=\frac{\gamma\dfrac{\Omega_0^2}{4}}{\left(\delta^2-\dfrac{\Omega_0^2}{4}\right)^2+\gamma^2\delta^2} \tag{3.5.61}$$

图 3.5.5 给出了在不同的 Ω_0^2 值下,由(3.5.61)式给定的光电子谱分布. 在激光场较弱时,即 $\Omega_0^2\leqslant 2\gamma^2$ 时,稳态光电子谱在 $\omega=\omega_L$ 处有极大值 $4\gamma/\Omega_0^2$,这说明在弱场情况下,原子从束缚态共振吸收频率为 ω_L 的光子,跃迁到自电离态 $|b\rangle$,然后在组态相互作用下,跃迁到 $|c,\omega\rangle$[这里忽略掉了 $E_b'(\omega)$ 中的频率修正项]的概率最大,因而产生的频率为 ω_L 的光电子的概率最大. 这一结果与前面利用微扰论所得的结果是相符的. 同时从图 3.5.5 还可看出,随着激光场增强($\Omega_0^2=1$, $\Omega_0^2=2$), $\pi\overline{W}(\omega)$ 在 $\omega=\omega_L$ 处的峰值下降,并且光电子谱的线宽变宽. 这是由于随着激光场增强,初始处在束缚态 $|a\rangle$ 的原子在 $|a\rangle$, $|b\rangle$ 之间的振荡频率增大,因此原子在自电离能级 $|b\rangle$ 停留的寿命变短,导致光电子谱的线宽增宽.

当 $\Omega_0^2>2\gamma^2$ 时,即激光场较强时, $\pi\overline{W}(\omega)$ 在 $\omega=\omega_L\pm\sqrt{\Omega_0^2/4-\gamma^2/2}$ 两点均有极大值 $\Omega_0^2/[\gamma(\Omega_0^2-\gamma^2)]$(如图 3.5.5 所示). 这是因为在强共振激光场的作用下,原子的自电离能级发生

分裂，分裂成频率为 $\omega_L \pm \sqrt{\Omega_0^2/4-\gamma^2/2}$ 的两个能级. 初始处在束缚态 $|a\rangle$ 的原子在强光场的作用下,以相同的概率跃迁到这两个新的能级上，然后在组态相互作用的影响下，以最大的概率跃迁到连续态 $|c, \omega_L \pm \sqrt{\Omega_0^2/4-\gamma^2/2}\rangle$，使得弱场时在 $\omega=\omega_L$ 处的峰值点分裂为 $\omega=\omega_L \pm \sqrt{\Omega_0^2/4-\gamma^2/2}$ 的两个峰值点. 同时从图中还可看到，随着 Ω_0^2 值的增大($\Omega_0^2=4$, $\Omega_0^2=16$)，$\pi\overline{W}(\omega)$ 的峰值减小，线宽增宽，这一现象与弱场($\Omega_0^2=1$, $\Omega_0^2=2$)时相似.

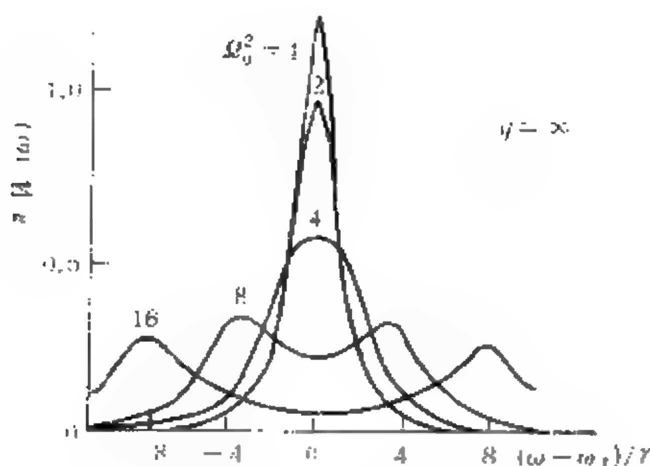


图 3.5.5 $q=\infty$，Ω_0^2 取不同值时的光电子谱 $\pi\overline{W}(\omega)$

2. 当 q 取有限值时

即 Fano 因子 q 为有限值的情形，此时原子在光场作用下可以发生从束缚态 $|a\rangle$ 向连续态 $|c, \omega\rangle$ 的直接跃迁. 由稳态光电子谱(3.5.59)式可以看出，$\delta=-\gamma q$ 始终是稳态光电子谱的零点，这一结果与利用微扰论所得的结果相同，这也就是说，不管在强激光场还是弱激光场作用下，处于束缚态 $|a\rangle$ 的原子在离化过程中由于两种离化通道的相消干涉，导致光电子谱中出现 Fano 零点.

图 3.5.6 给出了 $q=-1$ 时，反映光场强度的 Ω_0 取不同值时，$\pi\overline{W}(\omega)$ 随 δ 的变化曲线. 从图中看到，$\Omega_0=3$ 所对应的光电子谱的形状与 $\Omega_0=1$ 时具有很大差别. 这时 $\pi\overline{W}(\omega)$ 在 $\delta=-0.85\gamma$ 附

近具有一峰值很高而线宽很窄的尖锐峰，它表明原子的自电离性质发生了显著的变化．为理解这种变化的物理本质，我们将(3.5.59)式改写成如下的形式：

$$\pi\overline{W}(\omega)=\overline{W}_q\left|\frac{\delta+q\gamma}{Z_+Z_-}\right|^2 \tag{3.5.62}$$

式中

$$\overline{W}_q=\frac{\Omega_0^2}{4\gamma(1+q^2)} \tag{3.5.63a}$$

$$Z_\pm=\left(\delta\pm\frac{R\cos\theta}{2}\right)-i(\gamma+\overline{W}_q\pm R\sin\theta)/2 \tag{3.5.63b}$$

$$Re^{i\theta}=\sqrt{-(\gamma-\overline{W}_q)^2+4\gamma\overline{W}_q(q-i)^2} \tag{3.5.63c}$$

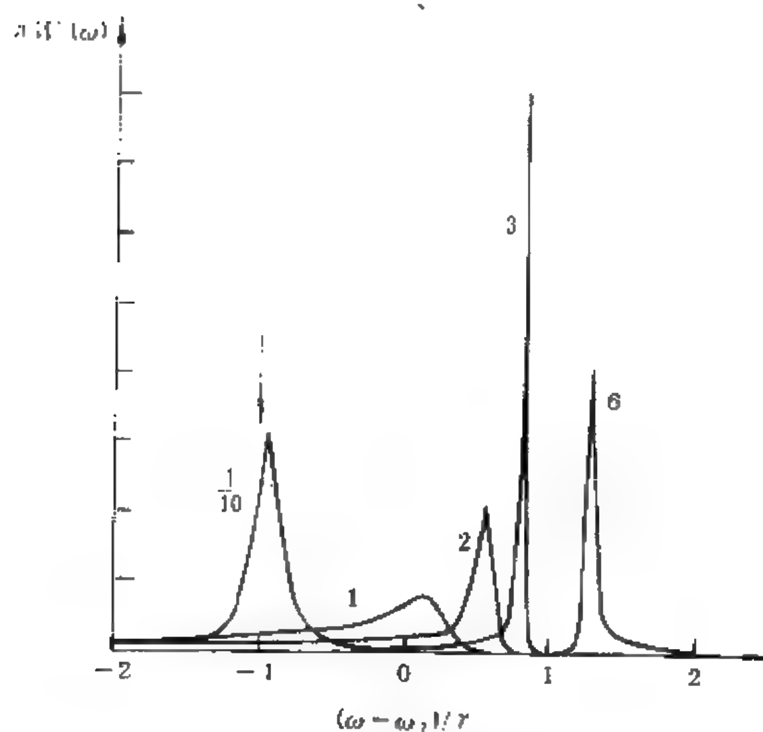


图 3.5.6　$q=-1$，Ω_0^2 取不同值时的光电子谱 $\pi W(\omega)$

(3.5.62)式表明，$\pi\overline{W}(\omega)$是两个洛仑兹函数$|Z_\pm|^{-2}$的乘积，这两个洛仑兹函数的中心位置分别为 $\delta=\pm\dfrac{R\cos\theta}{2}$，宽度分别为$(\gamma+$

$\overline{W}_q \pm R\sin\theta)/2$. 显然，如果 Z_+ 或 Z_- 含有因子$(\delta+\gamma q)$，那么(3.5.62)式就会出现一个峰值无限高而峰宽无限窄的尖锐峰，这就要求

$$(\delta \pm R\cos\theta/2) - i(\gamma + \overline{W}_q \pm R\sin\theta)/2 = \delta + \gamma q \qquad (3.5.64a)$$

满足上式的$\overline{W}_q$值为

$$\overline{W}_q = \gamma \qquad (3.5.64b)$$

相应地，当光强满足

$$\Omega_0^2 = \Omega_c^2 = 4\gamma^2(1+q^2) \qquad (3.5.64c)$$

时，光电子谱 $\pi\overline{W}(\omega)$ 中就会出现一个十分尖锐的峰. 对于图 3.5.6 中的 $q=-1$ 而言，$\Omega_c = 2\sqrt{2}\gamma$，$\delta=\gamma$，显然这一值与图中 $\Omega_0 = 3\gamma$，$\delta = 0.85\gamma$ 时的现象是相符的.

下面我们再来看看光强满足(3.5.64c)式，即$\overline{W}_q=\gamma$ 时，由激光场离化的光电子的总概率，由(3.5.62)—(3.5.63)式得知

$$P_c(\infty) = \int \overline{W}(\omega)d\omega = \int d\omega \frac{\gamma}{(\omega-\omega_L-\gamma q)^2+4\gamma^2} = 1/2 \qquad (3.5.65)$$

那么初始时处在束缚态的原子不被离化的概率为

$$P_a(\infty) = 1 - P_c(\infty) = 1/2 \qquad (3.5.66)$$

上式说明，当激光场的强度满足(3.5.64c)式时，初始处在束缚态的原子在激光场作用下会部分地被捕获于束缚态$|a\rangle$而不被离化，我们把这种现象称为“相干凝聚”(Confluence of Coherence). 导致这种现象的原因是，初始处在束缚态$|a\rangle$的原子在激光场作用下，是通过$|a\rangle \longleftrightarrow |c,\omega\rangle$和$|a\rangle \longleftrightarrow |b\rangle \longleftrightarrow |c,\omega\rangle$这两个跃迁通道被离化的，这两个通道彼此之间具有干涉效应，当 $W_q=\gamma$ 时，这两个通道发生相消干涉，使得处于束缚态$|a\rangle$的原子不会完全被电离.

第三节　强激光场作用下原子的阈上离化

从上面的讨论我们知道，处于束缚态$|a\rangle$的原子可以吸收一个频率在电离限(阈值)附近的光子后跃迁到连续态$|\omega_1\rangle$，然后放出一个光电子，这正是考虑组态相互作用的爱因斯坦光电效应的结果. 然而在强激光场作用下，如果原子还有比连续态$|\omega_1\rangle$的能量高$n\hbar\omega_L$的连续态$|\omega_i\rangle$ $(i=2, 3, \cdots)$(如图 3.5.7 所示)，由本篇第一章和第四章可知，跃迁到连续态$|\omega_1\rangle$的原子可以再吸收光子而跃迁到新的连续态$|\omega_i\rangle$，即原子发生多光子吸收过程. 处在连续态$|\omega_i\rangle$的原子放出一个高能电子，即快电子，而发生阈值以上的离化现象，我们称这种现象为阈上离化现象. 随着高功率激光技术的发展，近代的实验证实了原子的阈上离化现象，它表明在强激光场作用下，光电子谱可以有多个峰值，每相邻两峰的能量间距为一个激光光子的能量(如图 3.5.8 所示). 当激光场的强度不很强时，光电子谱的第一个峰比其他的峰要强得多[如图 3.5.8(a)所示]，随着激光场强度的提高，第一个峰的峰值下降，而第二、三个峰的峰值明显增加，以致于超过第一个峰[如图 3.5.8(b)所示]. 而当激光场很强时，第一个峰、甚至前面几个峰可能消失，后面峰的峰值明显增加[如图 3.5.8(c)所示]，这种现象称为“峰开关”效应.



图 3.5.7　原子阈上离化能级结构示意图

显然，图 3.5.8 中的第一个光电子峰是初始处于束缚态的原子吸收一个光子在连续态$|\omega_1\rangle$被离化后所产生的光电子的强度分布，余下的峰则是原子在连续态$|\omega_1\rangle$上继续吸收光子跃迁到新的

连续态$|\omega_i\rangle$ $(i\neq 1)$上(如图 3.5.7 所示),产生的光电子的强度分布,此时这些峰所对应的光电子的速率比第一峰所对应的光电子的速率要大,即原子在强激光场作用下发生阈上离化现象. 下面我们讨论二阶离化过程,即原子在阈值以上再吸收一个光子从连续态$|\omega_1\rangle$跃迁到连续态$|\omega_2\rangle$的离化过程,对光电子谱的影响,从而从理论上来分析阈上离化现象的特征.

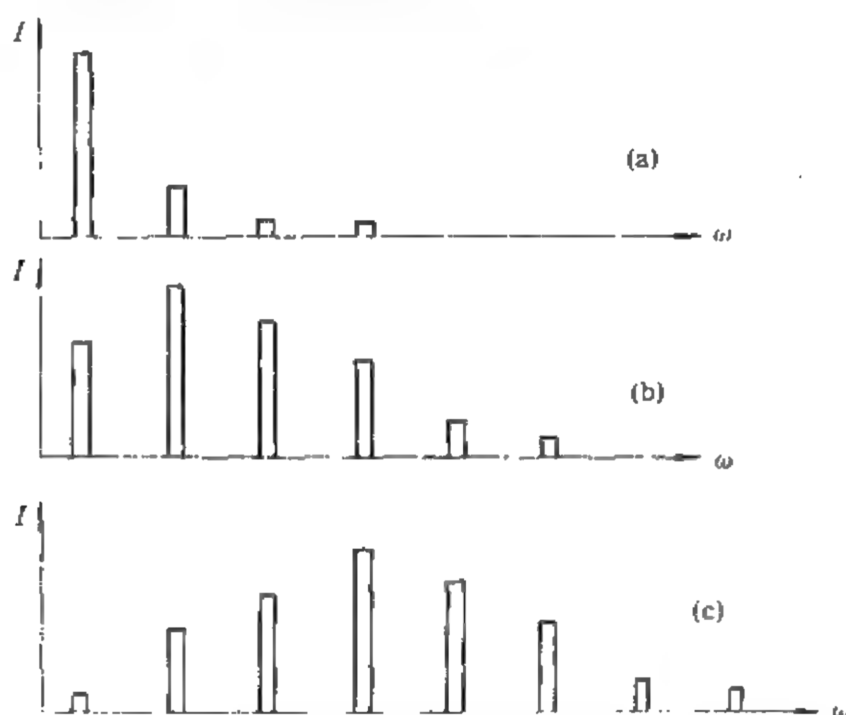


图 3.5.8 不同光强下原子阈上离化光电子谱示意图

(图中每相邻谱峰之间间隔为 $\hbar\omega_L$)

(a) 弱激光场作用下; (b) 中等强度激光场作用下; (c) 强激光场作用下

我们考虑如图 3.5.9 所示的原子-光场相互作用模型,这里原子的态空间包括束缚态$|a\rangle$、自电离态$|b\rangle$以及与$|b\rangle$有组态相互作用的第一个连续态$|c_1\rangle$. 除此以外,态空间中还有能量高于$|c_1\rangle$、且与$|b\rangle$和$|c_1\rangle$满足电偶极跃迁定则的第二个连续态$|c_2\rangle$. 显然在激光场作用下,原子在$|b\rangle$和$|c_2\rangle$以及$|c_1\rangle$和$|c_2\rangle$之间的跃迁过程就是我们所关心的二阶离化过程. 为处理问题简便起见,我们利用前面介绍的 Fano 对角化方法,将自电离态$|b\rangle$和连续态$|c_1\rangle$合

并成具有内部结构的 Fano 态 $|\omega\rangle$，则图 3.5.9 所示的模型化为图 3.5.10 所示的级联双光子跃迁模型. 于是，原子-光场相互作用系统的哈密顿量表示为

$$H = E_a|a\rangle\langle a| + \int d\omega\omega\ \omega\rangle\langle\omega| + \int dE_{c2}E_{c2}|c_2\rangle\langle c_2|$$
$$+ \left[\iint dE_{c2}d\omega\Omega_{1\omega}^*|\omega\rangle\langle c_2| + \int d\omega\Omega_{0\omega}|a\rangle\langle\omega| + h.c.\right] \tag{3.5.67}$$

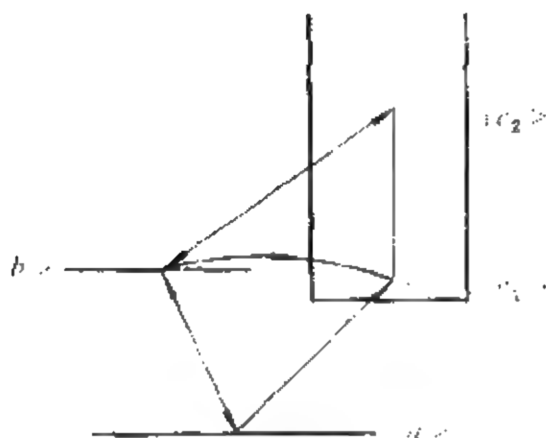


图 3.5.9 考虑二阶离化过程的自电离模型示意图

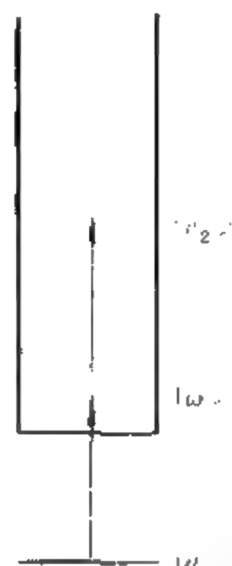


图 3.5.10 Fano 对角化后的原子能级结构示意图(包括二阶离化过程)

与(3.5.40)式相同，式中跃迁矩阵元 $\Omega_{0\omega}$，$\Omega_{1\omega}^*$分别为

$$\Omega_{0\omega} = (q_0 + i)\exp(i\psi_0)\langle a|V|c_1\rangle[(\varepsilon - i)^{-1} + (q_0 + i)^{-1}] \tag{3.5.68a}$$

$$\Omega_{1\omega}^* = (q_1 + i)\exp(i\psi_1)\langle c_1|V_1|c_2\rangle[(\varepsilon - i)^{-1} + (q_1 + i)^{-1}] \tag{3.5.68b}$$

这里 q_0 是与束缚态 $|a\rangle$ 有关的 Fano 因子，q_1 则是与连续态 $|c_2\rangle$ 有关的 Fano 因子，它满足

$$q_1 = \langle b|V_1|c_2\rangle/[\pi\langle b|T|c_1\rangle\langle c_1|V_1|c_2\rangle] \tag{3.5.69}$$

V、V_1 均为激光场与原子发生偶极相互作用的哈密顿量. 另外，定

义

$$\Omega_0 = \sqrt{4\pi\gamma}(q_0 + i)\exp(i\psi_0)\langle a|V|c_1\rangle$$

$$\Omega_1 = \sqrt{4\pi\gamma}(q_1 + i)\exp(i\psi_1)\langle c_1|V_1|c_2\rangle$$

由于 ψ_0，ψ_1 为相位因子，我们可以选择适当的 ψ_0，ψ_1，使得 Ω_0，Ω_1 为实数. 以下均规定 Ω_0，Ω_1 为实数，在这种情况下，(3.5.68)式变为

$$\Omega_{0\omega} = (4\pi\gamma)^{-1/2}\Omega_0[(\epsilon - i)^{-1} + (q_0 + i)^{-1}] \quad (3.5.70)$$

$$\Omega_{1\omega}^* = (4\pi\gamma)^{-1/2}\Omega_1[(\epsilon - i)^{-1} + (q_1 + i)^{-1}] \quad (3.5.71)$$

假设原子初始时处在束缚态 $|a\rangle$，那么随着时间的演化，t 时刻的态矢可展开为

$$|\Psi(t)\rangle = C_a(t)|a\rangle + \int d\omega C_\omega(t)|\omega\rangle + \int dE_{c2}C_{c2}(t)|c_2\rangle \quad (3.5.72)$$

将(3.5.67)及(3.5.72)式代入薛定谔方程，可得

$$\dot{C}_a = -i\int d\omega\Omega_{0\omega}C_\omega$$

$$\dot{C}_\omega = -i\delta\omega_1 C_\omega - i\Omega_{0\omega}^* C_a - i\int dE_{c2}\Omega_{1\omega}^* C_{c2} \quad (3.5.73)$$

$$\dot{C}_{c2} = -i\delta\omega_2 C_{c2} - i\int d\omega\Omega_{1\omega}C_\omega$$

式中已令 $E_a = 0$，$E_b = \omega_L$，$\delta\omega_1 = \omega - \omega_L$，$\delta\omega_2 = E_{c2} - 2\omega_L$. 为求解上述方程组，对方程组(3.5.73)式作形如(3.5.47)式的拉普拉斯变换，得到

$$z\widetilde{C}_a - 1 = -i\int d\omega\Omega_{0\omega}\widetilde{C}_\omega \quad (3.5.74)$$

$$z\widetilde{C}_\omega = -i\delta\omega_1\widetilde{C}_\omega - i\Omega_{0\omega}^*\widetilde{C}_a - i\int dE_{c2}\Omega_{1\omega}^*\widetilde{C}_{c2} \quad (3.5.75)$$

$$z\widetilde{C}_{c2} = -i\delta\omega_2\widetilde{C}_{c2} - i\int d\omega\Omega_{1\omega}\widetilde{C}_\omega \quad (3.5.76)$$

由(3.5.76)式可得

$$\widetilde{C}_{\omega 2} = \frac{-i}{z + i\delta\omega_2} \int d\omega \Omega_{1\omega} \widetilde{C}_{\omega} \tag{3.5.77}$$

将上式代入(3.5.75)式，得

$$\widetilde{C}_{\omega} = -i \frac{\Omega_{0\omega}^*}{z + i\delta\omega_1} \widetilde{C}_a - \frac{\pi\Omega_{1\omega}^*}{z + i\delta\omega_1} \int d\omega' \Omega_{1\omega'} \widetilde{C}_{\omega'} \tag{3.5.78}$$

在上式两边同乘以 $\Omega_{1\omega}$，并对 ω 积分，即

$$\int \Omega_{1\omega} \widetilde{C}_{\omega} d\omega = -i \widetilde{C}_a \int d\omega \frac{\Omega_{1\omega}\Omega_{0\omega}^*}{z + i\delta\omega_1}$$

$$- \pi \int d\omega \frac{\Omega_{1\omega}\Omega_{1\omega}^*}{z + i\delta\omega_1} \int \Omega_{1\omega'} \widetilde{C}_{\omega'} d\omega' \tag{3.5.79}$$

令

$$N_{ij} = \int d\omega \frac{\Omega_{i\omega}\Omega_{j\omega}^*}{z + i\delta\omega_1} \quad (i,\ j = 0,\ 1) \tag{3.5.80}$$

$$K = \int \Omega_{1\omega} \widetilde{C}_{\omega} d\omega \tag{3.5.81}$$

则

$$K = -iN_{10}\widetilde{C}_a/(1+\pi N_{11}) \tag{3.5.82}$$

(3.5.80)式的积分只须将(3.5.68)式代入，并利用复变函数的留数定理即可求出，所得结果为

$$N_{ij} = \frac{1}{z+\gamma} \frac{\Omega_i\Omega_j}{4(1+q_i^2)^{1/2}(1+q_j^2)^{1/2}}[q_iq_j$$
$$-i(q_i+q_j)+z/\gamma] \quad (i,\ j=0,\ 1) \tag{3.5.83}$$

再将(3.5.82)式代回(3.5.78)式，得到

$$\widetilde{C}_{\omega} = -i \frac{\widetilde{C}_a}{z+i\delta\omega_1}\left[\Omega_{0\omega}^* - \frac{\pi N_{10}\Omega_{1\omega}^*}{1+\pi N_{11}}\right] \tag{3.5.84}$$

联立(3.5.74)和(3.5.84)式可得

$$z\widetilde{C}_a = 1 - \int d\omega \Omega_{0\omega}\left[\frac{\widetilde{C}_a}{z + i\delta\omega_1}\left(\Omega_{0\omega}^* - \frac{\pi N_{10}\Omega_{1\omega}^*}{1 + \pi N_{11}}\right)\right]$$

$$= 1 - \tilde{C}_a\left(N_{\infty} - \frac{\pi N_{10}N_{01}}{1+N_{11}}\right)$$

即

$$\tilde{C}_a = \left[z + N_{\infty} - \frac{\pi N_{10}N_{01}}{1+\pi N_{11}}\right]^{-1} \tag{3.5.85}$$

求解方程组(3.5.71)、(3.5.84)及(3.5.85)式，最后得到

$$\tilde{C}_a = -\frac{i}{z+i\delta\omega_1}\frac{\left[\Omega_{0\omega}^* - \dfrac{\pi N_{10}\Omega_{1\omega}^*}{1+\pi N_{11}}\right]}{\left[z + N_{\infty} - \dfrac{\pi N_{10}N_{01}}{1+\pi N_{11}}\right]} \tag{3.5.86}$$

$$\tilde{C}_{c2} = -\frac{i}{z+i\delta\omega_2}K$$

$$= -\frac{N_{10}}{(z+i\delta\omega_2)(1-\pi N_{11})\left(z + N_{\infty} - \dfrac{\pi N_{10}N_{01}}{1+\pi N_{11}}\right)} \tag{3.5.87}$$

上式中

$$1+\pi N_{11} = \frac{1+\pi^2 V_{c1c2}^2}{1+z'}\left[1+z'+\frac{\gamma_a}{A}\left(1-\frac{i}{q_1}\right)^2\right] \tag{3.5.88}$$

$$(z+N_{\infty})(1+\pi N_{11}) - \pi N_{10}N_{01} = \frac{1+\pi^2 V_{c1c2}^2}{1+z'}S(z') \tag{3.5.89}$$

$$S(z') = z'^2 + \frac{z'}{A}(1+I+\gamma_a - 2i\gamma_a/q_1)$$

$$+\frac{I}{A}\left[q_0^2+\gamma_a(1-q_0/q_1)^2\right] - 2iq_0 I/A \tag{3.5.90}$$

$$\gamma_a = V_{bc2}^2/T_{bc1}^2, I = V_{ac1}^2/T_{bc1}^2,\ A = 1+\gamma_a/q_1^2 \tag{3.5.91}$$

$$z' = z/\gamma \tag{3.5.92}$$

和前面一样，这里也只讨论稳态光电子谱，在长时极限下，即 $t\to\infty$ 时，由(3.5.60)式和(3.5.86)—(3.5.92)式容易得到稳态光电子谱为

$$W_1(\epsilon) = \lim_{Z\to -i\delta\omega_1} |C_a(z) \times (z + i\delta\omega_1)|^2$$

$$= \frac{I(\epsilon + q_0)^2 + \gamma_a^2\left(1 - \frac{q_0}{q_1}\right)^2}{A^2|S(\epsilon)|^2} \qquad (3.5.93)$$

$$W_2(\epsilon') = \lim_{Z\to -i\delta\omega_2} |C_{c2}(z) \times (z + i\delta\omega_2)|^2$$

$$= \frac{\gamma_a I(\epsilon' + q_0 + q_1)^2}{(q_1^2 + 1)A^2|S(\epsilon')|^2} \qquad (3.5.94)$$

式中已令

$$\epsilon = (\omega - \omega_L)/\gamma,\ \epsilon' = (E_{c2} - 2\omega_L)/\gamma \qquad (3.5.95)$$

(3.5.93)和(3.5.94)式即为考虑了两种二阶离化过程($|b\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$, $|c_i\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$)后的稳态光电子谱的解析解,其中 $W_1(\epsilon)$ 与(3.5.56)式相对应,它是自电离态$|b\rangle$附近的光电子分布. 显然,从(3.5.94)式可以看到,在能量比 E_b 约高 ω_L 的连续态$|c_2\rangle$附近,还存在另一部分光电子,它的速率比 $W_1(\epsilon)$所对应的光电子的速率要大,这部分光电子的产生是二阶离化过程的必然结果. 为区别于原有的光电子谱 $W_1(\epsilon)$,我们将具有更高能量 $E_{c2} \approx E_b + \omega_L$ 的那部分 $W_2(\epsilon')$称为高能光电子谱,而将 $W_1(\epsilon)$称为低能光电子谱. 下面我们从(3.5.93)、(3.5.94)式出发,来讨论二阶离化过程对光电子谱的影响.

一、二阶离化过程对低能光电子谱的影响

1. $|b\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$跃迁对低能光电子谱的影响

(3.5.93)式表明,$|b\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$跃迁过程对低能光电子谱的影响完全由自电离态$|b\rangle$的光离化速率 $\gamma_a = \pi V_{bc2}^2/\gamma$ 决定. 由于二阶离化过程$|b\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$和一阶离化过程$|a\rangle \longleftrightarrow |c_1\rangle$都是由同一激光场诱导的分离态的光致离化,其速率 $\gamma_b = \pi V_{bc2}^2$和 $\gamma_a = \pi V_{ac1}^2$一般具有相同的量级,即 $\alpha = \gamma_b/\gamma_a \sim 1$,并且由(3.5.91)式可知,$\gamma_a = \alpha I$,即二阶离化速率随光强的提高而增大. 可见,二阶离化过程在强激光场导致的原子自电离问题中具有特别重要的作用.

图 3.5.11 给出了 $q_0=q_1=2$ 和 $I=3.2$ 时，不同 α 值对应的低能光电子谱$\overline{W}_1(\varepsilon)$. 图中$\alpha=0$对应于忽略二阶离化过程$|b\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$的结果，$\alpha\neq0$ 对应于计及这种机制的结果，其大小反映了$|b\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$耦合的强弱. 容易看出，即使很小的耦合（图中 $\alpha=0.1$）也会使低能光电子谱的峰值有显著减小，当 α 增大时，这种减小更加明显. 可见，$|b\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$跃迁过程的存在使得实际的光电子谱强度比不计及这种跃迁过程时显著减小.

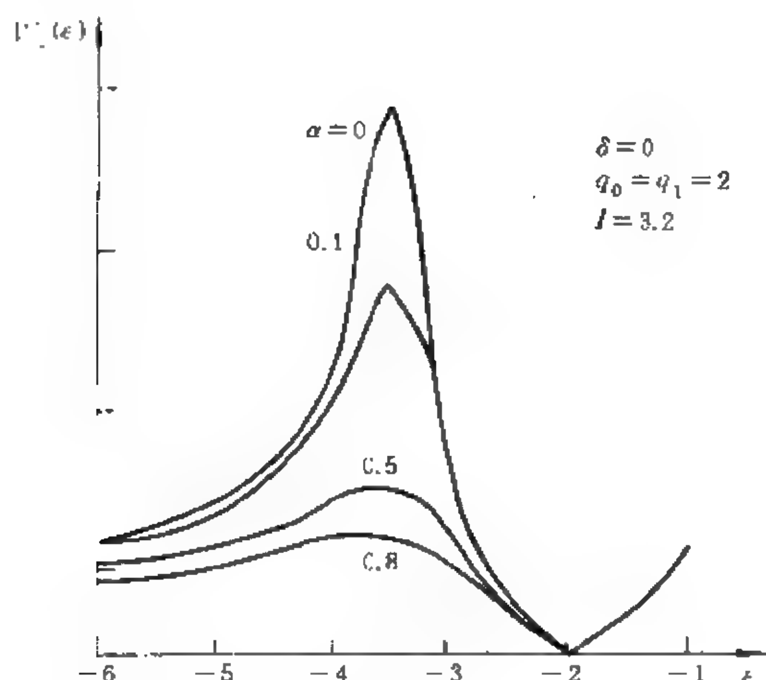


图 3.5.11 $q_0=q_1=2$ 且 $I=3.2$ 时，不同 α 值对应的低能光电子谱

2. $|c_1\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$跃迁对低能光电子谱的影响

由 q_1 的定义式(3.5.69)式可知，q_1 反映了$|c_1\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$跃迁相对于$|b\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$跃迁的重要性. $q_1\to\infty$对应于可忽略$|c_1\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$跃迁的影响，而 q_1 越小对应于这一跃迁越为重要.

图 3.5.12 给出了不同 q_1 值下，由(3.5.93)式描述的低能光电子谱值，这里 $I=1$，$q_0=2$，$\alpha=0.8$. 图中表明，不同的峰值使得$W_1(\varepsilon)$具有不同的形状. 与 $q_1\to\infty$的情况相比，$|c_1\rangle\longleftrightarrow|c_2\rangle$这一跃迁过程使得原来出现的峰，在 $q_1=4$ 时消失，$q_1=3$ 时成为凹陷，

而 $q_1=2$ 时，原有的峰变成了零点.

特别值得指出的是，由(3.5.56)式可知，在不计及 $|c_1\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$ 的影响时，$\varepsilon=-\gamma q_0$ 始终是光电子谱的 Fano 零点，而这里我们从(3.5.93)式看到，Fano 零点不再存在. 这说明二阶离化过程使得低能光电子谱的性质发生了显著的变化.

综上可知，$|b\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$ 跃迁对 $W_1(\varepsilon)$ 的影响主要是减弱它的强度，对 $|c_1\rangle \longleftrightarrow |c_2\rangle$ 跃迁的影响主要是改变光电子谱的线形.

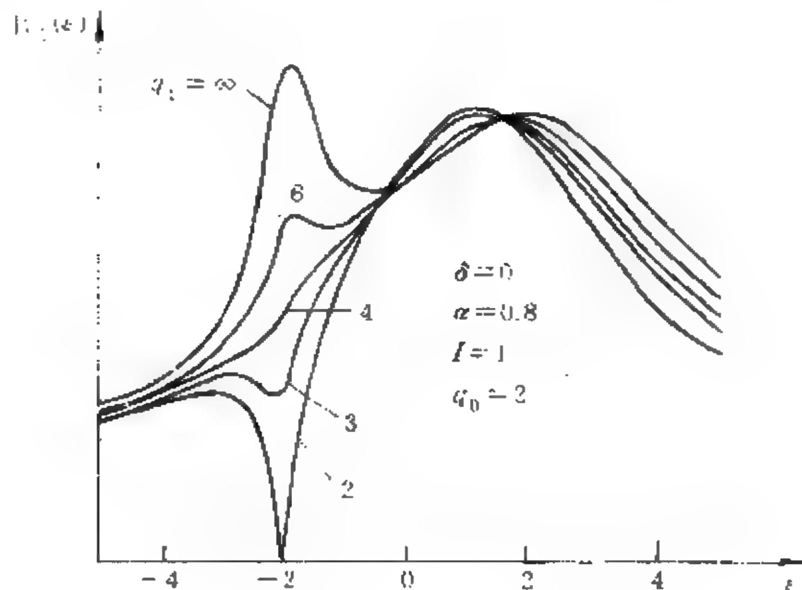


图 3.5.12 $q_0=2$，$I=1$ 且 $\alpha=0.8$ 时，不同 q_1 值对应的低能光电子谱

二、高能光电子谱及峰开关效应

由于高阶离化过程的速率 $\gamma_a=\alpha I$ 正比于光强，因此高能光电子谱的强度主要取决于激光场的强度. 图 3.5.13 给出了高能光电子谱和低能光电子谱随光强的变化. 不难发现，在 $I=1.0$ 相对弱场作用下，高能光电子谱还不很重要. 光电子谱主要由低能光电子谱决定. 但随着光强的提高，高能光电子谱的强度越来越高，同时低能光电子谱减弱，以致高能谱占主导地位，发生前面所提的"峰开关"效应. 可见，在强激光场条件下，高阶离化过程起着非常

重要的作用.

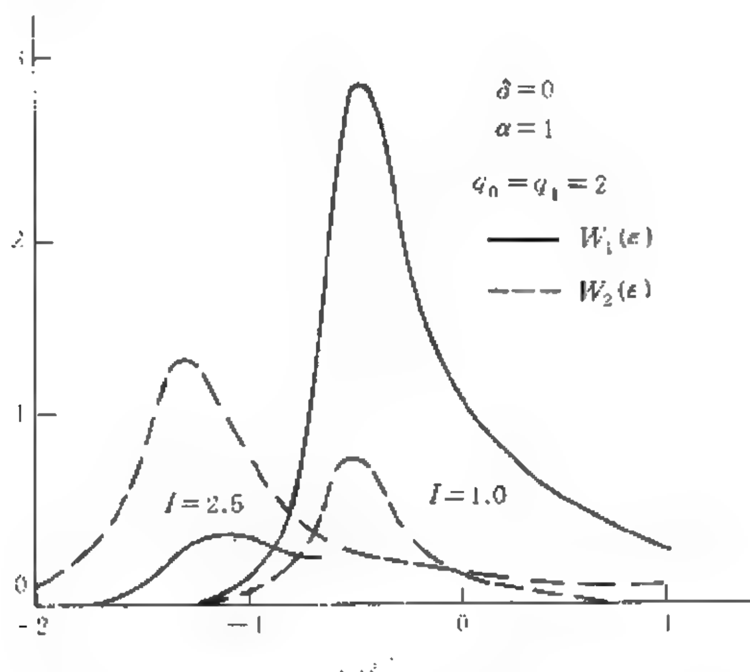


图 3.5.13 高能光电子谱和低能光电子谱随光强的变化

以上的讨论表明,强场自电离系统中的高阶离化过程可以使高能光电子谱($\omega\approx E_b$ 附近)的性质发生改变,高能光电子谱的强度可以超过低能光电子谱的强度,发生"峰开关"效应,因此在光离化问题中,研究高阶离化过程的影响具有重要的意义.

参 考 文 献

[1] U. Fano, *Phys. Rev.*, **124**, 1866 (1961).
[2] P. Agostini, G. Petite and N. K. Rahman, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1127 (1979).
[3] K. Rzazewski and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 408 (1981).
[4] P. Lambropoulos and P. Zoller, *Phys. Rev.*, **A24**, 379 (1981).
[5] K. Rzazewski and J. H. Eberly, *Phys. Rev.*, **A27**, 2026 (1983).
[6] G. S. Agarwal, S. L. Haan and J. Cooper, *Phys. Rev.*, **A29**, 2552 (1984).
[7] G. S. Agarwal, S. L. Haan and J. Cooper, *Phys. Rev.*, **A29**, 2565 (1984).
[8] Z. Deng and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B1**, 102 (1984).
[9] M. H. R. Hutchinson and K. M. M. Ness, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 105 (1988).
[10] L. Roso-Franco and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B7**, 407 (1990).
[11] 姚关华、徐至展, 光学学报, **9**, 673 (1989).
[12] 陈荣清、姚关华、徐至展, 物理学报, **39**, 882 (1990).

[13] P. L. Knight, M. A. Lauder and B. J. Dalton, *Phys. Rep.*, **190**, 1 (1990).
[14] J. H. Eberly, J. Javanien and K. Rzazewski, *Phys. Rep.*, **204**, 331 (1991).
[15] L. Roso-Franco, K. Rzazewski and J. H. Eberly, *J. Mod. Opt.*, **38**, 997 (1991).
[16] 徐至展、姚关华、陈荣清,中国科学,A 101 (1992).
[17] R. Grobe and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 2905 (1992).
[18] 李高翔、彭金生,*Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, **2**, 569 (1993).
[19] M. E. St. J. Dutton and B. J. Dalton, *J. Mod. Opt.*, **40**, 123 (1993).
[20] K. Burnett, V. C. Reed and P. L. Knight, *J. Phys.*, **B26**, 561 (1993).
[21] 李高翔、彭金生,*Phys. Rev.*, **A52**, 465 (1995).
[22] 李高翔、彭金生,*Opt. Commun.*, **123**, 34 (1996).

第六章　激光场中原子的运动

前面在讨论光场与原子相互作用系统中原子的量子特性时，重点研究了原子与激光场作用过程中原子的内态性质，如粒子布居数和偶极矩的时间演化、原子的相干捕获和原子算符的压缩效应等等，而没有讨论原子质心运动因光场-原子的作用发生的改变．由于光子具有动量，因此原子在吸收和发射光子的过程中，它的动量会发生改变，从而使原子运动学行为发生变化．因为普通光源的光强很弱，它对原子运动学行为的影响可以忽略，而激光场的光强很大，所以它对原子运动学行为的影响则比较显著．本章将集中讨论这方面的问题，重点讨论激光场作用下原子的动量分布及原子所受的力．我们知道，激光场有行波场和驻波场，这里首先研究不考虑自发发射效应时，在驻波场作用下原子的衍射和偏离现象．实际上，在原子经过驻波型激光场时，自发发射的效应对原子的偏离和衍射的影响是很微弱的，这已为现代关于原子的偏离和衍射实验所证实，所以我们的假设是合理的．但是，在讨论原子在辐射场中的受力情况时，我们将看到，自发发射的效应是十分重要的，它是原子受到的辐射压力或者说散射力的物理根源．本章讨论原子受力问题时，将介绍两种常用的方法，一种是应用准经典理论，从光学布洛赫方程出发，讨论原子所受的力，这里重点分析辐射力的性质；另一种方法是修饰态方法，这里重点讨论原子在激光场中所受到的辐射偶极力．

第一节　驻波场中原子的偏离和衍射

一、与驻波场相互作用的原子系统的态函数

下面讨论运动的原子经过驻波型激光场以后的衍射和偏离情

况．令质量为 M 的二能级原子在进入激光场之前，它的动量为 $\boldsymbol{P}_0$，如图 3.6.1 所示．因激光场为一驻波场，在准经典理论中它可以看作是两个强度相同、波矢传播方向相反的两行波场的叠加．驻波场的电场强度可以写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,t)&=\boldsymbol{\varepsilon}\,2E_0\cos(\omega t)\cos(kx)\\&=\boldsymbol{\varepsilon}\left[E_0\cos(\omega t-kx)+E_0\cos(\omega t+kx)\right]\end{aligned}\tag{3.6.1}$$

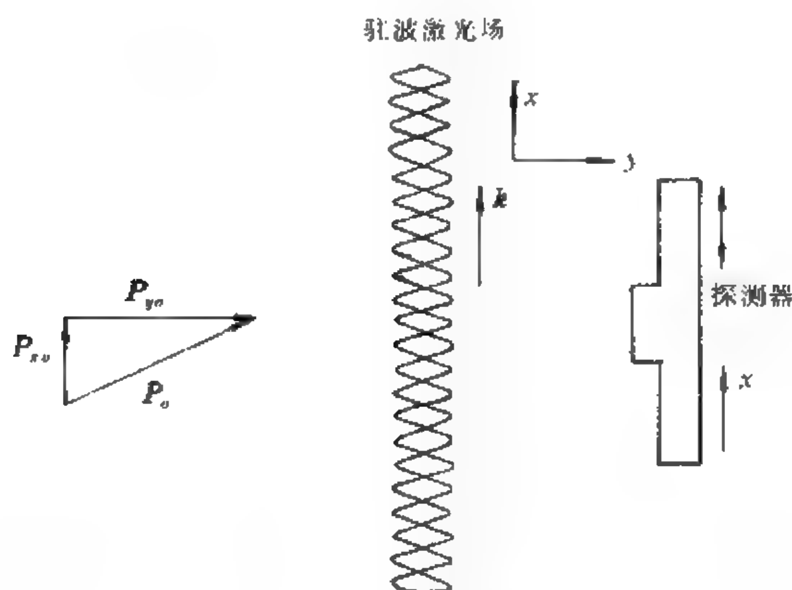


图 3.6.1　原子与驻波光场相互作用示意图

原子进入驻波场以后，将与激光场相互作用，此时系统的哈密顿量可写为

$$H=H_A+H_F+V\tag{3.6.2}$$

其中 H_A 为二能级原子的自由哈密顿量，此时它包括原子的动能项 $\boldsymbol{P}^2/2M$，也包括原子的内能项 $\hbar\omega_0 S_z$，所以

$$H_A=\hbar\omega_0 S_z+\boldsymbol{P}^2/2M\tag{3.6.3a}$$

可以把动量为 $\boldsymbol{P}$ 的二能级原子的基态和激发态态矢分别表示为 $\psi_\pm(\boldsymbol{p})$，它们满足本征值方程：

$$H_A\psi_\pm(\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{P}^2/2M\pm\hbar\omega_0/2)\psi_\pm(\boldsymbol{p})\tag{3.6.3b}$$

由于频率为 ω、波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的单模驻波场可以等效为两个波矢方向相反的行波场，因此(3.6.2)式中光场的自由哈密顿量可以表示为

$$H_F = \sum_{i=1}^{2} \omega a_i^{\dagger} a_i \tag{3.6.4}$$

式中 a_i 和 $a_i^{+}(i=1,2)$ 分别表示频率为 ω、波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的光子的湮没和产生算符，其中 $\boldsymbol{k}_i$ 满足

$$\boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k} \tag{3.6.5}$$

在这种情况下，原子-光场相互作用的哈密顿量 V 可以表示为

$$V = \hbar \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_0 [S_+ a_i \exp(ik_i x) + S_- a_i^{+} \exp(-ik_i x)] \tag{3.6.6}$$

其中 x 表征沿驻波场波矢方向的坐标．与(1.4.36)式不同的是，上式含有与波矢量有关的项 $\exp(\pm ik_i x)$，这是因为在第一篇第四章中我们关心的是原子内态的运动情况，因此那里的 x 值约为一个原子半径，在电偶极近似下 $\exp(\pm ik_i x)\approx 1$．而这里我们研究的问题是原子在激光场中的运动，这里的 x 对应的是原子质心在激光场中的坐标，因此偶极近似不再适用．这样就确定了描述原子-光场相互作用能的哈密顿量(3.6.6)式的表示．由(3.6.2)式出发，就可求解出 t 时刻系统的态矢，进而得知原子的动量在激光场作用下的变化情况．在求解系统的态矢之前，我们先来分析一下原子与驻波激光场相互作用的过程．

假设原子在进入激光场之前处在动量为 $\boldsymbol{P}$ 的基态 $\psi_-(\boldsymbol{P})$，双模行波场均处在相干态 $|\alpha_i\rangle$，其平均光子数分别为 $N_i = |\alpha_i|^2$．当 $N_i \gg 1$ 时，在准经典近似下，相干态 $|\alpha_i\rangle$ 可以近似用粒子数态 $\varphi_i(N_i) = |N_i\rangle$ 来表示，因此初始时原子-光场耦合系统处在态

$$\Phi_0 = \varphi_1(N_1)\varphi_2(N_2)\psi_-(\boldsymbol{P}) \tag{3.6.7}$$

当原子进入激光场后，它与激光场作用会发生吸收和受激发射过程．处在基态的原子可以从第一个行波场中吸收一个光子跃迁到

激发态，这时(3.6.7)式中描述第一个行波场的态函数 $\varphi_1(N_1)$ 变为 $\varphi_1(N_1-1)$，而同时原子的动量则增加 $\hbar \boldsymbol{k}_1$，那么系统的态矢变为

$$\Phi_1=\varphi_1(N_1-1)\varphi_2(N_2)\psi_+(\boldsymbol{P}+\hbar \boldsymbol{k}_1) \qquad (3.6.8)$$

类似地，处在 Φ_0 态的原子也可从波矢为 $\boldsymbol{k}_2$ 的第二个行波场中吸收一个光子而跃迁到激发态 Φ_{-1}：

$$\Phi_{-1}=\varphi_1(N_1)\varphi_2(N_2-1)\psi_+(\boldsymbol{P}+\hbar \boldsymbol{k}_2) \qquad (3.6.9)$$

处在激发态 Φ_1 的原子在光场作用下会发生受激发射现象，它既可以发射一个波矢为 $\boldsymbol{k}_1$ 的光子而使系统跃迁回基态 Φ_0，也可以发射一个波矢为 $\boldsymbol{k}_2$ 的光子而跃迁回基态。如果处于 Φ_1 态的原子发射一个波矢为 $\boldsymbol{k}_2$ 的光子，那么系统第二个行波场的态函数变为 $\varphi_2(N_2+1)$，原子的动量减少 $\hbar \boldsymbol{k}_2$，所以系统的态矢变为

$$\Phi_2=\varphi_1(N_1-1)\varphi_2(N_2+1)\psi_-(\boldsymbol{P}+\hbar \boldsymbol{k}_1-\hbar \boldsymbol{k}_2) \quad (3.6.10)$$

与此相似，处在 Φ_{-1} 态的原子在发射一个动量为 $\hbar \boldsymbol{k}_1$ 的光子后跃迁到基态，那么系统演化到

$$\Phi_{-2}=\varphi_1(N_1+1)\varphi_2(N_2-1)\psi_-(\boldsymbol{P}-\hbar \boldsymbol{k}_1+\hbar \boldsymbol{k}_2) \quad (3.6.11)$$

事实上，在原子经过驻波场区域的过程中，要经历多次吸收光子和发射光子的过程，如果初始处在 Φ_0 态的原子经过偶数次(n)吸收和发射光子的过程，那么系统将演化到态

$$\Phi_n(\boldsymbol{p})=\varphi_1(N_1-n/2)\varphi_2(N_2+n/2)\psi_-(\boldsymbol{P}+n\hbar \boldsymbol{k}_1/2-n\hbar \boldsymbol{k}_2/2) \quad (n\ 为偶数) \qquad (3.6.12)$$

而经过奇数次吸收和发射光子的过程后，则会演化到态

$$\Phi_n(\boldsymbol{p})=\varphi_1\left(N_1-\frac{n+1}{2}\right)\varphi_2\left(N_2+\frac{n-1}{2}\right)\psi_-\left(\boldsymbol{P}+\frac{n+1}{2}\hbar \boldsymbol{k}_1-\frac{n-1}{2}\hbar \boldsymbol{k}_2\right) \quad (n\ 为奇数) \qquad (3.6.13)$$

图 3.6.2 给出了在原子-光场耦合系统的跃迁过程中，原子和光场状态的变化. 显然$\{\Phi_n(\boldsymbol{p})\}$能构成描述原子-光场耦合系统的完备本征态矢集，利用它可以把系统在任意时刻 t 的态矢 $\Psi(t)$ 表示出来：

$$\Psi(t) = \int d\boldsymbol{p} \sum_n C_n(\boldsymbol{p}, t)\Phi_n(\boldsymbol{p})\exp(-i\xi_n t) \quad (3.6.14)$$

这里 ξ_n 是一可任意选择的相位因子.

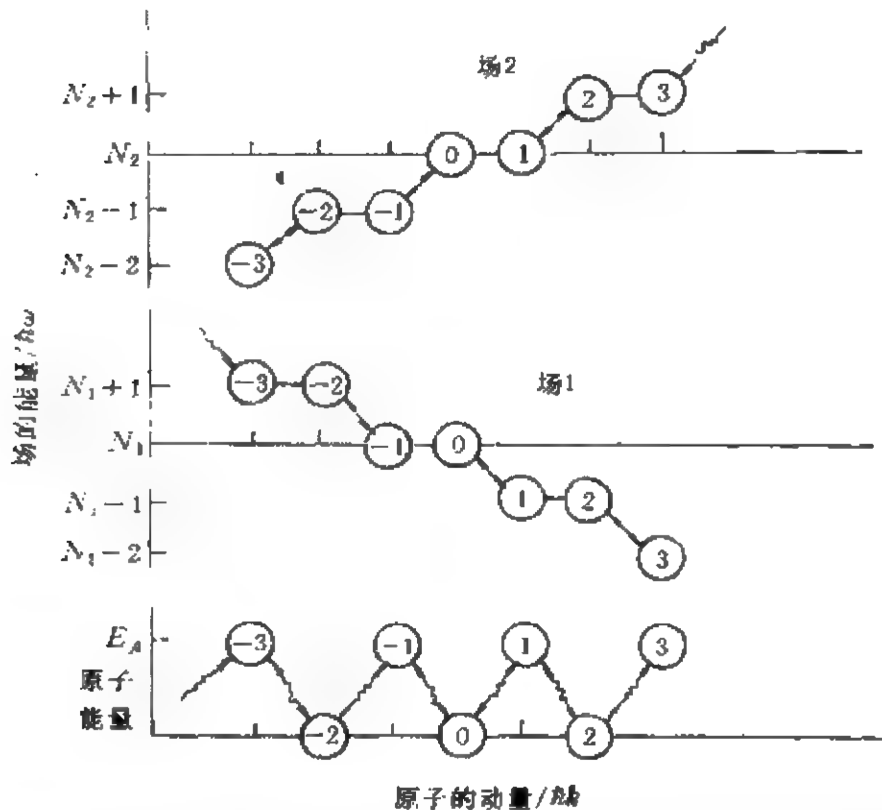


图 3.5.2 原子-光场耦合系统的跃迁过程中，原子和光场状态的变化示意图

将(3.6.14)及(3.6.2)式一并代入薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\Psi(t) \quad (3.6.15)$$

注意到

$$\exp(\pm ik_i x)\Psi(\boldsymbol{p}) = \Psi(\boldsymbol{p} \pm \hbar \boldsymbol{k}_i) \quad (3.6.16)$$

可以得到概率幅$C_n(\boldsymbol{p},t)$随时间演化的方程为

(1) 当n为偶数时

$$
\begin{aligned}
i\hbar\dot{C}_n = & [(N_1-n/2)\hbar\omega+(N_2+n/2)\hbar\omega \\
& +\frac{1}{2M}(\boldsymbol{P}+n\hbar\boldsymbol{k}_1/2-n\hbar\boldsymbol{k}_2/2)^2-\hbar\omega_0/2-\hbar\xi_n]C_n \\
& +\hbar\varepsilon_0(\sqrt{N_1-n/2}C_{n+1}+\sqrt{N_2+n/2}C_{n-1})
\end{aligned}
\tag{3.6.17}
$$

(2) 当n为奇数时

$$
\begin{aligned}
i\hbar\dot{C}_n = & [(N_1-\frac{n+1}{2})\hbar\omega+(N_2+\frac{n-1}{2})\hbar\omega \\
& +\frac{1}{2M}(\boldsymbol{P}+\frac{n+1}{2}\hbar\boldsymbol{k}_1-\frac{n-1}{2}\hbar\boldsymbol{k}_2)^2+\hbar\omega_0/2-\hbar\xi_n]C_n \\
& +\hbar\varepsilon_0(\sqrt{N_1-\frac{n-1}{2}}C_{n-1}+\sqrt{N_2+\frac{n+1}{2}}C_{n+1})
\end{aligned}
\tag{3.6.18}
$$

由于ξ_n为一可任意选择的相位因子，为书写简单起见，在(3.6.17)，(3.6.18)式中对于n为偶数的情况，令

$$
\hbar\xi_n=(N_1-n/2)\hbar\omega+(N_2-n/2)\hbar\omega-\hbar\omega/2+E_0 \tag{3.6.19}
$$

对于n为奇数的情况，则令

$$
\hbar\xi_n=\left(N_1-\frac{n+1}{2}\right)\hbar\omega+\left(N_2+\frac{n-1}{2}\right)\hbar\omega+\hbar\omega/2+E_0 \tag{3.6.20}
$$

这里E_0为原子的初始动能，即

$$
E_0=[P_x^2+P_y^2]/(2M)=\boldsymbol{P}^2/(2M) \tag{3.6.21}
$$

将(3.6.19)—(3.6.21)式一并代入(3.6.17)，(3.6.18)式，得到

(1) 当n为偶数时

$$
\begin{aligned}
i\dot{C}_n = & \delta C_n/2+\left[\frac{1}{2M}(n\hbar\boldsymbol{k}_1/2-n\hbar\boldsymbol{k}_1/2)^2+\frac{\boldsymbol{P}}{M}(n\hbar\boldsymbol{k}_1/2\right. \\
& \left.-n\hbar\boldsymbol{k}_2/2)\right]C_n/\hbar+\varepsilon_0(\sqrt{N_1-n/2}C_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$+\sqrt{N_2+n/2}C_{n-1}]$$ (3.6.22)

(2) 当 n 为奇数时

$$i\dot{C}_n=-\delta C_n/2+[\frac{1}{2M}(\frac{n+1}{2}\hbar k_1-\frac{n-1}{2}\hbar k_2)^2$$

$$+\frac{P}{M}(\frac{n+1}{2}\hbar k_1-\frac{n-1}{2}\hbar k_2)]C_n/\hbar$$

$$+\varepsilon_0(\sqrt{N_1-\frac{n-1}{2}}C_{n-1}+\sqrt{N_2+\frac{n+1}{2}}C_{n+1})$$ (3.6.23)

式中 $\delta=\omega-\omega_0$ 为原子-光场耦合系统的失谐量.

注意到光场是强相干光场，N_1 和 N_2 均远大于 1，并且激光场存在的区域是有限的，因此原子吸收和发射光子的次数 n 的值远小于 N_1 和 N_2 的值，可作如下近似:

$$\sqrt{N_2+n/2}\approx\sqrt{N_2+\frac{n+1}{2}}\approx\sqrt{N_2},$$

$$\sqrt{N_1-n/2}\approx\sqrt{N_1-\frac{n-1}{2}}\approx\sqrt{N_1}$$ (3.6.24)

又因为这里的激光场是一幅度为 $2E_0$ 的驻波场，它被等效为两个幅度相等的行波场，所以

$$\sqrt{N_1}=\sqrt{N_2}=\sqrt{N}$$ (3.6.25)

将(3.6.5)和(3.6.25)式一并代入(3.6.22)，(3.6.23)式得到

(1) 当 n 为偶数时

$$i\dot{C}_n=\delta C_n/2+[\hbar(nk)^2/(2M)+nP_xk/M]C_n+\Omega[C_{n+1}+C_{n-1}]/2$$ (3.6.26)

(2) 当 n 为奇数时

$$i\dot{C}_n=-\delta C_n/2+[\hbar(nk)^2/(2M)+nP_xk/M]C_n+\Omega[C_{n+1}+C_{n-1}]/2$$ (3.6.27)

上式中$\Omega=2\varepsilon_0\sqrt{N}$为原子的拉比振荡频率. 在(3.6.26),(3.6.27)式中令

$$\hbar b=\hbar^2k^2/(2M),\quad q=P_x/(\hbar k) \tag{3.6.28}$$

显然,$\hbar b$为原子吸收或发射一个光子的反冲动能,q为原子在x方向的初始动量与光子动量的比值. (3.6.26),(3.6.27)式中的nP_xk/M对应着多普勒效应造成的频移,$n^2\hbar^2k^2/(2M)$描述原子反冲动能的效应. 这样(3.6.26),(3.6.27)式分别简化为

$$i\dot{C}_n=[\delta/2+b(n^2+2qn)]C_n+\Omega[C_{n+1}+C_{n-1}]/2 \tag{3.6.29}$$

和

$$i\dot{C}_n=[-\delta/2+b(n^2-2qn)]C_n+\Omega[C_{n+1}+C_{n-1}]/2 \tag{3.6.30}$$

求解(3.6.29),(3.6.30)式,就可得出概率幅$C_n(p,t)$随时间的演化,从而得知原子与驻波场作用后它的动量随时间的演化规律. 下面分别讨论原子与驻波型激光场作用后呈现的衍射和偏离现象.

二、原子的衍射

我们假设初始时刻原子动量$\boldsymbol{P}_0$的方向与激光场波矢量$\boldsymbol{k}$垂直,即令$P_x=0$, $q=0$;并且原子-光场相互作用系统满足共振条件,即$\delta=0$;对于激光场较强的情形,由于原子的拉比振荡频率Ω远大于反映原子的反冲动能项bn^2,因此在(3.6.29),(3.6.30)式中可以略去含bn^2项的影响. 这样(3.6.29)和(3.6.30)式简化为

$$i\dot{C}_n=\Omega(C_{n+1}+C_{n-1})/2 \tag{3.6.31}$$

对上式作变换

$$C_n(t)=(-i)^nR_n(t) \tag{3.6.32}$$

则(3.6.31)式化为

$$2\frac{d}{dt}R_n(t)=\Omega(R_{n-1}-R_{n+1})\tag{3.6.33}$$

令 $\zeta=\Omega t$，则上式变为

$$2\frac{d}{d\zeta}R_n(\zeta)=R_{n-1}(\zeta)-R_{n+1}(\zeta)\tag{3.6.34}$$

它与贝塞尔函数的递推关系

$$2\frac{d}{dx}J_n(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\tag{3.6.35}$$

有相同的形式，可见方程(3.6.36)式的解是贝塞尔函数，即

$$R_n(t)=AJ_n(\Omega t)\tag{3.6.36}$$

式中 A 为与 t 无关的常数，宗量为 Ωt 的 n 阶贝塞尔函数 $J_n(\Omega t)$ 满足

$$J_n(\Omega t)=J_{-n}(\Omega t)\tag{3.6.37}$$

将(3.6.36)，(3.6.37)式代入(3.6.32)式，考虑到归一化条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n(t)|^2=1$$

得

$$|A|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n^2(\Omega t)=|A|^2=1$$

式中已利用了

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n^2(x)=1$$

选择适当的相位因子，可使归一化常数 $A=1$. 从而

$$C_n(t)=(-i)^nJ_n(\Omega t)$$

于是，t 时刻原子在 x 方向具有动量 $n\hbar k$ 的概率为

$$P_n(t)=|C_n(t)|^2=J_n^2(\Omega t)\tag{3.6.38}$$

由于 n 阶贝塞尔函数 $J_n(\Omega t)$ 和 $-n$ 阶贝塞尔函数 $J_{-n}(\Omega t)$ 满

足(3.6.37)式，因此原子在正 x 方向和负 x 方向的动量分布呈对称分布. 图 3.6.3 给出了不同时刻原子的动量分布情况，它与光场的衍射现象相似，可见原子的运动经驻波型激光场作用后具有衍射性质. 原子在 x 方向具有的不同动量以及不同的动量分布可通过探测器上的不同位置出现的不同强度的条纹表现出来. 原子在驻波型激光场作用下发生的这种衍射现象是原子波动性质的反映. 从图 3.6.3 还可发现，随着原子与激光场中相互作用时间的增长，或者说驻波型激光场存在的区域增宽，原子 x 方向的动量在 $n=0$ 附近的概率值减小. 当 $\Omega t=12.5$ 时，$P_n(t)$在$|n|>15$ 时的值为零；而在 $\Omega t=25$ 时，$P_n(t)$在$|n|>27$ 时的值才为零. 这说明随着原子-光场相互作用时间的增长，原子的动量分布宽度变宽，也就是说，原子从第一个行波场中较多次地吸收光子，并把它发射到第二个行波场中. 同样地，原子也可以从第二个行波场中

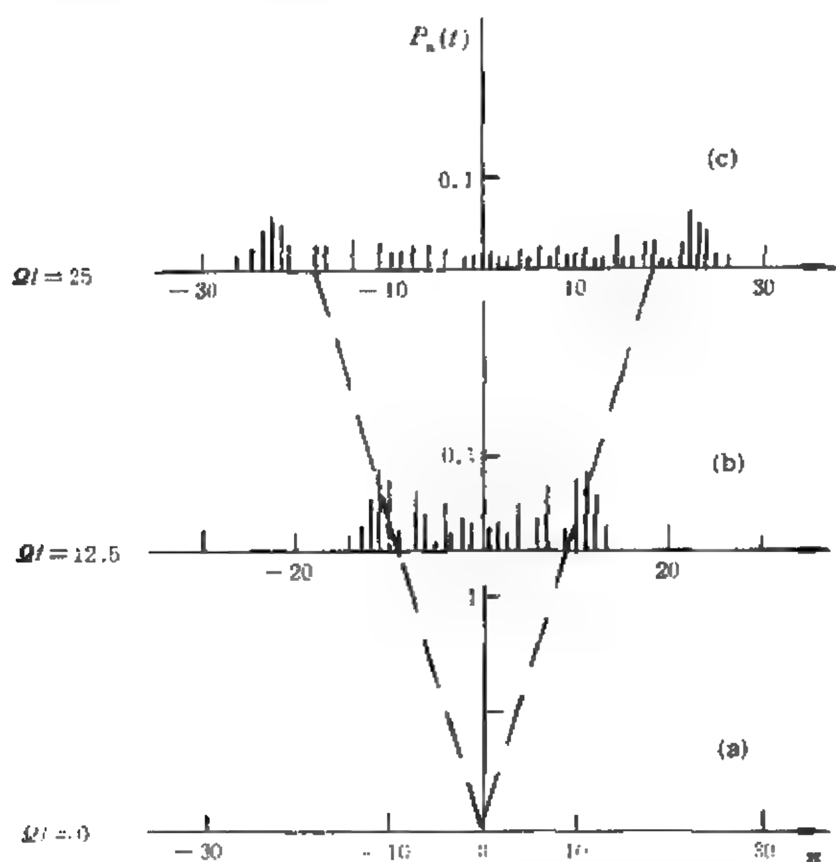


图 3.6.3　$\delta=0$，$P_r=0$ 时，不同时刻原子的动量分布

较多次地吸收光子，而把它发射到第一个行波场中，从而导致原子的动量分布朝着$|n|$增大的方向移动．同时从图 3.6.3(b)和图 3.6.3(c)可知，当 $\Omega t=12.5$ 和 25 时，$P_n(t)$分别在$|n|=11$ 和 22 附近有最大值，这意味着与驻波型激光场作用的原子，在波矢方向的动量分布具有明显的双峰结构；而在$|n|>13(26)$时，$P_n(t)$的值将很快地衰减到零．这一结果表明，由于原子动量的概率分布函数 $J_n^2(\Omega t)$在 $n\approx\Omega t$ 时具有最大值，因此在驻波型激光场作用下，原子动量的改变值是以原子的拉比频率为速率随着时间变化的．

上面我们在共振情况($\delta=0$)下讨论了初始时刻 $P_x=0$ 时原子在驻波激光场作用下的衍射现象，下面我们再来看看初始时刻 $P_x\neq 0$ 时原子的运动情况．由于 $P_x\neq 0$，故方程(3.6.29)，(3.6.30)式中不能忽略多普勒效应项 $2bqnC_n$ 的影响．如果认为原子的拉比频率 Ω 和多普勒频移项 $2bqn$ 的值均远大于原子的反冲动能项，即

$$bn^2\ll|2bqn|,\ \Omega/2 \tag{3.6.39}$$

那么在这种情况下，方程(3.6.29)和(3.6.30)式简化为

$$i\dot{C}_n=2bqnC_n+\Omega(C_{n+1}+C_{n-1})/2 \tag{3.6.40}$$

对上式作变换

$$C_n(t)=\tilde{C}_n(t)\exp(-ibqnt)(-i)^n \tag{3.6.41}$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{C}_n(t)&=-ibq\,\tilde{C}_n+\Omega[\tilde{C}_{n-1}\exp(ibqt)-\tilde{C}_{n+1}\exp(-ibqt)]/2\\&=-ibqn\,\tilde{C}_n+\Omega\cos(bqt)(\tilde{C}_{n-1}-\tilde{C}_{n+1})/2\\&\quad+i\Omega\sin(bqt)(\tilde{C}_{n-1}+\tilde{C}_{n+1})/2\end{aligned}$$

即

$$2\frac{d}{dt}\tilde{C}_n=-i[2bqn\,\tilde{C}_n-\Omega\sin(bqt)(\tilde{C}_{n+1}+\tilde{C}_{n-1})]$$

$$+\Omega\cos(bqt)(\tilde{C}_{n-1}-\tilde{C}_{n+1}) \tag{3.6.42}$$

如果令

$$\eta=\frac{\Omega}{bq}\sin(bqt) \tag{3.6.43}$$

则(3.6.42)式化为

$$2\frac{d}{d\eta}\tilde{C}_n(\eta)=-i\frac{bq}{\Omega\cos(bqt)}\{2n\tilde{C}_n(\eta)-\eta[\tilde{C}_{n-1}(\eta)+\tilde{C}_{n+1}(\eta)]\}$$

$$+\tilde{C}_{n-1}(\eta)-\tilde{C}_{n+1}(\eta) \tag{3.6.44}$$

注意到贝塞尔函数的递推公式(3.6.35)式及递推关系式

$$2nJ_n(x)=x[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)] \tag{3.6.45}$$

立即得到(3.6.44)式的解为

$$\tilde{C}_n(t)=BJ_n\left[\frac{\Omega}{bq}\sin(bqt)\right] \tag{3.6.46}$$

式中 B 为概率归一化常数，$J_n\left[\frac{\Omega}{bq}\sin(bqt)\right]$是宗量为$\frac{\Omega}{bq}\sin(bqt)$的 n 阶贝塞尔函数. 利用$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n^2(x)=1$ 可得 $B=1$，因此

$$C_n(t)=(-i)^n\exp(-ibqnt)J_n\left[\frac{\Omega}{bq}\sin(bqt)\right]$$

$$=\exp[-in(2bqt+\pi)/2]J_n\left[\frac{\Omega}{bq}\sin(bqt)\right] \tag{3.6.47}$$

相应的原子动量概率分布函数为

$$P_{n2}(t)=|C_n(t)|^2=J_n^2\left[\frac{\Omega}{bq}\sin(bqt)\right] \tag{3.6.48}$$

分析动量概率分布函数(3.6.48)式的时间演化特征，则可得知原子的运动规律. 与(3.6.38)式相比，这里贝塞尔函数的宗量不再是随 t 线性变化. 而是一频率为 bq 的正弦函数. 图 3.6.4 分别给出了 $2bq=1.63\times10^6\text{Hz}$，$\Omega/(bq)=20$ 时，在时间点 $bqt=0$，

$\pi/4$，$\pi/2$，$3\pi/4$，π 时 $P_{n2}(t)$随 n 的变化规律．从图中看到，原子动量的概率分布随着时间 t 的增加呈周期性变化，其周期为 $\pi/(bq)$，这是因为

$$P_{n2}\left(t+\frac{\pi}{bq}\right)=J_n^2\left[\frac{\Omega}{bq}\sin(\pi+bqt)\right]=J_n^2\left(-\frac{\Omega}{bq}\sin bqt\right)$$

$$=J_n^2\left(\frac{\Omega}{bq}\sin bqt\right)=P_{n2}(t)$$

这一点与图 3.6.3 完全不同，在那里随着 t 的增加，原子动量分布变宽．这里则是在 $bqt=(k+1/2)\pi(k=0,1,2,\cdots)$时动量分布最宽．换句话说，在 $bqt=(k+1/2)\pi$ 时，原子能最大限度地把第一行波场中的光子转换到第二行波场中，或者把第二行波场中的光子转换到第一行波场中去．图 3.6.4(e)还表明，当 $t=k\pi/(bq)$ $(k=1,2,\cdots)$时，原子的动量分布与 $t=0$ 时相同，也就是说，原子在此时并不发生衍射现象．这一情况也与忽略多普勒效应以后的结果是不相同的．另外，从图 3.6.4(b)—(d)中可以看到，当 $t\neq0$，π 时，动量分布在不同的时刻点都呈现出较明显的双峰结构．对于不同的时间而言，$P_{n2}(t)$的最大值出现在$|n|\approx\Omega|\sin bqt|/(bq)$附近，这说明在光场作用下，原子动量的改变不仅与原子的拉比振荡频率 Ω 有关，而且还与反映多普勒效应的 bq 有关，并且这种动量改变是以 $\pi/(bq)$为周期随时间作周期性的变化．应该指出的是，上述关于原子与共振驻波型激光场作用以后呈现出的衍射现象已为实验所测定．

下面我们再来看看原子-光场的频率不共振时，失谐量对原子衍射行为的影响．为计算简单起见，假设原子以垂直于波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向进入激光场，从而可在(3.6.29)和(3.6.30)式中略去多普勒效应的影响，并且认为原子的反冲动能的影响远小于失谐量和拉比振荡频率 Ω，从而可以忽略掉 bn^2C_n．这时(3.6.29)和(3.6.30)式简化为

$$i\dot{C}_{2n}=\delta C_{2n}/2+\Omega(C_{2n-1}+C_{2n+1})/2 \qquad (3.6.49)$$

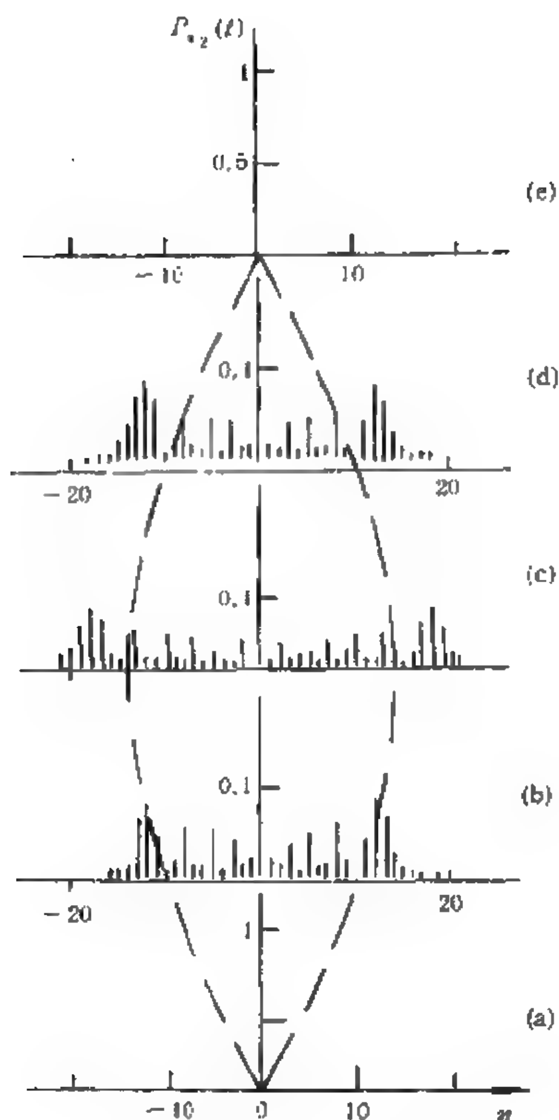


图 3.6.4 $\delta=0$，$P_x\neq0$ 时，
不同时刻原子的动量分布
(a) $bqt=0$；(b) $bqt=\pi/4$；(c) $bqt=\pi/2$；
(d) $bqt=3\pi/4$；(e) $bqt=\pi$

$$i\dot{C}_{2n-1}=-\delta C_{2n-1}/2+\Omega(C_{2n}+C_{2n-2})/2 \qquad (3.6.50)$$

如果失谐量$|\delta|$的值远大于原子的拉比振荡频率 Ω，那么初始处于基态的原子跃迁到激发态后将立即回到基态，原子在激发态停留的时间很短. 在这样的情况下，可以利用绝热近似，即令

$$\dot{C}_{2n-1}=0=-\delta C_{2n-1}/2+\Omega(C_{2n}+C_{2n-2})/2$$

从而

$$C_{2n-1}\approx\Omega(C_{2n}+C_{2n-2})/\delta \tag{3.6.51}$$

将上式及 $C_{2n+1}=\Omega(C_{2n+2}+C_{2n})/\delta$ 一并代入(3.6.49)式得

$$i\dot{C}_{2n}=(\delta/2+\Omega^2/\delta)C_{2n}+\Omega^2(C_{2n+2}+C_{2n-2})/(2\delta) \tag{3.6.52}$$

令

$$C_{2n}(t)=(-i)^n\exp[-i(\delta/2+\Omega^2/\delta)t]Q_n(t) \tag{3.6.53}$$

则(3.6.52)式变为

$$\frac{d}{dt}Q_n=\Omega^2(Q_{n-1}-Q_{n+1})/(2\delta) \tag{3.6.54}$$

利用(3.6.35)式得到

$$C_{2n}(t)=(-i)^n\exp[-i(\delta/2+\Omega^2/\delta)t]AJ_n(\Omega^2t/\delta) \tag{3.6.55}$$

式中 A 为与 t 无关的归一化常数，由归一化条件容易得到

$$\begin{aligned}1&=\sum_n|C_{2n}|^2+|C_{2n-1}|^2\\&=A^2\sum_n\{J_n^2(\Omega^2t/\delta)+(\Omega/\delta)^2|J_n(\Omega^2t/\delta)\\&\quad-iJ_{n-1}(\Omega^2t/\delta)|^2\}=A^2[1+2(\Omega/\delta)^2]\end{aligned}$$

所以

$$A=[1+2(\Omega/\delta)^2]^{-1/2}\approx1-(\Omega/\delta)^2 \tag{3.6.56}$$

这里已利用了 $\Omega/|\delta|\ll1$，并且只精确到 Ω/δ 的二级小量。从而原子动量的概率分布函数为

$$P_{2n}(t)=|C_{2n}(t)|^2=[1-2(\Omega/\delta)^2]J_n^2(\Omega^2t/\delta) \tag{3.6.57}$$

$$P_{2n-1}(t)=|C_{2n-1}(t)|^2\approx(\Omega/\delta)^2[J_n^2(\Omega^2t/\delta)+J_{n-1}^2(\Omega^2t/\delta)] \tag{3.6.58}$$

上面两式表明，在驻波激光场作用下，原子在 x 方向的动量 P_x 为 $2n\hbar k(n=0, \pm1, \pm2,\cdots)$ 值时才有明显的概率分布，而动量 P_x 为 $(2n-1)\hbar k$ 值的概率则很小，如图 3.6.5 所示. 原子经过驻波激光场以后，动量分布之所以具有这种特征，是由于原子-光场的失谐量远大于原子的拉比振荡频率，因此在激光场作用下，初始处在基态的原子从第一个行波场中吸收动量为 $\hbar k_1$ 的光子跃迁到激发态后立即回到基态，并发射一个动量为 $\hbar k_2$ 的光子. 原子将第一个行波场中的光子转换到第二个行波场中，在这种跃迁过程中，它的动量改变值为 $2n\hbar k$。因此在 $2n\hbar k$ 位置，原子具有明显的动量分布. 但由于在跃迁过程中，原子停留在激发态的寿命很短，所以测得原子的动量为 $(2n-1)\hbar k$ 值的概率很小. 这一现象已被钠原子的衍射实验所证实，图 3.6.5 中的竖线代表理论值，"●"表示实验结果，理论计算和实验结果吻合得很好. 值得指出的是，在以上的讨论中，我们均忽略了原子的自发发射效应，实际上，如果当失谐量 δ 远大于原子的自发发射速率 γ 时，自发发射效应是可以忽略的. 图 3.6.5 的理论结果正是在不考虑自发发射时所得到的.

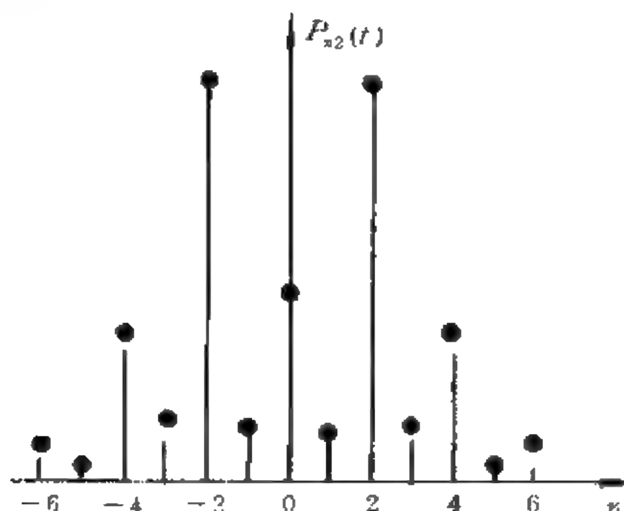


图 3.6.5　原子与驻波光场发生非共振相互作用时，原子的动量分布
图中竖线为理论值，"●"代表实验结果

以上我们讨论了原子在驻波激光场作用下，它的动量概率分布随时间演化的情况，也就是分析了原子被激光场衍射的现象．下面我们再来看看驻波激光场作用下，原子的动量随时间演化的规律．也就是讨论原子被激光场偏离的问题．现代技术中应用原子在激光场中的偏离，已能够有效地对中性原子进行同位素分离．

三、原子的偏离

这里我们仅讨论原子的初始速度方向垂直于激光场波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的情况，即令 $q=0$．此外，我们还略去相对较弱的反冲动能效应项 bn^2 的影响．在这种情况下，由于 $P_n(t)=P_{-n}(t)=J_n^2(\Omega t)$，所以原子动量在波矢方向的期望值为

$$\langle P\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\hbar k P_n(t) = 0$$

由于动量分布是在 $n=0$ 两侧呈对称分布，所以上式给出动量的期望值为0．但是在激光场作用下，反映原子动量实际变化的绝对值的期望值 $\langle|P|\rangle$ 并不为零，它的大小为

$$\langle|P|\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\hbar k J_n^2(\Omega t) = 2\hbar k\sum_{n=1}^{\infty} nJ_n^2(\Omega t) \tag{3.6.59}$$

利用贝塞尔函数的性质

$$\sum_{k=1}^{\infty} kJ_k^2(x) = x^2[J_0^2(x) + J_1^2(x)]/2 - xJ_0(x)J_1(x)/2 \tag{3.6.60}$$

得到

$$\langle|P|\rangle=\hbar k(\Omega t)^2[J_0^2(\Omega t)+J_1^2(\Omega t)]-\hbar k\Omega tJ_0(\Omega t)J_1(\Omega t) \tag{3.6.61}$$

当 $\Omega t\to\infty$ 时，根据贝塞尔函数的渐近公式

$$J_\nu(\Omega t)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\Omega t}}\cos(\Omega t-\nu\pi/2-\pi/4)$$

(3.6.61)式化为

$$\langle |P| \rangle \approx \hbar k(\Omega t)^2 \frac{2}{\pi \Omega t}\left[\cos^2(\Omega t-\pi/4)+\cos^2(\Omega t-\pi/2-\pi/4)\right]$$

$$-\hbar k \Omega t \frac{2}{\pi \Omega t}\cos(\Omega t-\pi/4)\cos(\Omega t-\pi/2-\pi/4)$$

$$\approx 2\hbar k \Omega t/\pi \approx 0.64\hbar k \Omega t \tag{3.6.62}$$

上式表明,在激光场与原子作用较长时间后,原子动量绝对值的期望值随时间 t 线性增长.

原子动量平方的期望值为

$$\langle P^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n\hbar k)^2 J_n^2(\Omega t) = 2\hbar^2 k^2(\Omega t/2)^2 = \hbar^2 k^2 \Omega^2 t^2/2 \tag{3.6.63}$$

这里利用了

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 J_n^2(x) = (x/2)^2 \tag{3.6.64}$$

从(3.6.63)式可知,原子动量平方的期望值的平方根为

$$\langle P^2 \rangle^{1/2} = \hbar k \Omega t/\sqrt{2} \tag{3.6.65}$$

可见原子动量随着时间的增长. 而且由

$$(\Delta P) = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = \hbar k \Omega t/\sqrt{2} \tag{3.6.66}$$

可知,原子的动量以速率 $\Omega/\sqrt{2}$ 线性发散. 由于初始时在 $\boldsymbol{k}$ 方向动量为零的原子通过驻波型激光场后,由于受激光场的作用而得到沿 $\boldsymbol{k}$ 方向的动量,因而原子的运动将向 $\boldsymbol{k}$ 方向偏离,即偏离开图 3.6.1 所示的 $\boldsymbol{y}$ 方向,这种现象称为原子的偏离. 原子的平均偏离角为

$$\theta_{rms} = \langle P^2 \rangle^{1/2}/P_{y0} = \hbar \omega \Omega t/(\sqrt{2} c P_{y0}) \tag{3.6.67}$$

下面我们通过对一典型情况进行分析,来了解一下偏离角的大小. 如果令原子的质量 $M=1.6\times10^{-25}$kg,激光场与原子相互作用的宽度 $L=2.6\times10^{-6}$m,激光场的频率 $\omega=3\times10^{15}\text{s}^{-1}$,原子的拉比

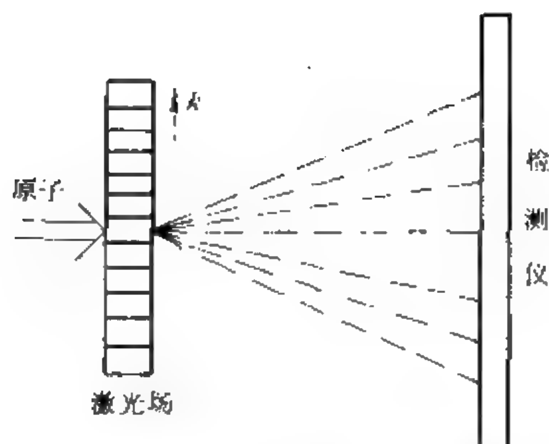


图 3.6.6　激光场作用下运动原子偏离现象示意图

振荡频率 $\Omega=5.6\times10^{11}\mathrm{s}^{-1}$(它对应着激光场的功率 $I\approx10^{6}\mathrm{W/cm^{2}}$),原子初始时在 y 方向的速率为热运动速率 $v_{y0}=420\mathrm{m/s}$,那么激光场与原子相互作用的时间 $t=L/v_{y0}=6.2\times10^{-3}\mathrm{s}$,这时由(3.6.67)式得

$$\theta_{rms}\approx2.2^{\circ}$$

可见原子在激光场作用下将偏离原来的运动方向 2.2°,这一结果可以在实验中观测到. 实际上,现有的实验测量可测到原子的偏离角达到 5°的情况. 原子在激光场作用下的偏离情况,可应用于中性原子的同位素分离技术,通过选择不同的激光频率,使它与原子束中某一特定的同位素元素的本征跃迁频率共振,从而使这一同位素元素在 $\boldsymbol{k}$ 方向获得动量,因而原子的运动方向 $\boldsymbol{v}$ 偏向 $\boldsymbol{k}$,如图 3.6.6 所示,这样就把该特定的同位素元素从原子束中分离出来. 由于激光束的频率可以选择得很精确,而激光束的功率可以选得很高,所以激光场使原子的运动发生偏离,能有效地应用于原子的同位素分离技术.

第二节　辐射场对原子的作用力

从前面的讨论中我们知道,原子在通过激光场时会发生衍射

和偏离现象，也就是说，原子的机械运动状态发生了改变，这说明辐射场对原子具有力的作用. 辐射场对原子的作用力是光子的动量传递给原子的结果. 我们知道，在激光场的作用下，原子吸收一个光子以后要跃迁到高能态，在这一过程中，原子不仅吸收了光子能量 $\hbar\omega$，而且在光束的传播方向还获得了光子动量 $\hbar\omega/c$，当经过时间 τ（τ 为原子处在激发态的寿命）后，原子自发辐射能量为 $\hbar\omega_0$ 的光子后回到基态，同时获得光子的反冲动量 $\hbar\omega_0/c$（ω_0 为原子本征跃迁频率）. 但是，由于自发发射光子的方向是随机的和各向同性的（如图3.6.7所示），所以原子多次自发发射光子的反冲动量

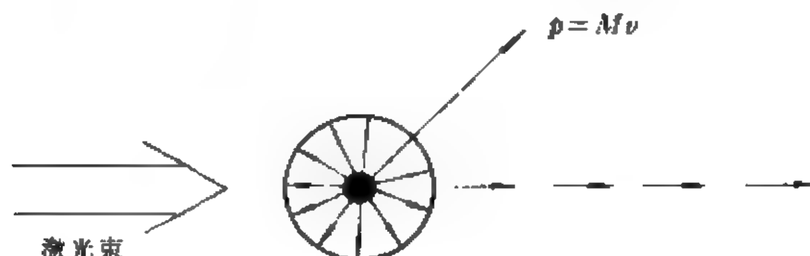


图 3.6.7　运动原子在吸收-自发发射光子过程中，原子动量变化示意图

之和为零，结果原子只在光束传播方向净得多次吸收的光子动量 $n\hbar\omega/c$（n 为原子吸收光子的总次数）. 原子因获得这一动量而受到的力称为光的辐射压力，通常又称为散射力. 由于此力与自发发射有关，因此也称为自发发射力. 原子在与激光场相互作用过程中，虽然也存在受激发射过程，但对于空间均匀的行波场，原子在其作用下受激发射的光子与光束同向，所以原子获得的反冲动量恰与吸收的光子动量数值相等，方向相反，光束没有把动量传递给原子，因而不产生力. 不过，若光强的空间分布不均匀（如驻波场），受激发射过程也会产生力. 因为原子在这种驻波光场作用下，可以从波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的光场中吸收光子，而在受激发射时，则发出波矢为 $-\boldsymbol{k}$ 的光子. 在这一过程中，虽然原子吸收与发射光子的能量相同，但原子的动量却要改变 $2\hbar\omega/c$，从而使原子受力. 我们

把这种与受激跃迁有关的力称为辐射偶极力. 可见,原子在激光场作用下将要受到两种力的作用,即自发发射力和辐射偶极力的作用. 下面我们以辐射场与二能级原子相互作用系统为例,具体讨论这两种力的性质.

一、辐射力的准经典理论

我们首先利用辐射场与原子相互作用的准经典理论来分析原子在辐射场作用下所受的自发发射力和辐射偶极力的性质.

描述一个质量为 M、质心动量为 $\boldsymbol{P}$ 的二能级原子在一频率为 ω 的经典电磁场中运动的哈密顿量可写为

$$H=\boldsymbol{P}^2/(2M)+E_+|+\rangle\langle+|+E_-|-\rangle\langle-|-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) \tag{3.6.68}$$

这里 $\boldsymbol{P}^2/(2M)$ 为原子的动能哈密顿量,E_+,E_- 分别为原子的激发态和基态的能量,$\boldsymbol{\mu}$ 表示原子的偶极矩算符,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)$ 代表在原子质心位置 $\boldsymbol{R}$ 处的场强。在海森伯绘景中,算符 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 分别满足

$$\dot{\boldsymbol{R}}=(i\hbar)^{-1}[\boldsymbol{R},H]=\nabla_p H=\boldsymbol{P}/M \tag{3.6.69}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}=(i\hbar)^{-1}[\boldsymbol{P},H]=-\nabla_R H=\nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}) \tag{3.6.70}$$

为计算简单起见,我们假设原子波包的大小 Δr 远小于辐射场的波长 λ,即

$$\Delta r\ll\lambda \text{ 或 } 1/\Delta r\gg 1/\lambda \tag{3.6.71}$$

在这种情况下,对于原子的运动而言,将位置算符 $\boldsymbol{R}$ 用期望值 $\boldsymbol{r}=\langle\boldsymbol{R}\rangle$ 来代替是合理的. 从而联立(3.6.69)和(3.6.70)式可得原子受的力为

$$\boldsymbol{F}=M\ddot{\boldsymbol{r}}=\langle\nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E})\rangle \tag{3.6.72}$$

为进一步简化计算起见,我们假设辐射场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)$ 的极化矢量$\in$与 R 和时间 t 无关,即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) = \in \varepsilon(\boldsymbol{R},t) = \frac{1}{2} \in \varepsilon(\boldsymbol{R})\exp\{i[\theta(\boldsymbol{R}) + \omega t]\} + c.\ c. \tag{3.6.73}$$

将(3.6.73)式代入(3.6.72)式得到

$$\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{\mu} \cdot \in \nabla\varepsilon(\boldsymbol{R},t)\rangle$$

考虑到原子波包的大小远小于光学波长 λ,因此上式中的 $\boldsymbol{R}$ 可以用 $\boldsymbol{r}$ 来代替,从而原子受的力为

$$\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{\mu} \cdot \in \rangle \nabla\varepsilon(\boldsymbol{r},t) \tag{3.6.74}$$

上式就是我们分析原子在辐射场中受力大小的出发点. 显然为求出 $\boldsymbol{F}$,必须先得出原子偶极矩$\langle \boldsymbol{\mu}\cdot \in \rangle$随时间的演化.

这里只考虑原子的运动速率比较小,以致于在一个自发发射时间内,原子运动的距离远小于一个光波波长的情况,即

$$v\Gamma^{-1} \ll \lambda \text{ 或 } kv/\Gamma \ll 1 \tag{3.6.75}$$

注意到海森伯不确定关系

$$M\Delta v\Delta r \geqslant \hbar \tag{3.6.76}$$

及(3.6.71)式有

$$\hbar \boldsymbol{k}/(M\Delta v) \ll 1 \tag{3.6.77}$$

上式表明,单光子的吸收和发射过程对原子动量分布的影响很弱. 要使(3.6.75)和(3.6.77)式同时成立,须有

$$\frac{\hbar^2 k^2/2M}{\hbar\Gamma} \ll 1 \tag{3.6.78}$$

上式表明,原子因光场作用所获得的反冲动能远小于其激发态自发发射的线宽 Γ. 换句话说,在一个单光子发射或吸收过程中,原子与激光场之间的失谐量不发生明显改变. 在这种假设条件下,讨论原子的内态运动时,可以略去(3.6.68)式中的动能项 $\boldsymbol{P}^2/(2M)$的影响,即将哈密顿量改写为

$$H' = E_+|+\rangle\langle+| + E_-|-\rangle\langle-| - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}(t) \tag{3.6.79}$$

这里已令 $\boldsymbol{E}(t) = \in \varepsilon(\boldsymbol{r}(t),t)$.

在 t 时刻,原子的内态态矢可以表示为

$$|\Psi(t)\rangle = C_2(t)|+\rangle + C_1(t)|-\rangle \tag{3.6.80}$$

由薛定谔方程可得

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{C}_1 &= E_1 C_1 - \mu\varepsilon(t) C_2 \\ i\hbar \dot{C}_2 &= E_2 C_2 - \mu\varepsilon(t) C_1 \end{aligned} \tag{3.6.81}$$

这里 $\mu = \langle 1|\mu\cdot\in|2\rangle$ 为原子偶极矩的大小，$\varepsilon(t) = \varepsilon(\boldsymbol{r}(t), t)$. 由于方程(3.6.81)式中的 $\varepsilon(t)$ 含有高频振荡项 $\exp(\pm i\omega t)$，为求解方程(3.6.81)式，作如下变换：

$$\begin{aligned} C_1(t) &= D_1(t)\exp\{-iE_1 t/\hbar + i[\delta t + \theta(t)]/2\} \\ C_2(t) &= D_2(t)\exp\{-iE_2 t/\hbar - i[\delta t + \theta(t)]/2\} \end{aligned} \tag{3.6.82}$$

式中 δ 为原子-激光场之间的失谐频率，它满足

$$\delta = \omega - \omega_0 \quad [\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar] \tag{3.6.83}$$

$\theta(t)$ 为激光场的相位，它等于

$$\theta(t) = \theta(\boldsymbol{r}(t), t) \tag{3.6.84}$$

这样(3.6.81)式变为

$$i\hbar\dot{D}_1 = \frac{1}{2}\hbar\,[\delta + \dot{\theta}(t)]D_1 - \mu\varepsilon D_2 \exp\{-i[\theta(t) + \omega t]\} \tag{3.6.85a}$$

$$i\hbar\dot{D}_2 = -\frac{1}{2}\hbar\,[\delta + \dot{\theta}(t)]D_2 - \mu\varepsilon D_1 \exp\{i[\theta(t) + \omega t]\} \tag{3.6.85b}$$

将(3.6.73)式代入上面两式，并作旋波近似，即忽略掉(3.6.85)式中的含有 $\exp\{\pm i[\omega + \omega_0]t\}$ 的项后得到

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{D}_1 &= \frac{1}{2}\hbar\,[\delta + \dot{\theta}(t)]D_1 - \frac{1}{2}\mu E(t) D_2 \\ i\hbar\dot{D}_2 &= -\frac{1}{2}\hbar\,[\delta + \dot{\theta}(t)]D_2 - \frac{1}{2}\mu E(t) D_1 \end{aligned} \tag{3.6.86}$$

由(3.6.80)式可知，反映原子内态运动的密度矩阵元可定义为

$$\rho_{nm} = C_n C_m^* \tag{3.6.87}$$

注意到(3.6.82)式，则密度矩阵元 ρ_{nm} 与缓变密度矩阵元

$$\sigma_{nm}=D_nD_m^* \tag{3.6.88}$$

之间满足下式：

$$\begin{aligned}&\rho_{11}=\sigma_{11},\ \rho_{22}=\sigma_{22},\ \rho_{12}=\sigma_{12}\exp\{i[\theta(t)+\omega t]\}\\&\rho_{21}=\sigma_{21}\exp\{-i[\theta(t)+\omega t]\}\end{aligned} \tag{3.6.89}$$

由(3.6.86)式可得 σ_{nm} 满足下式：

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{11}&=-\frac{1}{2}i\Omega(\sigma_{12}-\sigma_{21})\\ \dot{\sigma}_{22}&=\frac{1}{2}i\Omega(\sigma_{12}-\sigma_{21})\\ \dot{\sigma}_{12}&=-i[\Delta+\dot{\theta}(t)]\sigma_{12}+\frac{1}{2}i\Omega(\sigma_{22}-\sigma_{11})\end{aligned} \tag{3.6.90}$$

式中已令 $\Omega(t)=\mu E(t)/\hbar$，它就是原子与幅度为 E 的辐射场共振作用时的拉比振荡频率. 至此我们尚未考虑真空辐射场导致原子在激发态的衰变，由第一篇第二章、第五章及第二篇第三章可知，计及自发发射后，原子内态衰变密度矩阵元 σ_{nm} 的演化方程(3.6.90)式变为

$$\dot{\sigma}_{11}=-\frac{1}{2}i\Omega(\sigma_{12}-\sigma_{21})+\Gamma\sigma_{22} \tag{3.6.91a}$$

$$\dot{\sigma}_{22}=\frac{1}{2}i\Omega(\sigma_{12}-\sigma_{21})-\Gamma\sigma_{22} \tag{3.6.91b}$$

$$\dot{\sigma}_{12}=-i[\delta+\dot{\theta}(t)]\sigma_{12}+\frac{1}{2}i\Omega(\sigma_{22}-\sigma_{11})-\frac{1}{2}\Gamma\sigma_{12} \tag{3.6.91c}$$

(3.6.91a)式最后一项的引入利用了 $\sigma_{22}+\sigma_{11}=1$.

将(3.6.74)式中的偶极矩 $\langle\mu\cdot\in\rangle$ 用原子内态密度矩阵元表示出来，即为

$$\langle\mu\cdot\in\rangle=\mu(\rho_{12}+\rho_{21})=\mu\{\sigma_{12}\exp\{i[\theta(t)+\omega t]\}+c.\ c.\} \tag{3.6.92}$$

将(3.6.73)及(3.6.92)式代入(3.6.74)式，忽略掉高频项

$\exp(\pm 2i\omega t)$，并注意到

$$E(t)=E(\boldsymbol{r}),\ \dot{\theta}(t)=\dot{\theta}(\boldsymbol{r}(t))=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\cdot\nabla\theta(\boldsymbol{r})=\nabla\theta(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{3.6.93}$$

得到

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\mu\nabla E(\sigma_{12}+\sigma_{21})-\frac{i}{2}\mu E\nabla\theta(\sigma_{12}-\sigma_{21}) \tag{3.6.94}$$

如果令

$$U=\sigma_{12}+\sigma_{21},\ V=-i(\sigma_{12}-\sigma_{21}),\ W=\sigma_{22}-\sigma_{11} \tag{3.6.95}$$

则(3.6.94)和(3.6.91)式分别变为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\hbar(U\nabla\Omega+V\Omega\nabla\theta) \tag{3.6.96}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{U}&=(\delta+\dot{\theta})V-\frac{1}{2}\Gamma U\\ \dot{V}&=-(\delta+\dot{\theta})U+\Omega W-\frac{1}{2}\Gamma V\\ \dot{W}&=-\Omega V-\Gamma(W+1)\end{aligned} \tag{3.6.97}$$

(3.6.97)式即为光学布洛赫方程．从(3.6.97)式中求出U，V，并将其代入(3.6.96)式即可得到二能级原子在幅度为$E(\boldsymbol{r})$、相位为$\theta(\boldsymbol{r})$的辐射场作用下所受的力．

由(3.6.75)式可知，原子在一个自发发射的寿命$1/\Gamma$内，辐射场的幅度$E(t)=E(\boldsymbol{r}(t))$和相位的微商$\dot{\theta}(t)=\nabla\theta(\boldsymbol{r}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(t)$的变化很小，因此$U$，$V$，$W$相对于$E(t)$，$\theta(t)$为一快变量，从而对于(3.6.96)式中的$U$，$V$而言，可以用(3.6.97)式的稳态解代入，即在(3.6.97)式中令

$$\dot{U}=(\delta+\dot{\theta})V-\frac{1}{2}\Gamma U=0$$

$$\dot{V}=-(\delta+\dot{\theta})U+\Omega W-\frac{1}{2}\Gamma V=0 \qquad (3.6.98)$$

$$\dot{W}=-\Omega V-\Gamma(W+1)=0$$

求解上述三式得到

$$U=-4\Omega(\delta+\dot{\theta})/[4(\delta+\dot{\theta})^2+\Gamma^2+2\Omega^2]$$

$$V=-2\Gamma\Omega/[4(\delta+\dot{\theta})^2+\Gamma^2+2\Omega^2] \qquad (3.6.99)$$

于是原子在辐射场中所受的力 $\boldsymbol{F}$[(3.6.96)式]表为

$$\boldsymbol{F}=-\hbar[\Gamma\Omega^2\nabla\theta+(\delta+\dot{\theta})\nabla\Omega^2]/[4(\delta+\dot{\theta})^2+\Gamma^2+2\Omega^2] \qquad (3.6.100)$$

假定辐射场为一幅度 ε_0 不随空间位置变化的行波场：

$$\varepsilon(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \qquad (3.6.101)$$

此时

$$\Omega=\mu\varepsilon_0/\hbar=\text{常数}, \qquad \theta(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \qquad (3.6.102)$$

那么(3.6.100)式变为

$$\boldsymbol{F}_1=\Gamma\Omega^2\hbar\boldsymbol{k}/[4(\delta-\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^2+\Gamma^2+2\Omega^2] \qquad (3.6.103)$$

下面我们来分析辐射场对原子的作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 的性质. 显然，力 $\boldsymbol{F}_1$ 的方程与光场的波矢量同方向，其大小正比于原子自发发射的速率 Γ. 由于在行波场中原子的受激辐射对原子的受力没有贡献，因此力 $\boldsymbol{F}_1$ 就是原子所受的自发发射力或散射力. 从(3.6.103)式可以看到，$\boldsymbol{F}_1$ 的大小与辐射场频率的关系是一中心频率在 $\omega_0+\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ 的洛仑兹分布. 式中 $\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ 是原子在辐射场中运动所产生的多普勒频移的贡献. 我们还看到，由于 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向与波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向相同，所以当原子沿着辐射场的波矢方向运动时，$\boldsymbol{F}_1$ 对原子的运动有着加速原子运动的作用；而当原子逆着波矢方向运动时，$\boldsymbol{F}_1$ 则对原子的运动起着减速作用. 从物理过程来看，这也是很明显的，因为当原子吸收一

个动量为$\hbar \boldsymbol{k}$的光子后，它的动量变化为$\Delta \boldsymbol{P}=\hbar \boldsymbol{k}$. 原子吸收光子后通过自发发射回到基态，它所释放的光子是各向同性的，故多次自发发射对原子的反冲动量平均起来为零. 这样，原子通过多次吸收光子而使平均动量发生$\Delta \boldsymbol{P}$的净变化，因此当$\dot{\boldsymbol{r}}$与$\boldsymbol{k}$同向时，原子的速度增加；而当$\dot{\boldsymbol{r}}$与$\boldsymbol{k}$反向时，原子的速度减小.

由(3.6.103)式还可得知，$\boldsymbol{F}_1$的大小与失谐量$\delta\omega$和多普勒频移密切相关. 如果$\delta<0$，即光场频率ω低于原子本征跃迁频率，那么初始作缓慢运动的原子的速度方向若与$\boldsymbol{k}$同向时，由于$\boldsymbol{F}_1$对原子的加速效应，导致多普勒频移$\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$增大，从而辐射场对原子的自发发射作用力逐渐减小[必须注意，当$\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\sim\Gamma$时，(3.6.103)式不再适用]. 如果原子的运动速度与$\boldsymbol{k}$反向，即$\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}<0$，显然在$\delta-\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$时$\boldsymbol{F}_1$的值最大. 如果原子的运动速度与$\boldsymbol{k}$同向，则$\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}>0$，从而$(\delta-\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^2$有更大的值，故$\boldsymbol{F}_1$的值减小，实际上是由于多普勒频移的增加，使系统具有更大的失谐量$-(|\delta|+\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})$[如图3.6.8(a)所示]，导致原子在辐射场作用下被激发到激发态的概率减小，从而原子的平均动量变化率减小，即$\boldsymbol{F}_1$的值减小. 相反地，当$\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$的值小于零时，如图3.6.8(b)所示，多普勒频移使得原子-光场的失谐量减小，导致原子吸收光子跃迁到激发态的概率增大. 在这种情况下$\boldsymbol{F}_1$的值增大，在$|\delta|=|\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}|$时$\boldsymbol{F}_1$的值

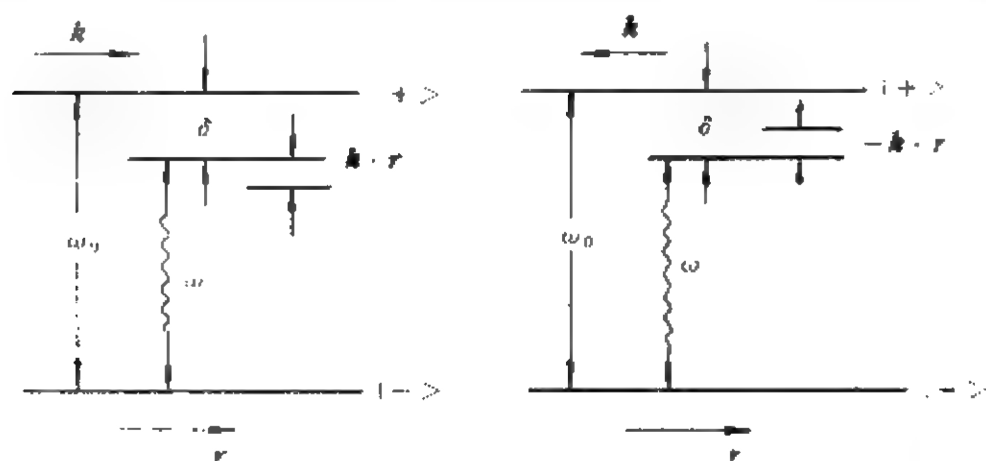


图 3.6.8 多普勒效应引起原子-光场频率失谐量的变化

最大，即在此时原子所受的辐射场的作用力最大. 对于$\delta>0$的情

况，$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ 的关系可以有类似的讨论.

另外，从(3.6.103)式还可看出，由于 Ω 与辐射场的振幅 ε_0 成正比，所以 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小还与辐射场的强度明显相关. 在弱光场情况下，$\boldsymbol{F}_1$ 与光场强度成正比；随着光强的增大，$\boldsymbol{F}_1$ 的值也增大；当光强很大时，即 $\Omega^2 \gg \Gamma^2 - 4(\delta - \boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^2$ 时，自发发射力可达到饱和值，此时(3.6.103)式近似为

$$\boldsymbol{F}_1 = \hbar\boldsymbol{k}\Gamma/2 \tag{3.6.104}$$

这是因为光强足够大时，原子能级间粒子布居数饱和，单位时间内原子吸收的光子数也饱和，所以在单位时间内原子吸收的光子动量也饱和，故辐射压力达最大饱和值. 如果取原子的质量 $M=2.5\times10^{-25}$kg，自发发射线宽 $\Gamma=10^8$Hz，光场频率 $\omega=3\times10^{15}$Hz，那么依据(3.6.104)式可得知强光场作用下可使原子产生的加速度约为 $a_s=10^6\text{m/s}^2$，这一值是地球引力加速度的 10^5 倍，可见光场的辐射力对原子运动的影响是很大的.

假定原子的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 与光场波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向相反，自发发射力将产生负的加速度而使原子运动减速，直至为零. 对于一个热速度为 $v_0=10^2$m/s 的运动原子，大约需要经过多少次吸收和自发发射过程而使其速度减少至零呢？依据运动学定律知

$$v_0 = a_s t = a_s N/\Gamma$$

所以

$$N = v_0\Gamma/a_s = 10^2\times10^8/10^6 = 10^4$$

可见原子要先后吸收约一万次单个光子，才可使它的速度减小至零. 在这种情况下，原子的热运动可基本停止，原子气体的温度降至极低，这就是下一章将重点研究的利用激光来冷却气体原子的问题.

上面的讨论表明，原子在行波场中会受到自发发射力的作用，自发发射力的大小与自发发射速率、原子的多普勒频移、光场的强

度以及原子-光场的失谐量密切相关.那么原子在驻波场中的受力情况又是怎样的呢？下面我们来讨论这一问题.

对于驻波场

$$\varepsilon(x,t)=E(x)\cos\omega t \tag{3.6.105}$$

按(3.6.102)式有

$$\Omega(x)=\mu E(x)/\hbar, \qquad \theta(x)=0 \tag{3.6.106}$$

将(3.6.106)式代入(3.6.100)式可得

$$F_2=-\hbar\delta\nabla\Omega^2/[4\delta^2+\Gamma^2+2\Omega^2] \tag{3.6.107}$$

显然上式不存在与$\nabla\theta$有关的自发发射力，而出现了与光强梯度$\nabla\Omega^2$成正比的力，这就是通常所称的辐射偶极力，它与原子的受激发射直接相关. F_2和失谐量δ的关系如图3.6.9所示，当$\omega>\omega_0$时，失谐量为正值，此时F_2指向负的$\nabla\Omega^2$. 若光场的空间分布不均匀，偶极力使原子趋向光强弱的地方，所以原子具有逃离光场的趋势. 当$\omega<\omega_0$时，失谐量为负值，原子趋向光场强的地方，这种情况下原子具有被光场束缚住的趋势. 我们还可看到，与F_1不同，辐射偶极力F_2没有饱和现象，只要光强梯度$\nabla\Omega^2$很大，它就可以很大，因此这种偶极力对约束原子运动十分有效，实验上可应用它来制备激光陷阱，达到囚禁原子的目的.

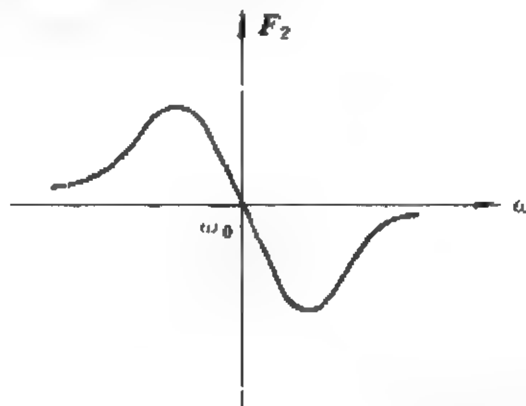


图3.6.9 辐射偶极力F_2对失谐量δ的依赖关系

由于辐射偶极力与原子的受激跃迁有关，虽然通过求解光学

布洛赫方程(3.6.97)式能求得辐射偶极力 $\boldsymbol{F}_2$[(3.6.107)式],但不像自发发射力那样有明显的物理根源.为深刻理解原子在激光场中所受辐射偶极力的性质,下面应用修饰态方法来描述辐射偶极力.

二、修饰态方法对辐射偶极力的描述

同前面准经典方法不同的是,这里采用全量子理论来讨论辐射场对原子的辐射偶极作用力.描述一个二能级原子在一频率为 ω 的激光场和真空辐射场中运动的哈密顿量应写为

$$H=H_{\mathrm{A}}+H_{\mathrm{L}}+H_{\mathrm{R}}+V_{\mathrm{AL}}+V_{\mathrm{AR}} \tag{3.6.108}$$

式中 H_{A}为二能级原子的自由哈密顿量,它表示为

$$H_{\mathrm{A}}=\boldsymbol{P}^2/(2M)+\hbar\omega_0|e\rangle\langle e| \tag{3.6.109}$$

这里已假设原子的基态能为零. H_{L}表示激光场的自由哈密顿量,即

$$H_{\mathrm{L}}=\hbar\omega a_{\mathrm{L}}^{\dagger}a_{\mathrm{L}} \tag{3.6.110}$$

H_{R}是描述真空辐射场的自由哈密顿量:

$$H_{\mathrm{R}}=\hbar\sum_{\lambda}\omega_{\lambda}a_{\lambda}^{+}a_{\lambda} \tag{3.6.111}$$

原子与激光场的相互作用哈密顿量由 $V_{\mathrm{A\text{-}L}}$描述,在旋波近似下它表示为

$$V_{\mathrm{A\text{-}L}}=-\{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{R})S_{+}a_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{R})S_{-}a_{\mathrm{L}}^{+}\} \tag{3.6.112}$$

式中 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{R})$分别代表原子偶极矩矢量和激光场的空间分布.(3.6.108)式的最后一项 $V_{\mathrm{A\text{-}R}}$反映的是原子与真空辐射场的相互作用:

$$V_{\mathrm{A\text{-}R}}=-\sum_{\lambda}\{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}(\boldsymbol{R})S_{+}a_{\lambda}+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}^{*}(\boldsymbol{R})S_{-}a_{\lambda}^{+}\} \tag{3.6.113}$$

1. 描述激光场作用下原子内态运动的密度矩阵方程

下面我们首先利用修饰态方法求出描述激光场作用下原子内态运动的密度矩阵方程. 修饰态方法的基本思想与第二篇第三章所述一样，即首先将激光场-原子耦合系统的哈密顿量对角化，得到系统的本征态即修饰态；然后再考虑真空辐射场导致的自发发射效应. 这里在推导系统的修饰态时，也认为原子的运动满足(3.6.71)和(3.6.78)式，即可以略去原子动能项 $\boldsymbol{P}^2/(2M)$，并且把算符 $\boldsymbol{R}$ 用期望值 $\boldsymbol{r}=\langle\boldsymbol{R}\rangle$ 来代替. 这样，描述激光场-原子相互作用系统的哈密顿量可写为

$$H_{\mathrm{DA}}(\boldsymbol{r})=H_1(\boldsymbol{r})+V_{\mathrm{A\text{-}L}}(\boldsymbol{r}) \qquad (3.6.114)$$

其中

$$H_1(\boldsymbol{r})=\hbar\omega_0|e\rangle\langle e|+\hbar\omega_{\mathrm{L}}a_{\mathrm{L}}^{+}a_{\mathrm{L}} \qquad (3.6.115)$$

它是原子和激光场的未耦合哈密顿量. 它的本征态分别为 $|e,n\rangle$ 和 $|g,n+1\rangle$，相应的本征值分别为 $(n+1)\hbar\omega_{\mathrm{L}}-\hbar\frac{\delta}{2}$ 和 $(n+1)\hbar\omega_{\mathrm{L}}+\frac{\hbar}{2}\delta$. 这里 δ 为原子-光场之间的失谐量，即 $\delta=\omega_{\mathrm{L}}-\omega_0$. 考虑原子与激光场相互作用后，系统在本征态 $|e,n\rangle$ 和 $|g,n+1\rangle$ 之间的偶极跃迁矩阵元可表示为

$$\langle e,n|V_{\mathrm{A\text{-}L}}|g,n+1\rangle=-2\sqrt{n+1}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r})/\hbar=\omega_1(\boldsymbol{r})\exp[i\varphi(\boldsymbol{r})] \qquad (3.6.116)$$

这里 $V_{\mathrm{A\text{-}L}}$ 由(3.6.112)式表示，$\varphi(\boldsymbol{r})$ 是原子偶极矩与光场之间的相对相位. $\omega_1(\boldsymbol{r})$ 为原子与激光场发生共振相互作用时的拉比振荡频率，显然它与激光场的光子数 n 有关. 如果我们所考虑的激光场是一强相干光场，它的光子数分布呈现尖锐的泊松分布，即 $\Delta n\ll\bar{n}$，那么可以认为 $\omega_1(\boldsymbol{r})$ 与 n 无关，而将 n 用平均光子数 $\bar{n}$ 来代替. 在这种近似下，与(2.3.29)式类似可知，由(3.6.114)式描述的原子-光场耦合系统的本征值和相应的本征态矢分别为

$$E_{1n}(\boldsymbol{r})=(n+1)\hbar\omega_{\mathrm{L}}-\hbar\delta/2+\hbar\Omega(\boldsymbol{r})/2,$$

$$|1,n,\boldsymbol{r}\rangle=\exp[i\varphi(\boldsymbol{r})/2]\cos\theta(\boldsymbol{r})|e,n\rangle$$

$$+\exp[-i\varphi(\boldsymbol{r})/2]\sin\theta(\boldsymbol{r})|g,n+1\rangle \tag{3.6.117}$$

$$E_{2n}(\boldsymbol{r})=(n+1)\hbar\omega_{\mathrm{L}}-\hbar\delta/2-\hbar\Omega(\boldsymbol{r})/2,$$

$$|2,n,\boldsymbol{r}\rangle=-\exp[i\varphi(\boldsymbol{r})/2]\sin\theta(\boldsymbol{r})|e,n\rangle$$

$$+\exp[-i\varphi(\boldsymbol{r})/2]\cos\theta(\boldsymbol{r})|g,n+1\rangle \tag{3.6.118}$$

式中

$$\Omega(\boldsymbol{r})=[\omega_1^2(\boldsymbol{r})+\delta^2]^{1/2},$$

$$\cos 2\theta(\boldsymbol{r})=-\delta/\Omega(\boldsymbol{r}),\sin 2\theta(\boldsymbol{r})=\omega_1(\boldsymbol{r})/\Omega(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.119}$$

如图 3.6.10 所示，本征值 $E_{1n}(\boldsymbol{r})$ 与 $E_{2n}(\boldsymbol{r})$ 之间的间距与 $\Omega(\boldsymbol{r})$ 有关. 由于在强场情况下，$\omega_1(\boldsymbol{r})$ 与 n 无关，所以对于不同的 $E_{1n}(\boldsymbol{r})$ 与 $E_{2n}(\boldsymbol{r})$ 而言，它们之间的间距可近似认为是相同的. 与第二篇第三章中不同的是，这里修饰态 $|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$ 和 $|2,n,\boldsymbol{r}\rangle$ 以及本征值 $E_{1n}(\boldsymbol{r})$ 与 $E_{2n}(\boldsymbol{r})$ 与原子质心位置 $\boldsymbol{r}$ 明显相关，因此对于空间分布不均匀的激光场（如驻波场），在不同的空间位置，它们是不相同的.

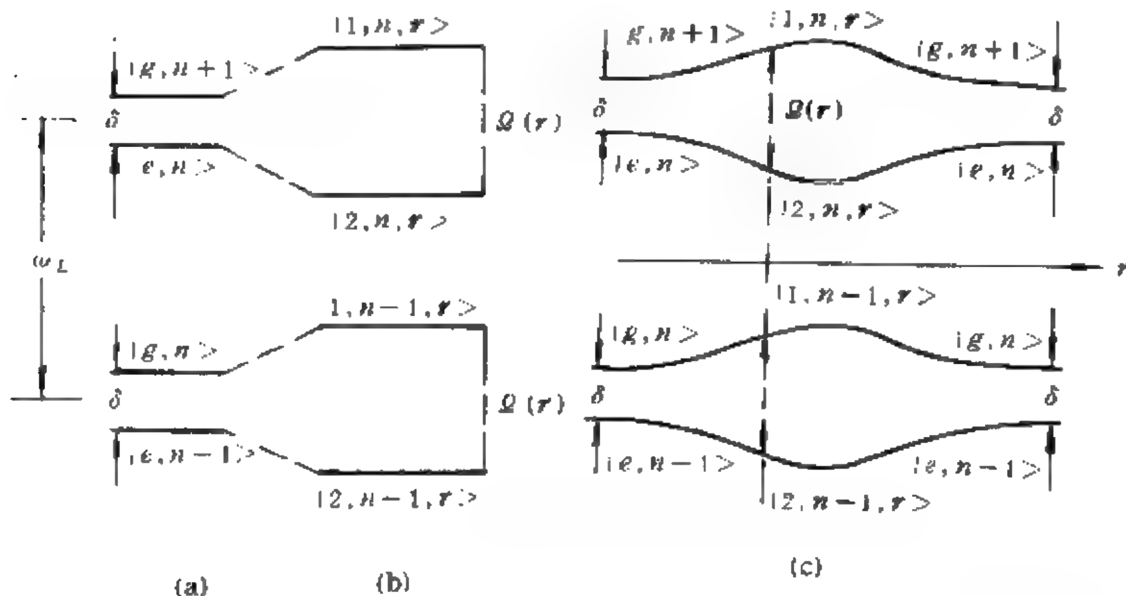


图 3.6.10 原子-光场耦合系统的本征能级示意图

作为第二步，我们来计入 $V_{\text{A-R}}$ 的效应，即考虑原子自发发射过

程的影响. 在原子-激光场的未耦合本征态矢集$\{|e,n\rangle\}$和$\{|g,n\rangle\}$中,自发发射过程发生在$|e,n\rangle$和$|g,n\rangle$之间. 由于在修饰本征态$|j,n,\boldsymbol{r}\rangle$和$|i,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$中分别包含有$|e,n\rangle$和$|g,n\rangle$,因此在修饰态表象中,自发发射过程中的偶极矩阵元是与$|j,n,\boldsymbol{r}\rangle$和$|i,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$相关联的,即

$$\boldsymbol{d}_{ij}(\boldsymbol{r})=\langle i,n-1,\boldsymbol{r}|\boldsymbol{d}(S_++S_-)|j,n,\boldsymbol{r}\rangle \tag{3.6.120}$$

由(3.6.118)和(3.6.119)式得到

$$\boldsymbol{d}_{11}=-\boldsymbol{d}_{22}=\boldsymbol{d}\cos\theta\sin\theta e^{i\varphi} \tag{3.6.121}$$

$$\boldsymbol{d}_{12}=-\boldsymbol{d}\sin^2\theta e^{i\varphi},\qquad \boldsymbol{d}_{21}=\boldsymbol{d}\cos^2\theta e^{i\varphi} \tag{3.6.122}$$

与讨论共振荧光问题时相同,这里可以发生四种跃迁,出现三种不同频率的荧光(如图3.6.11所示). 即在从修饰态$|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$向$|2,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$衰变的跃迁过程中,发射频率为$\omega_L+\Omega(\boldsymbol{r})$的荧光光子;在从$|2,n,\boldsymbol{r}\rangle$到$|1,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$的荧光跃迁过程中,荧光光子的频率等于$\omega_L-\Omega(\boldsymbol{r})$;系统在从$|i,n,\boldsymbol{r}\rangle$到$|i,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$($i=1,2$)衰变时,所出现的荧光光子的频率均为$\omega_L$.

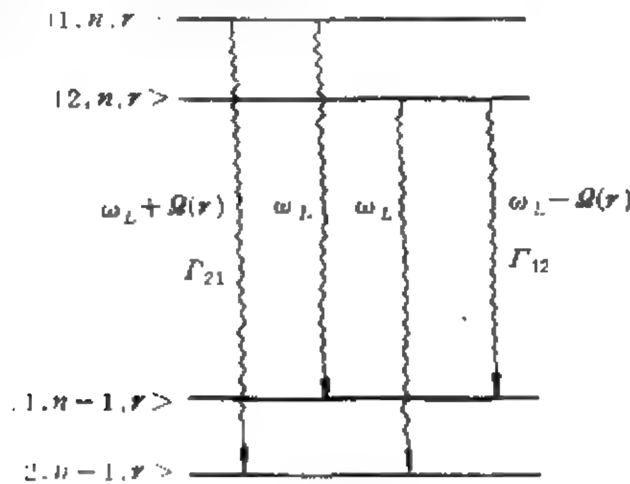


图 3.6.11　荧光跃迁示意图

下面再来讨论修饰原子的密度矩阵的演化方程. 对于空间某一点而言,由图 3.6.11 容易看出,修饰原子的粒子布居数$\pi_{1,n}(\boldsymbol{r})$

$=\langle 1,n,\boldsymbol{r}|\rho|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$满足

$$\dot{\pi}_{1,n}(\boldsymbol{r})=-(\Gamma_{11}+\Gamma_{21})\pi_{1,n}(\boldsymbol{r})+\Gamma_{11}\pi_{1,n+1}(\boldsymbol{r})+\Gamma_{12}\pi_{2,n+1}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.123}$$

式中Γ_{ij}为跃迁速率，它们满足

$$\Gamma_{ij}=|d_{ij}|^2 \tag{3.6.124}$$

由于在强光场情况下，可以认为ω_1与n无关，因此Γ_{ij}也与n无关. 由(3.6.121)式可知，$\Gamma_{11}=\Gamma_{22}=d^2\sin^2\theta\times\cos^2\theta=\Gamma\cos^2\theta\sin^2\theta$，式中$\Gamma$即为通常的自发发射速率. (3.6.123)式表明，粒子数$\pi_{1,n}(\boldsymbol{r})$的减少是由于从$|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$到$|1,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$和$|2,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$这两个低能级的衰变，而$\pi_{1,n}(\boldsymbol{r})$的增加是来自于上能级$|1,n+1,\boldsymbol{r}\rangle$和$|2,n+1,\boldsymbol{r}\rangle$向$|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$的跃迁. 同样地，修饰原子在$|2,n,\boldsymbol{r}\rangle$的粒子布居数$\pi_{2,n}(\boldsymbol{r})=\langle 2,n,\boldsymbol{r}|\rho|2,n,\boldsymbol{r}\rangle$的演化方程为

$$\dot{\pi}_{2,n}(\boldsymbol{r})=-(\Gamma_{12}+\Gamma_{22})\pi_{2,n}(\boldsymbol{r})+\Gamma_{21}\pi_{1,n+1}(\boldsymbol{r})+\Gamma_{22}\pi_{2,n+1}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.125}$$

由于这里所讨论的激光场是强相干光场，光子集中分布在$n=\bar{n}$附近，因此可以认为$P_0(n)=P_0(n+1)$，即在光子数分布$P_0(n)$的宽度Δn之内呈周期性. 所以$\pi_{i,n+1}(\boldsymbol{r})$和$\pi_{i,n}(\boldsymbol{r})$是近似相等的，它们可以写成

$$\pi_{i,n}(\boldsymbol{r})\approx\pi_{i,n+1}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.126}$$

若定义$\pi_i(\boldsymbol{r})$为修饰原子的约化粒子布居数，即

$$\pi_i(\boldsymbol{r})=\sum_N\langle i,n,\boldsymbol{r}|\rho|i,n,\boldsymbol{r}\rangle \tag{3.6.127}$$

那么由(3.6.123)和(3.6.125)式可得$\pi_i(\boldsymbol{r})$遵循

$$\dot{\pi}_1(\boldsymbol{r})=-\Gamma_{21}\pi_1(\boldsymbol{r})+\Gamma_{12}\pi_2(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.128}$$

$$\dot{\pi}_2(\boldsymbol{r})=-\Gamma_{12}\pi_2(\boldsymbol{r})+\Gamma_{21}\pi_1(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.129}$$

对于修饰原子密度矩阵的非对角元$\rho_{ij,n}(\boldsymbol{r})=\langle i,n,\boldsymbol{r}|\rho|j,n,\boldsymbol{r}\rangle(i\neq j)$，我们先来分析一下与之相联系的衰变过程. 由图3.6.12

可知，$\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})$以频率$\Omega(\boldsymbol{r})$随时间演化，因此在其时间演化中应有$\Omega(\boldsymbol{r})\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})$项；由于能级$|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$和$|2,n,\boldsymbol{r}\rangle$分别以速率$\Gamma_{11}+\Gamma_{21}$和$\Gamma_{22}+\Gamma_{12}$衰变，因此$\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})$中应出现速率为$-(\Gamma_{11}+\Gamma_{21}+\Gamma_{22}+\Gamma_{12})/2$的衰变项，即应含有$-(\Gamma_{11}+\Gamma_{21}+\Gamma_{22}+\Gamma_{12})\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})/2$；同时$\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})$和另一非对角矩阵元$\rho_{12,n+1}(\boldsymbol{r})$以相同的频率演化，这两项之间有耦合，如图3.6.12所示，其耦合系数为两个偶极矩阵元$\boldsymbol{d}_{11}^*$和$\boldsymbol{d}_{22}$的乘积，因此$\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})$的演化方程为

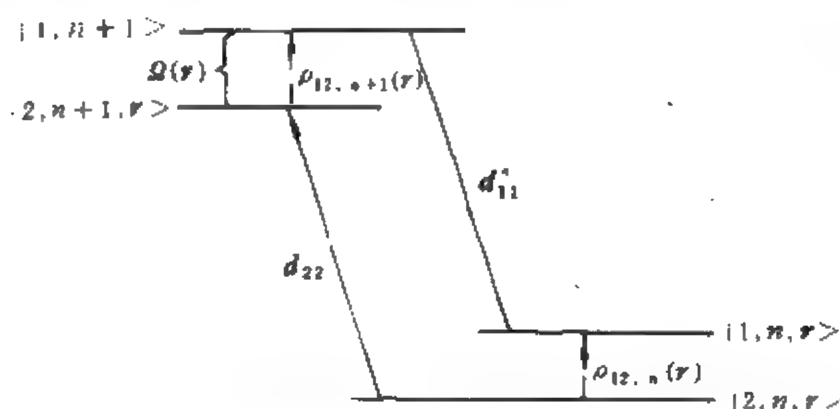


图 3.6.12 与密度矩阵非对角元相联系的跃迁过程示意图

$$\dot{\rho}_{12,n}(\boldsymbol{r})=-i\Omega(\boldsymbol{r})\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})-(\Gamma_{11}+\Gamma_{21}+\Gamma_{22}+\Gamma_{12})\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})/2+\boldsymbol{d}_{11}^*\cdot\boldsymbol{d}_{22}\rho_{12,n+1}(\boldsymbol{r}) \quad (3.6.130)$$

利用激光场的强场性质$P_0(n)=P_0(n+1)$，因此

$$\rho_{12,n}(\boldsymbol{r})\approx\rho_{12,n+1}(\boldsymbol{r})$$

并且定义总弛豫速率

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{coh}}(\boldsymbol{r})&=(\Gamma_{11}+\Gamma_{21}+\Gamma_{22}+\Gamma_{12})/2-\boldsymbol{d}_{11}^*\cdot\boldsymbol{d}_{22}\\&=\Gamma(\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta)/2+\Gamma\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=\Gamma(1/2+\sin^2\theta\cos^2\theta)\end{aligned} \quad (3.6.131)$$

则修饰原子约化密度矩阵的非对角元

$$\rho_{ij}(\boldsymbol{r})=\sum_n\rho_{ij,n}(\boldsymbol{r}) \qquad (i\neq j) \quad (3.6.132)$$

满足

$$\dot{\rho}_{12}(\boldsymbol{r})=-i\Omega(\boldsymbol{r})\rho_{12}(\boldsymbol{r})-\Gamma_{\mathrm{coh}}(\boldsymbol{r})\rho_{12}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.133}$$

同样地

$$\dot{\rho}_{21}(\boldsymbol{r})=i\Omega(\boldsymbol{r})\rho_{21}(\boldsymbol{r})-\Gamma_{\mathrm{coh}}(\boldsymbol{r})\rho_{21}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.134}$$

这样我们就得到了修饰原子的约化密度矩阵元的演化方程(3.6.128),(3.6.129)及(3.6.133),(3.6.134)式,方程的稳态解为

$$\begin{cases}\dot{\pi}_1(\boldsymbol{r})=0=-\Gamma_{21}(\boldsymbol{r})\pi_1(\boldsymbol{r})+\Gamma_{12}(\boldsymbol{r})\pi_2(\boldsymbol{r})\\ \dot{\pi}_2(\boldsymbol{r})=0=-\Gamma_{12}(\boldsymbol{r})\pi_2(\boldsymbol{r})+\Gamma_{21}(\boldsymbol{r})\pi_1(\boldsymbol{r})\\ \dot{\rho}_{12}(\boldsymbol{r})=0=[-i\Omega(\boldsymbol{r})-\Gamma_{\mathrm{coh}}(\boldsymbol{r})]\rho_{12}(\boldsymbol{r})\\ \dot{\rho}_{21}(\boldsymbol{r})=0=[i\Omega(\boldsymbol{r})-\Gamma_{\mathrm{coh}}(\boldsymbol{r})]\rho_{21}(\boldsymbol{r})\end{cases}$$

求解上述四式,得到

$$\pi_1^{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r})=\Gamma_{12}(\boldsymbol{r})/[\Gamma_{21}(\boldsymbol{r})+\Gamma_{12}(\boldsymbol{r})]=\sin^4\theta(\boldsymbol{r})/[\sin^4\theta(\boldsymbol{r})+\cos^4\theta(\boldsymbol{r})] \tag{3.6.135}$$

$$\pi_2^{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r})=\Gamma_{21}(\boldsymbol{r})/[\Gamma_{21}(\boldsymbol{r})+\Gamma_{12}(\boldsymbol{r})]=\cos^4\theta(\boldsymbol{r})/[\sin^4\theta(\boldsymbol{r})+\cos^4\theta(\boldsymbol{r})] \tag{3.6.136}$$

$$\rho_{12}^{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r})=\rho_{21}^{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r})=0 \tag{3.6.137}$$

上面已用到

$$\Gamma_{12}(\boldsymbol{r})=\Gamma\sin^4\theta(\boldsymbol{r}),\qquad \Gamma_{21}(\boldsymbol{r})=\Gamma\cos^4\theta(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.138}$$

如果定义

$$\Gamma_{\mathrm{pop}}(\boldsymbol{r})=\Gamma_{12}(\boldsymbol{r})+\Gamma_{21}(\boldsymbol{r})=\Gamma[\sin^4\theta(\boldsymbol{r})+\cos^4\theta(\boldsymbol{r})] \tag{3.6.139}$$

它反映描述原子相干性质的非对角矩阵元 ρ_{ij} 对粒子数的泵浦速率,并利用 $\pi_1+\pi_2=1$,则(3.6.128)和(3.6.129)式可以写为

$$\dot{\pi}_i(\boldsymbol{r})=-\Gamma_{\mathrm{pop}}(\boldsymbol{r})[\pi_i(\boldsymbol{r})-\pi_i^{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r})]\quad(i=1,2) \tag{3.6.140}$$

上面我们考虑的只是空间某一给定点 $\boldsymbol{r}$ 处原子在修饰态表象中的约化密度矩阵随时间的演化规律，而没有考虑原子的运动. 对于运动原子而言，由于本征态矢 $|i,n,\boldsymbol{r}(t)\rangle$，$|j,n,\boldsymbol{r}(t)\rangle$ 与时间有关，即

$$\pi_i(\boldsymbol{r}) = \sum_n \{\langle i,n,\boldsymbol{r}|\dot{\rho}|i,n,\boldsymbol{r}\rangle + \langle \dot{\overline{i,n,\boldsymbol{r}}}|\rho|i,n,\boldsymbol{r}\rangle + \langle i,n,\boldsymbol{r}|\rho|\dot{\overline{i,n,\boldsymbol{r}}}\rangle\} \tag{3.6.141}$$

注意到

$$|\dot{\overline{i,n,\boldsymbol{r}}}\rangle = \dot{\boldsymbol{r}}(t)\cdot\nabla|i,n,\boldsymbol{r}\rangle = \boldsymbol{v}\cdot\nabla|i,n,\boldsymbol{r}\rangle \tag{3.6.142}$$

及

$$\nabla|1,n,\boldsymbol{r}\rangle = \nabla\theta(\boldsymbol{r})|2,n,\boldsymbol{r}\rangle + \frac{i}{2}\nabla\varphi(\boldsymbol{r})[\cos 2\theta(\boldsymbol{r})|1,n,\boldsymbol{r}\rangle - \sin 2\theta(\boldsymbol{r})|2,n,\boldsymbol{r}\rangle] \tag{3.6.143}$$

$$\nabla|2,n,\boldsymbol{r}\rangle = -\nabla\theta(\boldsymbol{r})|1,n,\boldsymbol{r}\rangle - \frac{i}{2}\nabla\varphi(\boldsymbol{r})[\cos 2\theta(\boldsymbol{r})|2,n,\boldsymbol{r}\rangle + \sin 2\theta(\boldsymbol{r})|1,n,\boldsymbol{r}\rangle] \tag{3.6.144}$$

考虑到(3.6.127)，(3.6.132)式，并利用(3.6.140)式，则(3.6.141)式表示为

$$\dot{\pi}_1(\boldsymbol{r}) = -\Gamma_{\text{pop}}(\boldsymbol{r})[\pi_1(\boldsymbol{r}) - \pi_1^{st}(\boldsymbol{r})] + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta(\rho_{12}+\rho_{21}) + i\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi\sin\theta\cos\theta(\rho_{21}-\rho_{12}) \tag{3.6.145}$$

同样地可以得到

$$\dot{\rho}_{12}(\boldsymbol{r}) = -[i(\Omega(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi\cos 2\theta) + \Gamma_{\text{coh}}(\boldsymbol{r})]\rho_{12} + [\boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + i\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi\sin\theta\cos\theta](\pi_2-\pi_1) \tag{3.6.146}$$

与(3.6.133)，(3.6.134)和(3.6.140)式不同的是，这时在密度矩阵元 π_i 和 ρ_{12} 中出现了与原子质心运动速度 $\boldsymbol{v}$ 有关的项，这两项是激光场空间分布不均匀性的反映.

下面我们以 π_i 为例来分析一下原子的运动对密度矩阵的影响. 由(3.6.145)式可知，当时间变化为 dt 时，π_i 的变化为

$$d\pi_i = \dot{\pi}_i dt = (d\pi_i)_{\text{Rad}} + (d\pi_i)_{\text{NA}} \tag{3.6.147}$$

式中

$$(d\pi_i)_{\text{Rad}} = -\Gamma_{\text{pop}}(\pi_i - \pi_i^{\text{st}}) \tag{3.6.148}$$

$$(d\pi_1)_{\text{NA}} = \boldsymbol{v}dt \cdot [\nabla\theta(\rho_{12} + \rho_{21}) + i\nabla\varphi\sin\theta\cos\theta \times (\rho_{21} - \rho_{12})] = -(d\pi_2)_{\text{NA}} \tag{3.6.149}$$

(3.6.148)式描述原子的自发发射对粒子布居数 π_i 变化的影响，这一项与原子静止时的结果相同. $(d\pi_i)_{\text{NA}}$反映的是与原子速度有关的两项在 dt 时间变化范围内对粒子布居数 π_i 变化的贡献. 这是因为对于空间分布不均匀的激光场而言，原子的运动会使得修饰原子的能级发生变化，即本征值和本征态矢发生变化，从而导致修饰原子的粒子布居数发生变化. 通常将$(d\pi_1)_{\text{NA}}$称为非绝热动能耦合效应项，因为它描述的是在不存在自发发射时，初始处在$|i,n,\boldsymbol{r}(0)\rangle$的运动原子，在 t 时刻跃迁到$|j,n,\boldsymbol{r}(t)\rangle$的概率，而与绝热演化到$|i,n,\boldsymbol{r}(t)\rangle$的概率无关. 例如，对于一个在驻波场中运动的原子而言，当它从波节一边运动到波节另一边时，修饰原子的能级发生了显著的变化. 在 t 时刻，由于原子的运动使得修饰原子从$|i,n,\boldsymbol{r}\rangle$跃迁到$|j,n,\boldsymbol{r}\rangle$的概率约为

$$P_{i\to j} \leqslant \frac{|\langle j,n,\boldsymbol{r}(t)|\dot{\overline{i,n,\boldsymbol{r}(t)}}\rangle|^2}{|\omega_{ij}(t)|^2} = \frac{|\langle j,n,\boldsymbol{r}(t)|\dot{\overline{i,n,\boldsymbol{r}(t)}}\rangle|^2}{\Omega_{ij}^2[\boldsymbol{r}(t)]}$$

由于在驻波场中偶极矩与激光场之间的相对相位不随时间变化，即 φ 为一常数，因此由(3.6.142)和(3.6.143)式可得

$$|\dot{\overline{i,n,\boldsymbol{r}(t)}}\rangle = \pm\boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta|j,n,\boldsymbol{r}(t)\rangle \tag{3.6.150}$$

从(3.6.149)式得到

$$\nabla\theta = -\delta\nabla\omega_1/[2(\delta^2+\omega_1^2)] \tag{3.6.151}$$

而在驻波场中，$\omega_1(\boldsymbol{r})$可以表示为

$$\omega_1(\boldsymbol{r}) = \tilde{\omega}_1\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{3.6.152}$$

式中$\tilde{\omega}_1$是与$\boldsymbol{r}$无关的常数.将(3.6.152)式代入(3.6.151)式,则得

$$|\nabla\theta| = \frac{k}{2}\left|\delta\,\tilde{\omega}_1\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}/(\delta^2+\tilde{\omega}_1^2\cos^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right| \leqslant \frac{k}{2}\left|\tilde{\omega}_1/\delta\right| \tag{3.6.153}$$

从而跃迁概率$P_{i\to j}$为

$$P_{i\to j} \leqslant \frac{kv}{2}\left|\delta\,\tilde{\omega}_1\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right|^2/\left|\delta^2+\tilde{\omega}_1^2\cos^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right|^2 \leqslant \left|\frac{kv}{2}\cdot\frac{\tilde{\omega}_1}{\delta^2}\right|^2 \tag{3.6.154}$$

上式表明,反映原子运动效应的非绝热项在驻波场的波节处的值最大.因此对于运动原子而言,必须考虑原子运动效应的影响.

2. 辐射场对原子的辐射偶极作用力

上面我们得出了修饰原子的密度矩阵随时间的演化方程,并分析了原子的运动对密度矩阵方程的影响,下面我们再来看看辐射场对原子的作用力与原子运动效应之间的关系.

同(3.6.70)和(3.6.72)式相似,辐射场对原子的作用力算符$\boldsymbol{F}$定义为

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\boldsymbol{P}] = -\nabla_{\mathrm{R}}H = -\nabla_{\mathrm{R}}(V_{\mathrm{A\text{-}L}}+V_{\mathrm{A\text{-}R}}) \tag{3.6.155}$$

通常我们关心的是$\boldsymbol{F}$在原子内态和辐射场态中的期望值,即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})\rangle \tag{3.6.156}$$

这里同(3.6.72)式相似,已将原子质心的位置算符$\boldsymbol{R}$用期望值$\boldsymbol{r}=\langle\boldsymbol{R}\rangle$取代.将(3.6.155)式代入(3.6.156)式,并注意到$V_{\mathrm{A\text{-}R}}$描述的是原子与真空辐射场的相互作用,即$\langle\nabla_{\mathrm{R}}V_{\mathrm{A\text{-}R}}\rangle=0$,可以得到

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \langle S_+ a_{\mathrm{L}}\nabla[\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r})] + S_- a_{\mathrm{L}}^{\dagger}\nabla[\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{r})]\rangle \tag{3.6.157}$$

利用(3.6.116)式,则上式化为

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{\hbar}{2}\sum_{n}\{\langle e,n|\rho|g,n+1\rangle\nabla\left[\omega_1(\boldsymbol{r})e^{-i\varphi(\boldsymbol{r})}\right]$$

$$+\langle g,n+1|\rho|e,n\rangle\nabla\left[\omega_1(\boldsymbol{r})e^{i\varphi(\boldsymbol{r})}\right]\}$$

$$=\frac{i\hbar\omega_1}{2}\nabla\varphi(\boldsymbol{r})(\rho_{eg}e^{-i\varphi(\boldsymbol{r})}-\rho_{ge}e^{i\varphi(\boldsymbol{r})})$$

$$-\frac{\hbar\nabla\omega_1}{2}(\rho_{eg}e^{-i\varphi(\boldsymbol{r})}+\rho_{ge}e^{i\varphi(\boldsymbol{r})})\tag{3.6.158}$$

式中已令

$$\rho_{eg}=\sum_{n}\langle e,n|\rho|g,n-1\rangle,\qquad \rho_{ge}=\sum_{n}\langle g,n+1|\rho|e,n\rangle\tag{3.6.159}$$

显然,(3.6.158)式与(3.6.96)式有相似的形式,由(3.6.100)—(3.6.107)式的讨论知道,在(3.6.158)式中含有$\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$的项是辐射场对原子的自发发射力,这种力在前面已作过充分的分析,这里不再详述.下面我们集中研究$f(\boldsymbol{r})$中含$\nabla\omega_1(\boldsymbol{r})$的项,即辐射场对原子的辐射偶极作用力.利用(3.6.117)和(3.6.118)式将ρ_{eg}和ρ_{ge}变换到修饰态表象中去,即

$$\rho_{eg}=e^{i\varphi}[\sin\theta\cos\theta\pi_1-\sin\theta\cos\theta\pi_2+\cos^2\theta\rho_{12}-\sin^2\theta\rho_{21}]\tag{3.6.160}$$

$$\rho_{ge}=e^{-i\varphi}[\sin\theta\cos\theta\pi_1-\sin\theta\cos\theta\pi_2+\cos^2\theta\rho_{21}-\sin^2\theta\rho_{12}]\tag{3.6.161}$$

则原子所受的偶极作用力表示为

$$f_{\rm dip}(\boldsymbol{r})=\frac{-\hbar\nabla\omega_1}{2}\sin2\theta(\pi_1-\pi_2)-\frac{\hbar\nabla\omega_1}{2}\cos2\theta(\rho_{12}+\rho_{21})\tag{3.6.162}$$

注意到

$$\nabla\Omega=\nabla\left[\omega_1^2(\boldsymbol{r})+\delta^2\right]^{1/2}=\frac{\omega_1(\boldsymbol{r})}{\Omega(\boldsymbol{r})}\nabla\omega_1=\sin2\theta\nabla\omega_1\tag{3.6.163}$$

以及

$$\nabla(\cos 2\theta) = -\nabla\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)$$

即

$$(\nabla\omega_1)\cos 2\theta = 2\Omega\nabla\theta \tag{3.6.164}$$

$\boldsymbol{f}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r})$又可以写为

$$\boldsymbol{f}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{2}\nabla\Omega(\pi_2 - \pi_1) - \hbar\Omega\nabla\theta(\rho_{12} + \rho_{21}) \tag{3.6.165}$$

这样，我们将辐射场对原子的偶极作用力用修饰态表象中原子的约化密度矩阵元表示出来了，从而可以利用密度矩阵元 π_i，ρ_{21}，ρ_{12} 的演化方程(3.6.133)，(3.6.134)，(3.6.140)式来方便地讨论 $\boldsymbol{f}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r})$。

为分析偶极力 $\boldsymbol{f}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r})$的物理根源，我们首先讨论修饰原子发生位移 $d\boldsymbol{r}$ 时偶极力 $\boldsymbol{f}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r})$所作的功 dW：

$$dW = -\boldsymbol{f}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\hbar\frac{\nabla\Omega}{2}\cdot d\boldsymbol{r}(\pi_2 - \pi_1) + \hbar\Omega\nabla\theta\cdot d\boldsymbol{r}(\rho_{12} + \rho_{21}) \tag{3.6.166}$$

如果定义

$$E_1(\boldsymbol{r}) = E_{1n}(\boldsymbol{r}) - (E_{1n}(\boldsymbol{r}) + E_{2n}(\boldsymbol{r}))/2 = \hbar\Omega(\boldsymbol{r})/2$$

$$E_2(\boldsymbol{r}) = E_{2n}(\boldsymbol{r}) - (E_{1n}(\boldsymbol{r}) + E_{2n}(\boldsymbol{r}))/2 = -\hbar\Omega(\boldsymbol{r})/2 \tag{3.6.167}$$

这里 $E_1(\boldsymbol{r})$，$E_2(\boldsymbol{r})$是修饰能级本征能量 $E_{in}(\boldsymbol{r})$ $(i=1,2)$中依赖于位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的部分. 那么(3.6.166)式中右边第一项可写成

$$-\frac{\hbar\nabla\Omega}{2}\cdot d\boldsymbol{r}(\pi_2 - \pi_1) = -\frac{\hbar d\Omega}{2}(\pi_2 - \pi_1) = \sum_{i=1}^{2}\pi_i dE_i \tag{3.6.168}$$

显然 dE_i 表示原子从 $\boldsymbol{r}\rightarrow\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ 时，修饰能级本征能量的变化. 利用(3.6.149)式及 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}dt$，可以将(3.6.166)式右边第二部分表

示成

$$\hbar\Omega\nabla\theta\cdot d\boldsymbol{r}(\rho_{12}+\rho_{21})=\hbar\Omega\nabla\theta\cdot\boldsymbol{v}dt(\rho_{12}+\rho_{21})$$
$$=\hbar\Omega(d\pi_1)_{NA}=-\hbar\Omega(d\pi_2)_{NA}$$
$$=\frac{\hbar\Omega}{2}[(d\pi_1)_{NA}-(d\pi_2)_{NA}]=\sum_{i=1}^{2}E_i(d\pi_i)_{NA} \tag{3.6.169}$$

将(3.6.168),(3.6.169)式代入(3.6.166)式,则

$$dW=\sum_{i=1}^{2}[\pi_i dE_i+E_i(d\pi_i)_{NA}] \tag{3.6.170}$$

上式表明,当原子从 $\boldsymbol{r}$ 运动到 $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ 时,偶极力所作的功 dW 中只体现出非绝热动能耦合对原子粒子布居数 π_i 的变化的影响,即只出现了 $(d\pi_i)_{NA}$ 项. 从(3.6.154)式可知,如果原子质心运动速率很慢,那么在(3.6.170)式中可以略去含 $(d\pi_i)_{NA}$ 的项,而只需保留第一项,即

$$dW=\sum_{i=1}^{2}\pi_i dE_i \qquad (\text{当原子运动很慢时}) \tag{3.6.171}$$

如果定义

$$U_A=\sum_{i=1}^{2}\pi_i E_i \tag{3.6.172}$$

显然,U_A 的物理含义是原子在激光场中的势能. 由于 $(d\pi_i)_{NA}\neq d\pi_i$,则偶极力所作的功并不等于势能的变化,即

$$dW\neq dU_A \tag{3.6.173}$$

为区别 dW 与 dU_A 之间的差异,将(3.6.170)式改写成

$$dW=\sum_i\pi_i dE_i+\sum_i E_i[(d\pi_i)_{NA}+(d\pi_i)_{Rad}]-\sum_i E_i(d\pi_i)_{Rad}$$
$$=\sum_i[\pi_i dE_i+E_i d\pi_i]-\sum_i E_i(d\pi_i)_{Rad}$$
$$=dU_A-\sum_i E(d\pi_i)_{Rad} \tag{3.6.174}$$

由于 $(d\pi_i)_{Rad}$ 表示的是原子的粒子布居数在原子运动 $d\boldsymbol{r}$ 时由自发发射所引起的变化,因此可将(3.6.174)式中的 $(d\pi_i)_{Rad}$ 用

(3.6.128),(3.6.129)式代替,即

$$dW = dU_A + (\Gamma_{21}\pi_1\hbar\Omega - \Gamma_{12}\pi_2\hbar\Omega)dt \qquad (3.6.175)$$

式中已经利用了(3.6.167)式.我们把上式中的$(\Gamma_{21}\pi_1\hbar\Omega - \Gamma_{12}\pi_2\hbar\Omega)dt$ 称为当原子在 dt 时间内运动 $d\boldsymbol{r}$ 时辐射场(包括激光场和荧光场)能量的变化,即

$$dU_F = (\Gamma_{21}\pi_1\hbar\Omega - \Gamma_{12}\pi_2\hbar\Omega)dt \qquad (3.6.176)$$

这一结果可以这样理解:在 dt 时间范围内,能量为 $\hbar\omega_L$ 的 dn 个激光光子由于自发发射转化成 dn 个荧光光子.在 $|i,n,\boldsymbol{r}\rangle \to |i,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$ 的跃迁过程中,荧光光子的能量同激光光子的能量一样,都为 $\hbar\omega_L$,因此在这种荧光发射过程中,整个辐射场的能量没有发生变化.但在 $|1,n,\boldsymbol{r}\rangle \to |2,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$ 和 $|2,n,\boldsymbol{r}\rangle \to |1,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$ 的荧光发射过程中,荧光光子的能量分别为 $\hbar\omega_L + \hbar\Omega(\boldsymbol{r})$ 和 $\hbar\omega_L - \hbar\Omega(\boldsymbol{r})$,在这两种发射过程中,辐射场的能量增加或减少 $\hbar\Omega(\boldsymbol{r})$.(3.6.176)式中的 $\Gamma_{21}\pi_1\hbar\Omega dt$ 描述的是辐射场在 dt 时间范围内,由于 $|1,n,\boldsymbol{r}\rangle \to |2,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$ 这一荧光发射过程导致的辐射场能量的增加,$-\Gamma_{21}\pi_1\hbar\Omega dt$ 反映的是从 $|2,n,\boldsymbol{r}\rangle \to |1,n-1,\boldsymbol{r}\rangle$ 这一荧光发射过程引起的在 dt 时间范围内辐射场能量的减少.所以原子所受的偶极力在原子运动 $d\boldsymbol{r}$ 时所作的功应是原子平均势能和辐射场能量的变化,即

$$dW = -\boldsymbol{f}_{dip}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = dU_A + dU_F \qquad (3.6.177)$$

下面我们来看看原子在空间某一给定点 $\boldsymbol{r}$,即原子静止时偶极力的大小.在这种情况下,非绝热动能耦合项可以忽略,这时(3.6.171)式的 π_i 可以用稳态粒子布居数(3.6.135),(3.6.136)式代替,即

$$\boldsymbol{f}_{dip}^{st}(\boldsymbol{r}) = -\sum_i (\nabla E_i)\pi_i^{st} = -(\nabla E_1)\pi_1^{st} - (\nabla E_2)\pi_2^{st}$$

(3.6.178)

上式表明，偶极力 $f_{dip}^{st}(r)$ 是原子在能级 $|1,n,r\rangle$ 和能级 $|2,n,r\rangle$ 分别所受的力 $-\nabla E_1$ 和 $-\nabla E_2$ 按原子在这两个能级的稳态布居概率的权重平均. 把(3.6.135)，(3.6.136)以及(3.6.129)式代入(3.6.178)式，得

$$f_{dip}^{st}(r)=-\hbar\delta\frac{\omega_1\nabla\omega_1}{\omega_1^2+2\delta^2}=-\hbar\delta\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+2\delta^2}\alpha$$

$$=-\nabla\left[\frac{\hbar\delta}{2}\ln\left(1+\frac{\omega_1^2}{2\delta^2}\right)\right] \tag{3.6.179}$$

其中

$$\alpha=\nabla\omega_1/\omega_1=\Omega\nabla\Omega/\omega_1^2 \tag{3.6.180}$$

对于驻波场而言，$\omega_1(r)=\bar{\omega}_1\cos k\cdot r$，这里 $\bar{\omega}_1$ 是与 r 无关的量. 由(3.6.179)式可知，原子所受的稳态偶极力为

$$f_{dip}^{st}(r)=-\frac{\hbar\delta\nabla\omega_1^2}{4\delta^2+2\omega_1^2}$$

显然上式与(3.6.107)式相比，除分母中少了一个 Γ^2 以外是一致的.

(3.6.179)式表明，偶极力 $f_{dip}^{st}(r)$ 的方向强烈依赖于原子-激光场的失谐量的符号. 这是因为，如果失谐量 $\delta>0$[如图3.6.13(a)所示]，原子在能态 $|1,n,r\rangle$ 中含有 $|e,n\rangle$ 分量的概率比在能态 $|2,n,r\rangle$ 中的要小，因此原子在能态 $|1,n,r\rangle$ 中自发发射的概率比在 $|2,n,r\rangle$ 中的要小，也就是说原子在 $\{|1,n,r\rangle\}$ 的稳态粒子布居数 π_1^{st} 要远大于在 $\{|2,n,r\rangle\}$ 的稳态粒子布居数 π_2^{st}. 所以原子在 $\{|1,n,r\rangle\}$ 所受的力占据主导地位，导致原子具有向激光场空间分布的弱场区域运动的趋势. 相反地，如果 $\delta<0$[如图3.6.13(b)所示]，原子在 $\{|2,n,r\rangle\}$ 的稳态粒子布居数比在 $\{|1,n,r\rangle\}$ 的要大，因此原子在 $\{|2,n,r\rangle\}$ 所受的力占据支配地位，导致原子具有朝着激光场强度较大区域运动的趋势. 当 $\delta=0$ 时，原子在 $|1,n,r\rangle$ 和 $|2,n,r\rangle$ 的稳态粒子布居数相等，因而偶极力消失，即 $f_{dip}^{st}(r)=0$.

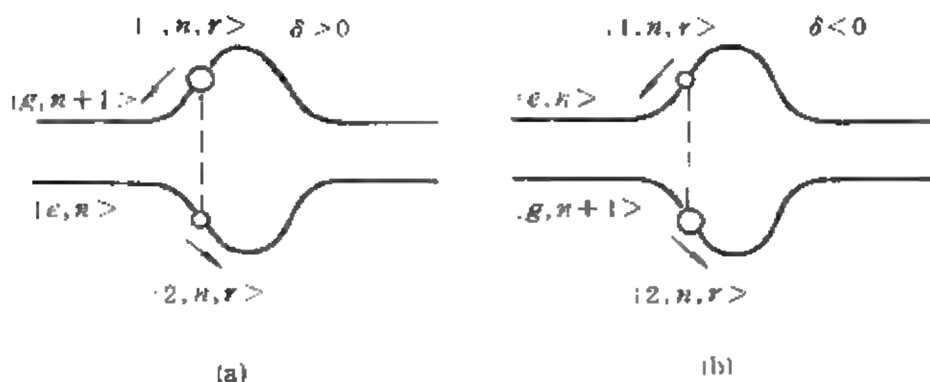


图 3.6.13 偶极力的方向与失谐量 δ 之间的依赖关系示意图

我们再来看看原子质心以极小的速度运动时，偶极力会发生什么样的变化. 假设原子的速度很小，以致于

$$kv/\Gamma \ll 1, \text{即 } v\Gamma^{-1} \ll \lambda \tag{3.6.181}$$

在这种情况下，非绝热动能耦合效应仍可以忽略，我们可以(3.6.171)式作为出发点，得到

$$\boldsymbol{f}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r}) = -\pi_1 \nabla E_1 - \pi_2 \nabla E_2 \tag{3.6.182}$$

与(3.6.178)式不同的是，由于此时原子在运动，因此(3.6.182)式中的 π_i 不再是稳态粒子布居数 π_i^{st}. 而(3.6.181)式表明，多普勒频移远小于光波波长，因此原子在一个自发发射寿命内运动的距离远小于光波的波长，因此(3.6.182)式的 π_i 与(3.6.178)式的 π_i^{st} 相比，可以认为它们之间的差值 $\pi_i - \pi_i^{st}$ 满足

$$\pi_i - \pi_i^{st} \propto kv/\Gamma \tag{3.6.183}$$

由于$(\pi_i)_{NA}$可以忽略，因此由(3.6.145)式可得

$$\dot{\pi}_i(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \pi_i(\boldsymbol{r}) = -\Gamma_{\text{pop}}[\pi_i(\boldsymbol{r}) - \pi_i^{st}(\boldsymbol{r})]$$

即

$$\pi_i(\boldsymbol{r}) - \pi_i^{st}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{v}\, \tau_{\text{pop}} \cdot \nabla \pi_i(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.184}$$

式中

$$\tau_{pop}(\boldsymbol{r})=1/\Gamma_{pop}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.185}$$

注意到这里 $kv/\Gamma \ll 1$，并且只精确到 $kv/\Gamma \ll 1$ 的一级幂项，因此(3.6.184)式中的 $\nabla \pi_i(\boldsymbol{r})$ 可以用 $\nabla \pi_i^{st}(\boldsymbol{r})$ 代替，即

$$\pi_i(\boldsymbol{r}) \approx \pi_i^{st}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{v}\,\tau_{pop}\cdot\nabla \pi_i^{st}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.186}$$

利用泰勒展开公式：

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+\Delta x f(x)+\cdots \tag{3.6.187}$$

(3.6.186)式可表为

$$\pi_i(\boldsymbol{r}) \approx \pi_i^{st}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\,\tau_{pop}) \tag{3.6.188}$$

上式表明，由于原子在能级 $\{|1,n,\boldsymbol{r}\rangle,|2,n,\boldsymbol{r}\rangle\}$ 的寿命为 τ_{pop}，因此在原子运动时，自发发射引起的粒子布居数的变化有一个响应时间 τ_{pop}，使得在点 $\boldsymbol{r}$ 的粒子布居数等于 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\tau_{pop}$ 处的稳态粒子布居数，即 $\pi_i(\boldsymbol{r})=\pi_i^{st}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\tau_{pop})\neq\pi_i^{st}(\boldsymbol{r})$. 将(3.6.186)式代入(3.6.182)式，并利用(3.6.119)和(3.6.164)式得到偶极力为

$$\boldsymbol{f}_{dip}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{f}_{dip}^{st}(\boldsymbol{r})-\frac{2\hbar\delta}{\Gamma}\left[\frac{\omega_1^2(\boldsymbol{r})}{\omega_1^2(\boldsymbol{r})+2\delta^2}\right]^3(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\alpha} \tag{3.6.189}$$

我们看到，计入原子的慢速运动时，偶极力中出现了与原子质心速度有关的一项，这一点可以从图3.6.14来理解. 当 $\delta>0$ 且 $\boldsymbol{v}=0$ 时，由于修饰原子在态矢 $|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$ 中含有 $|g,n+1\rangle$ 的概率比 $|2,n,\boldsymbol{r}\rangle$ 大，因此在点 $\boldsymbol{r}$ 处，稳态粒子布居数 $\pi_1^{st}(\boldsymbol{r})$ 大于 $\pi_2^{st}(\boldsymbol{r})$. 随着光场强度的增加，原子的拉比振荡频率增大，态矢 $|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$ 中 $|e,n\rangle$ 分量所占的概率增大. 由于原子的自发发射，修饰原子在 $|1,n,\boldsymbol{r}\rangle$ 的稳态布居数就会减少，因此当把原子沿着激光束从点 $\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{r}$ 移动到点 $\boldsymbol{r}$ 时，$\pi_1^{st}(\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{r})>\pi_1^{st}(\boldsymbol{r})$，如图3.6.14(a)所示. 当考虑原子的运动时，由(3.6.188)式可知，在点 $\boldsymbol{r}$ 处，修饰原子在态矢 $\{|1,n,\boldsymbol{r}\rangle\}$ 的粒子布居数是 $\pi_1(\boldsymbol{r})$ 而不是 $\pi_1^{st}(\boldsymbol{r})$，如果令 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\tau_{pop}$，则

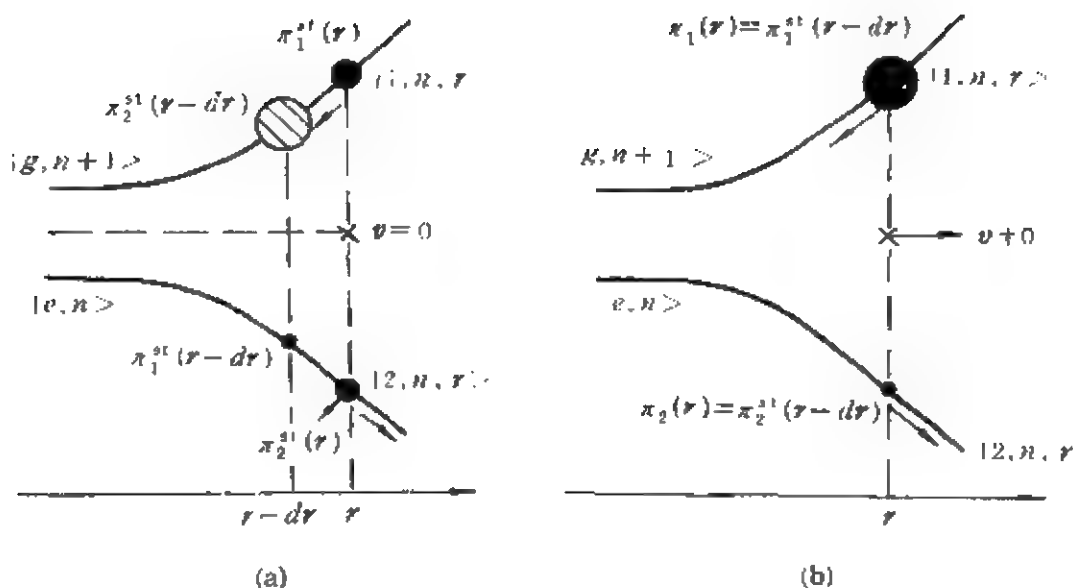


图 3.6.14 偶极力的方向与原子运动速度之间的依赖关系示意图

$$\pi_1(\boldsymbol{r})=\pi_1^{st}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\,\tau_{pop})>\pi_1^{st}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.190}$$

如图3.6.14(b)所示.同样地讨论可以发现,修饰原子在{|2,n,$\boldsymbol{r}$⟩}的粒子布居数 $\pi_2(\boldsymbol{r})$满足

$$\pi_2(\boldsymbol{r})=\pi_2^{st}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\,\tau_{pop})<\pi_2^{st}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.191}$$

这时原子就会在阻尼力 f_{dip}的作用下朝着激光场的强度增大的区域运动.f_{dip}的表示式为

$$f_{dip}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=-\frac{\hbar\nabla\Omega}{2}[\pi_1(\boldsymbol{r})-\pi_2(\boldsymbol{r})]<f_{dip}^{st}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.192}$$

由于 $\pi_1(\boldsymbol{r})$和 $\pi_2(\boldsymbol{r})$含有原子质心速度$\boldsymbol{v}$,所以在(3.6.189)式中出现了含$\boldsymbol{v}$的项.并且由于 $f_{dip}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})<f_{dip}^{st}(\boldsymbol{r})$,因此(3.6.189)式中含$\boldsymbol{v}$的项在 $\delta>0$时和 $f_{dip}^{st}(\boldsymbol{r})$一样,起着阻尼原子运动的作用.相反地,容易证明,当 $\delta<0$时,偶极力 $f_{dip}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$对原子的运动具有加速作用.

参 考 文 献

[1] A. Ashkin, *Phys. Rev. Lett.*, **24**, 156(1970); **25**, 1321 (1970).

[2] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *J. Phys.*, **B10**, 345 (1977).
[3] A. Askin, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 729 (1978).
[4] R. J. Cook and A. F. Bernhardt, *Phys. Rev.*, **A18**, 2533 (1978).
[5] R. J. Cook, *Phys. Rev.*, **A20**, 224(1979).
[6] J. P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev.*, **A21**, 1606 (1980).
[7] A. F. Bernhardt and B. W. Shore, *Phys. Rev.*, **A23**, 1298 (1981).
[8] E. Arimondo and A. Bambini, *Opt. Commun.*, **37**, 103 (1981).
[9] V. S. Letokhov and V. G. Minogin, *Phys. Rep.*, **73**, 1 (1981).
[10] G. Compagno, 彭金生, F. Persico, *Phys. Lett.*, **A88**, 285 (1982).
[11] G. Compagno, 彭金生, F. Persico, *Phys. Rev.*, **A26**, 2065 (1982).
[12] P. E. Moskowitz, P. L. Gould, S. R. Atlas and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 370 (1983).
[13] S. Stenholm, *Phys. Rev.*, **A27**, 2513 (1983).
[14] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**, 1707 (1985).
[15] A. P. Kazantsev, G. A. Ryabenko, G. I. Surdutovich and V. P. Yakovlev, *Phys. Rep.*, **129**, 75 (1985).
[16] P. E. Moskowitz, P. L. Gould and D. E. Pritchard, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**, 1784 (1985).
[17] P. L. Gould, G. A. Ruff and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 827 (1986).
[18] P. J. Martin, B. G. Oldaker, A. H. Miklich and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 515(1988).
[19] M. J. Holland, D. F. Walls and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 1716 (1991).
[20] A. M. Herkommer, V. M. Akulin and W. P. Schleich, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 3298 (1992).
[21] M. Lindberg, *Appl. Phys.*, **B54**, 476 (1992).
[22] P. R. Hemmber, M. G. Prentiss, M. S. Shahriar and N. P. Bigelow, *Opt. Commun.*, **89**, 335 (1992).
[23] V. Finkelstein, J. Guo and P. R. Berman, *Phys. Rev.*, **A46**, 7108 (1992).
[24] R. Grimm, J. Soding, Yu. B. Ovchinnikov and A. I. Sidorov, *Opt. Commun.*, **98**, 54 (1993).
[25] G. Lenz, P. Meystre and E. M. Wright, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 3271 (1993).

第七章　激光致冷

在前一章中我们曾证明，在激光场中运动的原子将受到如(3.6.103)式所示的辐射力的作用．如果激光束波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向与原子运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反，那么辐射力 $\boldsymbol{F}$ 将阻碍原子的运动并使其减速．利用激光场减速原子的运动是冷却原子的有效方法，称为激光致冷．

如果应用激光致冷技术使原子冷却到静止和无相互作用状态，那么原子的多普勒频移、碰撞频移等效应将消失，原子的光谱特性以及许多原子参量将会更为精确．可见，实现有效的激光致冷是深化原子物理学研究的重要途径之一，它在高分辨率光谱学、原子时钟等方面有着重要的应用价值．本章在介绍如何应用激光场有效地减速原子束以后，着重论述激光致冷的量子理论描述，并讨论激光致冷的极限温度问题．

第一节　激光减速原子束

如何应用激光场减速原子束运动的问题，是激光冷却技术的基本问题，在此作一简要概述．为有效地实现激光致冷，首先需要注意解决如何连续补偿多普勒频移改变的问题．对于共振频率为 ω_0 的二能级原子，只有选择激光的频率 ω 与原子的本征跃迁频率 ω_0 和多普勒频移项 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$ 之间满足关系式

$$\omega=\omega_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.7.1}$$

时，才能使激光场与原子发生有效的共振相互作用，从而使原子速度 $\boldsymbol{v}$ 减低．但是原子在不断的减速过程中，多普勒频移项 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$ 也会改变，因此如果不相应改变激光频率 ω，使它在原子减速过程中满足关系式(3.7.1)式，那么原子经多次吸收和发射光子而减速以

后，激光频率将偏离与原子发生共振的条件(3.7.1)式，而降低减速效果，以致终止减速过程. 因此在激光致冷过程中，如何不断改变激光频率以连续补偿多普勒频移的变化是必须解决的重要问题. 技术上可采用一些不同的方法来补偿多普勒频移，例如应用激光频率连续扫描，使激光频率按(3.7.1)式随$\boldsymbol{v}$的减小而提高就是一种较好的方法.

如果原子处在驻波场中运动，由于多普勒效应，两行波场对原子的作用力的大小是不同的. 与原子运动方向相反的光波导致的多普勒频移$-kv$使原子更接近于光场共振的频率，因此光束对原子的阻碍作用力更大，而与原子运动方向相同的光波导致的频移kv将增大原子频率与光场频率间的差频，因而光束对原子的作用力减小. 两束行波场对运动原子作用力之差使原子受到阻尼力$\boldsymbol{F}$的作用，作用力的方向与原子的运动方向相反，可定性地表示为

$$\boldsymbol{F}=-\alpha\boldsymbol{v} \tag{3.7.2}$$

这里α为阻尼系数，显然它与光场强度、原子的本征跃迁频率与光场频率的差频、以及原子的衰变率等参数有关. 对此，以后我们将详细说明.

如果在三维空间加上互相垂直的三对激光束，在其交会区域中的原子由于受到六束驻波场的作用而形成对原子运动的粘滞性约束. 人们把这种光束安排称为“光学粘胶”(Optical Molasses).

应该指出的是，即使技术上完满地解决了连续补偿多普勒频移的问题，但激光对原子的冷却温度也不能达到绝对零度，而是有一有限的极低值，称为多普勒冷却的极限温度T_D. 因为原子在每次吸收和自发发射光子而获得阻碍其运动的动量的过程中，由于自发发射的随机性，每发射一个光子以后原子都获得一个在时间和方向上都随机的光子反冲动量，因而导致原子动量的起伏. 这种起伏相应于激光对原子的一种加热过程，它是难于消除的. 激光对原子的冷却速率与这种加热过程达到平衡的温度，也就是激光冷却的多普勒极限温度T_D. 不过现代激光致冷技术已使原子的冷却

最低温度达到传统理论预言的 T_D 之下，说明了传统的多普勒冷却机制的理论存在着困难．造成这种困难的原因主要是早先理论中假定原子均为二能级原子，实际上由于一般原子并不是简单的二能级原子系统，它的基态通常有几个塞曼子能级，因此在激光抽运作用下，各子能级均有一定的布居分布，这种分布与激光偏振有关．而且在与激光场的相互作用过程中，原子的基态能级还会发生能级移位，称为光漂移．光漂移也有赖于激光偏振，而且不同的塞曼子能级有不同的光漂移值．因此本章将着重介绍考虑到光抽运效应和光漂移效应的激光冷却机制的理论描述．

另外，从技术上讲，解决光抽运效应也是有效地实现激光致冷的重要问题．什么是光抽运效应呢？处于共振能级上的原子吸收光子跃迁到激发态以后，当它通过自发发射而回到低能态时，有可能落到另一非共振塞曼子能级上，于是不再与激光场作用而停止减速，原子在此能级上积累，这种效应称为光抽运效应．光抽运效应也是影响激光冷却原子的重要物理过程．为克服光抽运效应，技术上要采用一些方法，如应用偏振光实现循环跃迁，使原子处于准二能级系统的方法，就是常用的一种方法．限于篇幅，我们在这里就不具体叙述实现有效激光致冷的一些技术方法，有兴趣的读者可参看本章后面所列的有关文献．下面我们将着重讨论激光致冷的量子理论描述．

第二节　激光冷却原子的量子理论描述

一、偏振激光场与准二能级原子相互作用系统的哈密顿量

从理论上讲，我们研究的系统是由具有塞曼子能级的准二能级原子与偏振型激光（如圆偏振或线偏振激光）相互作用的量子系统．现在我们来推导描述此系统的哈密顿量．假定一基态角量子数 $J_g=1/2$、激发态角量子数 $J_e=3/2$ 的准二能级原子在两个相向传播的线偏振行波激光场中运动，那么原子与激光场的相互作用哈

密顿量在旋波近似下可写为

$$V = \boldsymbol{D}^{+} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{+}(\boldsymbol{r})\exp(-i\omega_L t) + \boldsymbol{D}^{-} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-}(\boldsymbol{r})\exp(+i\omega_L t) \tag{3.7.3}$$

式中 $\boldsymbol{D}^{+}$,$\boldsymbol{D}^{-}$ 分别为原子电偶极矩的升、降算符,$\boldsymbol{\varepsilon}^{+}(\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{\varepsilon}^{-}(\boldsymbol{r})$分别为频率为 ω_L 的激光场的正频、负频分量,即

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{+}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{e}_1 \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) + \varepsilon'_0 \boldsymbol{e}_2 \exp(-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{3.7.4}$$

如果两激光场的幅度相等,即 $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0$;并且波矢为 $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$,偏振矢量分别满足:$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$,即两激光场为振幅相等、传播方向相反并且偏振方向互相垂直的线偏振行波场,那么激光场的正频部分(3.7.4)式变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{+}(z) = \varepsilon_0 \sqrt{2}\left[\frac{\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}\cos kz - i\,\frac{\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_x}{\sqrt{2}}\sin kz\right] \tag{3.7.5}$$

从上式看到,整个激光场在不同的空间点具有不同的偏振方向.例如当 $z=0$ 时,激光场是一振幅为 $\sqrt{2}\varepsilon_0$、偏振矢量为$\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$的线偏振光场;当 $z=\lambda/8$ 时,(3.7.5)式变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{+}(\lambda/8) = \sqrt{2}\,\varepsilon_0 e^{i\pi/4}\frac{\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\varepsilon_0 e^{i\pi/4}\boldsymbol{e}_{-} \tag{3.7.6}$$

由(1.3.25)式可知,它所描述的光子是角量子数为-1的右旋圆偏振光子;又如当$z=\lambda/4$时,激光场变成为偏振矢量为$(\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_x)/\sqrt{2}$的线偏振光;而当 $z=3\lambda/8$ 时,(3.7.5)式化为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{+}(3\lambda/8) = -\sqrt{2}\,\varepsilon_0 e^{i\pi/4}\frac{\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\varepsilon_0 e^{i\pi/4}\boldsymbol{e}_{+} \tag{3.7.7}$$

上式中 $\boldsymbol{e}_{+} = -(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$ 表示的光子则是角量子数为 1 的左旋圆偏振光子.可见,随着空间位置的变化,激光场的偏振方向也随之改变.图 3.7.1 描述了激光场的偏振方向随着空间位置的变化情况.为简化讨论起见,在(3.7.5)式中将坐标平移 $\lambda/8$,即 $z \to z + \lambda/8$,则(3.7.5)式变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(z) = \sqrt{2}\,\varepsilon_0\Big[\frac{\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}\cos k(z+\lambda/8)$$

$$-i\,\frac{\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_x}{\sqrt{2}}\sin k(z+\lambda/8)\Big]$$

$$= \sqrt{2}\,\varepsilon_0\Big[e^{i\pi/4}\cos kz\,\frac{\boldsymbol{e}_x-i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}-e^{-i\pi/4}\sin kz\,\frac{\boldsymbol{e}_x+i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}\Big]$$

$$= \sqrt{2}\,\varepsilon_0\big[\boldsymbol{e}_-e^{i\pi/4}\cos kz+\boldsymbol{e}_+e^{-i\pi/4}\sin kz\big] \qquad (3.7.8)$$

在这种情况下，激光场可以看作偏振矢量分别为 $\boldsymbol{e}_-$ 和 $\boldsymbol{e}_+$ 的两个圆偏振驻波激光场的叠加.

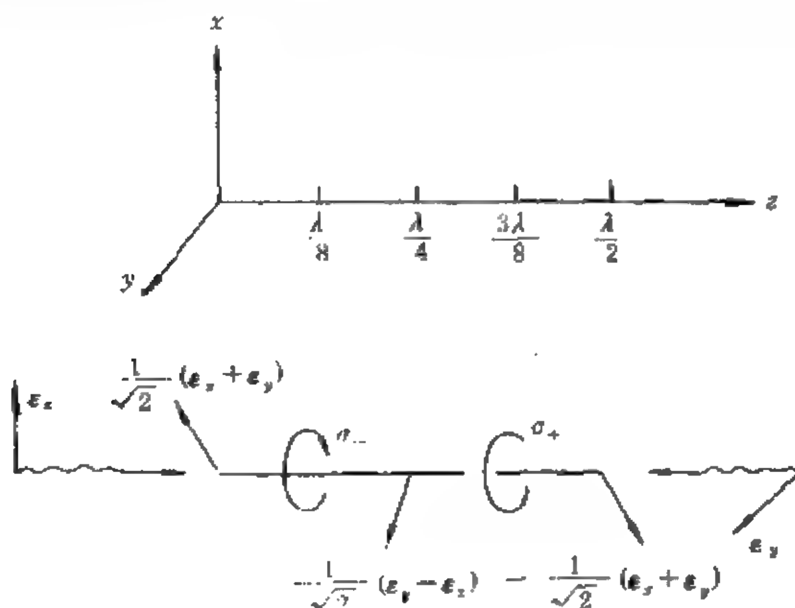


图 3.7.1　不同空间点的激光场的偏振方向

我们知道，基态角量子数 $J_g=1/2$、激发态角量子数 $J_e=3/2$ 的准二能级原子，其激发态具有四个塞曼子能级 $e_{\pm3/2}$，$e_{\pm1/2}$，基态具有两个塞曼子能级 $g_{\pm1/2}$，如图 3.7.2 所示. 反映原子在 $g_m\longleftrightarrow e_{m'}$ 间跃迁强度的 Clebsch-Gordon 系数分别如图所示. 原子在 $g_{-1/2}\to e_{-3/2}$ 及 $g_{1/2}\to e_{-1/2}$ 的跃迁过程中，磁量子数减少 1，按角动量守恒定律，它必须从(3.7.8)式描述的激光场中吸收一个角量子数为 −1 的右旋圆偏振光子. 相似地，原子在 $g_{-1/2}\to e_{1/2}$ 及 $g_{1/2}\to e_{3/2}$ 的跃迁过程中，需要吸收一个角量子数为 1 的左旋圆偏振光子. 而原

子在$g_{-1/2}\to e_{-1/2}$，$g_{1/2}\to e_{1/2}$的跃迁过程中，由于磁量子数不发生变化，因而在(3.7.8)式描述的激光场作用下，这种跃迁是电偶极禁戒的. 因此考虑到角动量守恒定律及反映$g_m\longleftrightarrow e_{m'}$之间跃迁耦合强度的C-G 系数后，(3.7.3)式中原子偶极矩的上升算符$\boldsymbol{D}^+$可以表示为

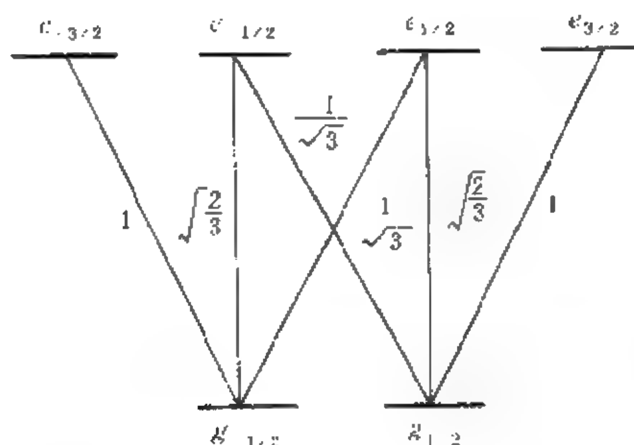


图 3.7.2　原子能级结构和反映原子在$g_m\longleftrightarrow e_{m'}$间跃迁强度的Clebsch-Gordon 系数示意图

$$\boldsymbol{D}^+ = d\Big[\boldsymbol{e}_-\, e^{-i\pi/4}\Big(|e_{-3/2}\rangle\langle g_{-1/2}| + \sqrt{\frac{1}{3}}|e_{-1/2}\rangle\langle g_{1/2}|\Big)$$

$$+\boldsymbol{e}_+\, e^{i\pi/4}\Big(|e_{3/2}\rangle\langle g_{1/2}| + \sqrt{\frac{1}{3}}|e_{1/2}\rangle\langle g_{-1/2}|\Big)\Big] \tag{3.7.9}$$

式中d代表偶极矩的强度，相位因子$e^{-i\pi/4}$及$e^{i\pi/4}$的引入是为了让d为一实数. 将(3.7.8)和(3.7.9)式一并代入(3.7.3)式，则原子-光场的相互作用哈密顿量可表示为

$$V = \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz\Big(|e_{3/2}\rangle\langle g_{1/2}| + \sqrt{\frac{1}{3}}|e_{1/2}\rangle\langle g_{-1/2}|\Big)\exp(-i\omega_L t)$$

$$-\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}\cos kz\Big(|e_{-3/2}\rangle\langle g_{-1/2}| + \sqrt{\frac{1}{3}}|e_{-1/2}\rangle\langle g_{1/2}|\Big)\exp(-i\omega_L t) + h.c. \tag{3.7.10}$$

式中

$$\Omega = 2d\varepsilon_0/\hbar \tag{3.7.11}$$

由(3.6.72)及(3.7.10)式可得激光场对原子的辐射力的期望值为

$$\begin{aligned}
f &= \langle -dV/dz \rangle = -\frac{\hbar k\Omega}{\sqrt{2}}\cos kz \mathrm{Tr}\Big[\rho\Big(|e_{3/2}\rangle\langle g_{1/2}| \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|e_{1/2}\rangle\langle g_{-1/2}|\Big)\Big]\exp(-i\omega_L t) \\
&\quad + \frac{\hbar k\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz \mathrm{Tr}\Big[\rho\Big(|e_{-3/2}\rangle\langle g_{-1/2}| \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|e_{-1/2}\rangle\langle g_{1/2}|\Big)\Big]\exp(-i\omega_L t) + c.c. \\
&= -\frac{\hbar k\Omega}{\sqrt{2}}\cos kz\Big[\tilde{\rho}(g_{1/2}, e_{3/2}) + \sqrt{\frac{1}{3}}\tilde{\rho}(g_{-1/2}, e_{1/2}) + c.c.\Big] \\
&\quad + \frac{\hbar k\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz\Big[\tilde{\rho}(g_{-1/2}, e_{-3/2}) + \sqrt{\frac{1}{3}}\tilde{\rho}(g_{1/2}, e_{-1/2}) + c.c.\Big]
\end{aligned} \tag{3.7.12}$$

式中 ρ 为描述原子内态运动的稳态密度矩阵，并且已令

$$\tilde{\rho}(g_i, e_j) = \langle g_i|\rho|e_j\rangle\exp(-i\omega_L t) \tag{3.7.13}$$

从(3.7.12)式看到，要求出原子在激光场作用下所受的辐射力，就必须求出密度矩阵元 $\rho(g_{1/2}, e_{3/2})$，$\rho(g_{-1/2}, e_{1/2})$ 等，为此需将原子-光场耦合系统的内态哈密顿量在由原子态矢

$$|e_{3/2}\rangle = |1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad |e_{1/2}\rangle = |2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad |e_{-1/2}\rangle = |3\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.7.14}$$

$$|e_{3/2}\rangle = |4\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |g_{1/2}\rangle = |5\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |g_{-1/2}\rangle = |6\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

构成的希尔伯特空间中表示出来.即

$$H_A = \boldsymbol{P}^2/(2m) + \sum_{i=1}^{4} \hbar\,\omega_A |i\rangle\langle i|$$

$$= \boldsymbol{P}^2/(2m) + \begin{bmatrix} \hbar\,\omega_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\,\omega_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\,\omega_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\,\omega_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3. 7. 15)

式中 $\boldsymbol{P}^2/(2m)$表示原子的运动动能,$\sum_{i=1}^{4}\hbar\,\omega_A|i\rangle\langle i|$表示原子内态的未扰哈密顿量,其中已令 $E_{g\pm\frac{1}{2}}=0$. 这样原子-光场的相互作用哈密顿量 V(3. 7. 10)式表示为

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & X_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_1^*/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2^*/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_2^* \\ X_1 & 0 & X_2/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_1/\sqrt{3} & 0 & X_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3. 7. 16)

这里

$$X_1=\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}\sin(kz)\exp(i\omega_L t),$$

$$X_2=\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}\cos(kz)\exp(i\omega_L t) \qquad (3.7.17)$$

知道了描述系统的哈密顿量的矩阵表示以后，我们就可以利用薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho=[H_A+V,\rho] \qquad (3.7.18)$$

求出描述系统的密度矩阵.

二、原子内态密度矩阵元的演化方程

同(3.6.75)，(3.6.78)式一样，这里我们假设原子的运动速度较慢，原子因光场作用所获得的反冲动能远小于其激发态自发发射的线宽 Γ. 在这种假设下，讨论原子的内态运动时可以略去(3.7.15)式中的动能项 $\boldsymbol{P}^2/(2m)$ 的影响.

在(3.7.18)式中令

$$\tilde{\rho}_{ij}=\langle i|\rho|j\rangle\exp(-i\omega_L t)=\rho_{ij}\exp(-i\omega_L t)$$
$$(i=5,6,j=1,2,3,4) \qquad (3.7.19)$$

并将(3.7.15)，(3.7.16)式代入(3.7.18)式，可得到密度矩阵元的演化方程为

$$i\hbar\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix} \qquad (3.7.20)$$

式中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\dot{\rho}_{11} & \dot{\rho}_{12} & \dot{\rho}_{13}\\ \dot{\rho}_{21} & \dot{\rho}_{22} & \dot{\rho}_{23}\\ \dot{\rho}_{31} & \dot{\rho}_{32} & \dot{\rho}_{33}\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}\dot{\rho}_{14} & \dot{\tilde{\rho}}_{15}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{15} & \dot{\tilde{\rho}}_{16}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{16}\\ \dot{\rho}_{24} & \dot{\tilde{\rho}}_{25}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{25} & \dot{\tilde{\rho}}_{26}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{26}\\ \dot{\rho}_{34} & \dot{\tilde{\rho}}_{35}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{35} & \dot{\tilde{\rho}}_{36}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{36}\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}\dot{\rho}_{41} & \dot{\rho}_{42} & \dot{\rho}_{43}\\ \dot{\tilde{\rho}}_{51}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{51} & \dot{\tilde{\rho}}_{52}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{52} & \dot{\tilde{\rho}}_{53}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{53}\\ \dot{\tilde{\rho}}_{61}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{61} & \dot{\tilde{\rho}}_{62}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{62} & \dot{\tilde{\rho}}_{63}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{63}\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}\dot{\rho}_{44} & \dot{\tilde{\rho}}_{45}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{45} & \dot{\tilde{\rho}}_{46}\exp(-i\omega_L t)-i\omega_L\rho_{46}\\ \dot{\tilde{\rho}}_{54}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{54} & \dot{\rho}_{55} & \dot{\rho}_{56}\\ \dot{\tilde{\rho}}_{64}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\rho_{64} & \dot{\rho}_{65} & \dot{\rho}_{66}\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}a(\tilde{\rho}_{51}-\tilde{\rho}_{15}) & a\tilde{\rho}_{52}-a_1\tilde{\rho}_{16} & a\tilde{\rho}_{53}-b_1\tilde{\rho}_{15}\\ a_1\tilde{\rho}_{61}-a\tilde{\rho}_{15} & a_1\tilde{\rho}_{62}-a_1\tilde{\rho}_{26} & a_1\tilde{\rho}_{63}-b_1\tilde{\rho}_{25}\\ b\tilde{\rho}_{51}-a\tilde{\rho}_{35} & b_1\tilde{\rho}_{52}-a_1\tilde{\rho}_{36} & b_1\tilde{\rho}_{53}-b_1\tilde{\rho}_{35}\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}a\tilde{\rho}_{54}-b\tilde{\rho}_{16} & (a\rho_{55}+\omega_A\tilde{\rho}_{15}-a\rho_{11}-b_1\rho_{12})\exp(-i\omega_L t) & (\omega_A\tilde{\rho}_{16}+a\rho_{56}-b_1\rho_{12}-b_1\rho_{14})\exp(-i\omega_L t)\\ a_1\tilde{\rho}_{64}-b\tilde{\rho}_{26} & (a_1\rho_{65}+\omega_A\tilde{\rho}_{25}-a\rho_{21}-b_1\rho_{23})\exp(-i\omega_L t) & (\omega_A\tilde{\rho}_{26}+a_1\rho_{66}-a_1\rho_{22}-b\rho_{24})\exp(-i\omega_L t)\\ b_1\tilde{\rho}_{54}-b\tilde{\rho}_{36} & (b_1\rho_{35}+\omega_A\tilde{\rho}_{35}-a\rho_{31}-b_1\rho_{33})\exp(-i\omega_L t) & (\omega_A\tilde{\rho}_{36}+b_1\rho_{56}-a_1\rho_{12}-b\rho_{24})\exp(-i\omega_L t)\end{bmatrix}$$

$$
B_3=\begin{bmatrix}
b\tilde{\rho}_{61}-a\tilde{\rho}_{45} & b\tilde{\rho}_{62}-a_1\tilde{\rho}_{46} & b\tilde{\rho}_{63}-b_1\tilde{\rho}_{45} \\
(a\rho_{11}+b_1\rho_{31} & (b_1\rho_{32}-\omega_A\tilde{\rho}_{52} & (b_1\rho_{33}-\omega_A\tilde{\rho}_{53} \\
-\omega_A\tilde{\rho}_{51}-a\rho_{55}) & -a\rho_{12}-a_1\rho_{56}) & -a_1\rho_{13}-b_1\rho_{53}) \\
\times\exp(i\omega_L t) & \times\exp(i\omega_L t) & \times\exp(i\omega_L t) \\
(a_1\rho_{21}-b\rho_{41} & (a_1\rho_{22}-\omega_A\tilde{\rho}_{62} & (a_1\rho_{23}+b\rho_{43} \\
-\omega_A\tilde{\rho}_{51}-a\rho_{65}) & +b\rho_{12}-a_1\rho_{66}) & -\omega_A\rho_{63}-b_1\rho_{65}) \\
\times\exp(i\omega_L t) & \times\exp(i\omega_L t) & \times\exp(i\omega_L t)
\end{bmatrix}
$$

$$
B_4=\begin{bmatrix}
b(\tilde{\rho}_{64}-\tilde{\rho}_{16}) & (\omega_A\tilde{\rho}_{45}+b\tilde{\rho}_{65} & (\omega_A\tilde{\rho}_{46}+b\tilde{\rho}_{66} \\
 & -a\rho_{11}-b_1\rho_{43}) & -a_1\rho_{12}-b\rho_{44}) \\
 & \times\exp(-i\omega_L t) & \times\exp(-i\omega_L t) \\
(a\rho_{14}+b_1\rho_{34}-\omega_A\tilde{\rho}_{54} & (a\tilde{\rho}_{15}+b_1\tilde{\rho}_{35} & (a\tilde{\rho}_{16}+b_1\tilde{\rho}_{36} \\
-b\rho_{56})\exp(i\omega_L t) & -a\tilde{\rho}_{51}-b_1\tilde{\rho}_{53}) & -a_1\tilde{\rho}_{52}-b\tilde{\rho}_{54}) \\
(a_1\rho_{24}+b\rho_{44}-\omega_A\tilde{\rho}_{64} & (a_1\tilde{\rho}_{25}+b\tilde{\rho}_{45} & (a_1\tilde{\rho}_{26}+b\tilde{\rho}_{46} \\
-b\rho_{66})\exp(i\omega_L t) & -a\tilde{\rho}_{61}-b_1\tilde{\rho}_{63}) & -a_1\tilde{\rho}_{62}-b_1\tilde{\rho}_{46})
\end{bmatrix}
$$

式中已令

$$
a=\hbar\Omega\sin kz/\sqrt{2},\ a_1=a/\sqrt{3},\ b=\hbar\Omega\cos kz/\sqrt{2},\ b_1=b/\sqrt{3} \tag{3.7.21}
$$

注意到在(3.7.18)式中并没有考虑真空场诱导原子的自发发射过程的影响.考虑自发发射以后,从(3.7.20)式即可得到原子内态密度矩阵元随时间的演化方程,即通常所称的光学布洛赫方程.例如由(3.7.20)式有

$$
\dot{\tilde{\rho}}_{51}\exp(i\omega_L t)+i\omega_L\tilde{\rho}_{51}\exp(i\omega_L t)
$$
$$
=\frac{1}{i\hbar}(a\rho_{11}+b_1\rho_{31}-\omega_A\tilde{\rho}_{51}-a\rho_{55})\exp(i\omega_L t)-\frac{1}{2}\Gamma\tilde{\rho}_{51}\exp(i\omega_L t)
$$

将(3.7.21)式代入上式,并且令失谐量

$$
\delta=\omega_L-\omega_A \tag{3.7.22}
$$

则得到 $\dot{\tilde{\rho}}_{51}$ 随时间的演化方程为

$$\dot{\tilde{\rho}}_{51} = -(i\delta + \Gamma/2)\tilde{\rho}_{51} - i\Omega\cos kz\rho_{31}/\sqrt{6} + i\Omega\sin kz(\rho_{55} - \rho_{11})/\sqrt{2} \tag{3.7.23}$$

显然上式对任意的激光场强度均成立，但求解起来非常繁琐. 为简化计算，我们仅讨论激光场的强度很弱并且原子的运动速度很慢的情况.

如果光场的强度很弱，以致于 $\Omega \ll \Gamma$，在这种情况下，处在基态 $|g_{-1/2}\rangle$ 或 $|g_{1/2}\rangle$ 的原子被激发到激发态 $|e_j\rangle$ $(j = \pm 1/2, \pm 3/2)$ 的概率很小. 因此在(3.7.23)式中，与 ρ_{55} 相比，原子在激发态的概率 ρ_{11} 以及描述激发态两塞曼子能级间相干程度的 ρ_{31} 很小，以致于在精确到 Ω/Γ 时，可以略去它们对 $\tilde{\rho}_{51}$ 的影响. 这样，(3.7.23)式简化为

$$\dot{\tilde{\rho}}_{51} = -(i\delta + \Gamma/2)\tilde{\rho}_{51} + i\Omega\sin kz\rho_{55}/\sqrt{2} \tag{3.7.24}$$

假若原子运动的速度很慢，以致于原子在光场作用下发生的多普勒频移 $kv \ll \Gamma$，那么在(3.7.24)式中，描述原子在基态 $|g_{1/2}\rangle$ 和激发态 $|e_{3/2}\rangle$ 之间相干程度的 $\tilde{\rho}_{51}$ 在其弛豫时间 $2/\Gamma$ 内，$\sin kz = \sin kvt$ 的变化很小. 换句话说，与 $\rho_{55}\sin kz$ 相比，$\tilde{\rho}_{51}$ 是一个快速衰变量，因此

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{51}(t) &= \rho_{51}(0)\exp[-(i\delta + \Gamma/2)t] \\
&\quad + (i\Omega/\sqrt{2})\int_0^t \sin kz\rho_{55}\exp[-(i\delta + \Gamma/2)(t - t')]dt' \\
&= \rho_{51}(0)\exp[-(i\delta + \Gamma/2)t] + \frac{i\Omega\sin kz\rho_{55}}{\sqrt{2}\left(i\delta + \dfrac{\Gamma}{2}\right)} \\
&\quad \times \{1 - \exp[-(i\delta + \Gamma/2)t]\}
\end{aligned}$$

当 $t \gg \dfrac{\Gamma}{2}$ 时，上式中指数项的值衰减为零，因此在这种情况下，$\tilde{\rho}_{51}(t)$ 与 ρ_{55} 间满足

$$\tilde{\rho}_{51}(t)=\frac{i\Omega\sin kz}{i\delta+\frac{\Gamma}{2}}\rho_{55}=\frac{\Omega\sin kz}{\delta-\frac{i\Gamma}{2}}\rho_{55} \tag{3.7.25}$$

实际上，由于 $\tilde{\rho}_{51}$ 是一个快速衰变量，我们可以直接在(3.7.24)式中令 $\dot{\tilde{\rho}}_{51}=0$，即利用绝热近似，此时

$$\dot{\tilde{\rho}}_{51}=0=-(i\delta+\Gamma/2)\tilde{\rho}_{51}+i\Omega\sin kz\rho_{55}/\sqrt{2}$$

显然由上式直接可以得到(3.7.25)式. 现在问题转化为求解 ρ_{55} 了. 为此利用(3.7.20)式给出

$$\dot{\rho}_{11}=-\Gamma\rho_{11}+\frac{i\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz(\tilde{\rho}_{15}-\tilde{\rho}_{51}) \tag{3.7.26}$$

上式中的 $-\Gamma\rho_{11}$ 描述的是自发发射过程的影响. 将(3.7.25)式代入(3.7.26)式，在绝热近似下得到

$$\rho_{11}=s_0\sin^2 kz\rho_{55} \tag{3.7.27}$$

这里

$$s_0=\frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\delta^2+\frac{\Gamma^2}{4}} \tag{3.7.28}$$

s_0 被称为原子-光场耦合系统的饱和参数. (3.7.27)式反映的是原子在激发态 $|e_{3/2}\rangle$ 的粒子布居概率与在基态 $|g_{1/2}\rangle$ 的粒子布居概率之间的关系，显然 $\rho_{11}/\rho_{55}\propto\Omega^2/\Gamma^2$. 同样地可以得到

$$\dot{\tilde{\rho}}_{35}=(i\delta-\Gamma/2)\tilde{\rho}_{35}+i\Omega\sin kz\rho_{31}/\sqrt{2}+i\Omega\cos kz(\rho_{33}-\rho_{55})/\sqrt{6} \tag{3.7.29}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{62}=-(i\delta+\Gamma/2)\rho_{62}+i\Omega\sin kz\rho_{66}/\sqrt{6}-i\Omega\sin kz\rho_{22}/\sqrt{6}-i\Omega\cos kz\rho_{42}/\sqrt{2} \tag{3.7.30}$$

同计算 $\tilde{\rho}_{51}$ 相似，在上面两式中略去激发态粒子布居数 ρ_{33}，ρ_{22} 以及

描述激发态塞曼子能级相干程度的 ρ_{31}，ρ_{42}这些 Ω/Γ 的二级小量项，并且考虑到绝热近似，最后得到

$$\tilde{\rho}_{35}=\frac{\Omega/\sqrt{6}}{\delta+i\Gamma/2}\sin kz\rho_{55} \tag{3.7.31}$$

$$\tilde{\rho}_{62}=\frac{\Omega/\sqrt{6}}{\delta-i\Gamma/2}\sin kz\rho_{66} \tag{3.7.32}$$

下面再来计算与密度矩阵元 $\tilde{\rho}_{62}$及 $\tilde{\rho}_{35}$相联系的原子在激发态 $|e_{1/2}\rangle$及$|e_{-1/2}\rangle$的粒子布居概率. 利用(3.7.20)式并考虑到自发发射效应，可得

$$\dot{\rho}_{22}=-\Gamma\rho_{22}+\frac{i\Omega}{\sqrt{6}}\sin kz(\tilde{\rho}_{26}-\tilde{\rho}_{62}) \tag{3.7.33}$$

$$\dot{\rho}_{33}=-\Gamma\rho_{33}+\frac{i\Omega}{\sqrt{6}}\cos kz(\tilde{\rho}_{35}-\tilde{\rho}_{53}) \tag{3.7.34}$$

同计算 ρ_{11}相似，利用绝热近似并考虑到(3.7.31)及(3.7.32)式，可以得到

$$\rho_{22}=s_0\sin^2 kz\rho_{66}/2 \tag{3.7.35}$$

$$\rho_{33}=\frac{1}{3}s_0\cos^2 kz\rho_{55}/3 \tag{3.7.36}$$

这样我们就得出了通过激光场的作用与$|g_{1/2}\rangle$相联系的密度矩阵元 $\tilde{\rho}_{51}$，$\tilde{\rho}_{35}$以及通过自发发射过程与$|g_{1/2}\rangle$相联系的 ρ_{11}，ρ_{22}，ρ_{33}. 再次考虑(3.7.20)式及自发发射的影响，容易得到原子在$|g_{1/2}\rangle$的粒子布居数 ρ_{55}所遵循的方程：

$$\dot{\rho}_{55}=\Gamma[\rho_{11}+2\rho_{22}/3+\rho_{33}/3]-[\frac{i\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz\tilde{\rho}_{15}+\frac{i\Omega}{\sqrt{6}}\cos kz\tilde{\rho}_{35}$$
$$-\frac{i\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz\tilde{\rho}_{51}-\frac{i\Omega}{\sqrt{6}}\cos kz\tilde{\rho}_{53}] \tag{3.7.37}$$

上式中与Γ相联系的项$\Gamma\rho_{ii}$($i=1,2,3$) 描述的是处于激发态

$|e_{3/2}\rangle$，$|e_{1/2}\rangle$及$|e_{-1/2}\rangle$的原子在真空起伏的诱导下向基态$|g_{1/2}\rangle$的衰变对ρ_{55}的贡献，显然这些衰变过程是满足电偶极选择定则$\Delta m=0$，± 1的. 将(3.7.25)，(3.7.31)式及其复共轭项以及(3.7.27)，(3.7.35)，(3.7.36)式一并代入(3.7.37)式，可得

$$\dot{\rho}_{55}=-2s_0\Gamma(\cos^2 kz\rho_{55}-\sin^2 kz\rho_{66})/9 \qquad (3.7.38)$$

同样地，与$|g_{-1/2}\rangle$相联系的密度矩阵元$\tilde{\rho}_{64}$，ρ_{44}以及ρ_{66}所满足的方程为

$$\tilde{\rho}_{64}=\frac{\Omega/\sqrt{2}}{\delta-i\Gamma/2}\cos kz\rho_{66} \qquad (3.7.39)$$

$$\rho_{44}=s_0\cos^2 kz\rho_{66} \qquad (3.7.40)$$

$$\dot{\rho}_{66}=\Gamma\left(\rho_{44}+\frac{2\rho_{33}}{3}+\frac{\rho_{22}}{3}\right)+\frac{i\Omega}{\sqrt{6}}\sin kz(\tilde{\rho}_{62}-\tilde{\rho}_{26})$$
$$+\frac{i\Omega}{\sqrt{2}}\cos kz(\tilde{\rho}_{64}-\tilde{\rho}_{46})=-2\Gamma s_0(\sin^2 kz\rho_{66}-\cos^2 kz\rho_{55})/9$$
$$(3.7.41)$$

考虑到

$$1=\sum_{i=1}^{6}\rho_{ii}\approx\rho_{55}+\rho_{66} \qquad (3.7.42)$$

并利用(3.7.38)，(3.7.41)式可得到原子在基态$|g_{-1/2}\rangle$，$|g_{1/2}\rangle$的稳态粒子布居概率：

$$\rho_{55}^{st}=\sin^2 kz \qquad (3.7.43)$$

$$\rho_{66}^{st}=\cos^2 kz \qquad (3.7.44)$$

将(3.7.42)—(3.7.44)式代入(3.7.38)，(3.7.41)式得

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{55}&=-[\cos^2 kz\rho_{55}-\sin^2 kz(1-\rho_{55})]/\tau_p\\&=-(\rho_{55}-\rho_{55}^{st})/\tau_p\end{aligned} \qquad (3.7.45)$$

$$\dot{\rho}_{66}=-(\rho_{66}-\rho_{66}^{st})/\tau_p \qquad (3.7.46)$$

式中已令

$$1/\tau_p = 2\Gamma s_0/9 \qquad (3.7.47)$$

与(3.6.139)式相似，$1/\tau_p$ 称为泵浦速率.(3.7.45)，(3.7.46)式表明，当原子静止在 z 点时，原子在 $|g_{-1/2}\rangle$，$|g_{1/2}\rangle$ 的粒子布居概率在时间 τ_p 后将达到稳态分布. 显然 τ_p 与激光场的强度 $I \propto \Omega^2$ 成正比，并且从(3.7.43)，(3.7.44)式可知，稳态布居概率 $\rho_{55}{}^{st}$，$\rho_{66}{}^{st}$ 的值强烈依赖于原子在激光场中的位置.

上面我们求出了原子的内态密度矩阵元，将它们代入(3.7.12)式就可以得到原子在激光场作用下受到的辐射力.

三、激光场作用下原子所受的辐射力

为计算原子在激光场作用下所受的辐射力，可将 $\tilde{\rho}_{51}$，$\tilde{\rho}_{62}$，$\tilde{\rho}_{64}$，$\tilde{\rho}_{53}$ 及其复共轭代入(3.7.12)式，得到

$$\begin{aligned}
f = & -\frac{\hbar k\Omega}{\sqrt{2}}\cos kz\Big\{\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz\rho_{55}\Big(\frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}}\Big) \\
& + \frac{\Omega}{3\sqrt{2}}\sin kz\rho_{66}\Big(\frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}}\Big)\Big\} \\
& + \frac{\hbar k\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz\Big\{\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\cos kz\rho_{65}\Big(\frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}}\Big) \\
& + \frac{\Omega}{3\sqrt{2}}\cos kz\rho_{35}\Big(\frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}}\Big)\Big\} \\
= & -2\hbar ks_0\delta(\rho_{55} - \rho_{66})(\sin 2kz)/3
\end{aligned} \qquad (3.7.48)$$

上式表明，在弱光场作用下，原子所受的辐射力 f 强烈依赖于原子在基态子能级 $|g_{1/2}\rangle$，$|g_{-1/2}\rangle$ 的粒子布居差，这也就是说，原子所受的辐射力 f 由原子在两个基态子能级的性质决定. 为理解这种现象的物理本质，下面我们来讨论原子基态子能级的性质在激光场作用下所发生的变化.

由于激光场很弱，那么原子跃迁到激发态 $|e_j\rangle$ 的概率很小. 对

于初始处在$|g_i\rangle$的原子，在弱光场的作用下，这种跃迁可以利用微扰理论来讨论. 又因为处于两个基态子能级的原子在激光场作用下没有向同一上能级态跃迁，因此可以把原子作为两个子系统来处理. 对于态矢$|g_{1/2},n\rangle$而言，由定态微扰论可知，在激光场作用下，原子的修饰态函数为

$$|\Psi_{1/2}\rangle=A(|g_{1/2},n\rangle+\tilde{\rho}_{15}|e_{3/2},n-1\rangle+\tilde{\rho}_{35}|e_{-1/2},n-1\rangle) \tag{3.7.49}$$

式中A为归一化常数. 注意到这时(3.7.25)，(3.7.31)式中的$\rho_{55}=1$，那么(3.7.49)式可化为

$$|\Psi_{1/2}\rangle=A\left(|g_{1/2},n\rangle+\frac{\frac{\Omega}{\sqrt{2}}}{\delta+i\frac{\Gamma}{2}}\sin kz|e_{3/2},n-1\rangle\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega/\sqrt{6}}{\delta+i\frac{\Gamma}{2}}\cos kz|e_{-1/2},n-1\rangle\right) \tag{3.7.50}$$

考虑到归一化条件

$$\langle\Psi_{1/2}|\Psi_{1/2}\rangle=1$$

可得

$$A=(1+s_0\sin^2 kz+s_0\cos^2 kz/6)^{-1/2} \tag{3.7.51}$$

从而初始处在$|g_{1/2},n\rangle$的原子在激光场作用下的修饰态函数为

$$|\Psi_{1/2}\rangle=(1+s_0\sin^2 kz+s_0\cos^2 kz/6)^{-1/2}\left(|g_{1/2},n\rangle+\frac{\Omega/\sqrt{2}}{\delta+i\frac{\Gamma}{2}}\right.$$
$$\left.\times\sin kz|e_{3/2},n-1\rangle+\frac{\Omega/\sqrt{6}}{\delta+i\frac{\Gamma}{2}}\cos kz|e_{-1/2},n-1\rangle\right) \tag{3.7.52}$$

由此利用与计算氢原子兰姆移位(2.6.32)式相似的方法，可得在激光场的影响下，原子的基态能修正量为

$$\Delta E_{1/2} = -\langle \Psi_{1/2} | (\sum_{i=1}^{4} \hbar\, \omega_A |i\rangle\langle i|) | \Psi_{1/2} \rangle$$
$$- \langle \Psi_{1/2} | \hbar\, \omega_L a^+ a | \Psi_{1/2} \rangle$$
$$+ \langle g_{1/2}, n | (\sum_{i=1}^{4} \hbar\, \omega_A |i\rangle\langle i|) | g_{1/2}, n \rangle$$
$$+ \langle g_{1/2}, n | \hbar\, \omega_L a^+ a | g_{1/2}, n \rangle$$
$$= -\hbar n\omega_L + \hbar\, \omega_L s_0 (\sin^2 kz + (\cos^2 kz)/3)$$
$$\times (1 + s_0 \sin^2 kz + s_0 (\cos^2 kz)/3)^{-1}$$
$$- \hbar\, \omega_A s_0 (\sin^2 kz + (\cos^2 kz)/3)(1 + s_0 \sin^2 kz$$
$$+ s_0 (\cos^2 kz)/3)^{-1} + \hbar n\omega_L$$
$$\approx \hbar\, \delta s_0 ((\cos^2 kz)/3 + \sin^2 kz) \qquad (3.7.53)$$
$$= E_0 - \hbar\, \delta s_0 (\cos 2kz)/3 \qquad (3.7.54)$$

式中已令

$$E_0 = 2\hbar\, \delta s_0 / 3 \qquad (3.7.55)$$

(3.7.54)式表明，由于激光场的作用，原子基态子能级发生了能级移位，其值为 $E_0 - \hbar\delta s_0(\cos 2kz)/3$，这一能级移位就是前面所说的光漂移. 同样地，可得原子另一基态子能级 $|g_{-1/2}\rangle$ 在激光场作用下的光漂移值 $\Delta E_{-1/2}$ 为

$$\Delta E_{-1/2} = E_0 + \hbar\, \delta s_0 (\cos 2kz)/3 \qquad (3.7.56)$$

显然，原子的两个基态子能级在激光场作用下发生的光漂移值是不相同的. 这是因为原子的两个子能级分别与激发态以不同的强度相耦合. 由(3.7.8)式可以看出，态 $|g_{1/2}\rangle$ 分别以强度 $\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}\sin kz$，$\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{6}}\cos kz$ 与态 $|e_{3/2}\rangle$ 和态 $|e_{-1/2}\rangle$ 耦合，而态 $|g_{-1/2}\rangle$ 则分别以强度 $\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}\cos kz$，$\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{6}}\sin kz$ 与态 $|e_{-3/2}\rangle$ 和态 $|e_{1/2}\rangle$ 耦合. 由于在不同的

空间点原子感受的激光场强度不同，因而原子的两个基态子能级所发生的光漂移值是不相同的，它们的大小明显地依赖于激光场的空间分布. 图 3.7.3 给出了原子两个基态子能级的光漂移值 $\Delta E_{\pm 1/2}$随 z 的变化，显然，$\Delta E_{\pm 1/2}$随 z 的变化周期为 $\lambda/2$.

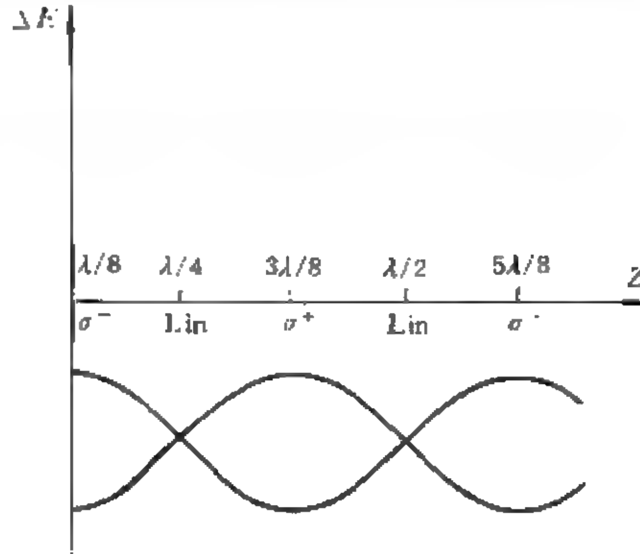


图 3.7.3 原子两个基态子能级的光漂移值 $\Delta E_{\pm 1/2}$随 z 的变化 "Lin"表示线偏振，"σ^+"和"σ^-"分别表示左旋圆偏振和右旋圆偏振

由于原子两基态子能级的光漂移值随着空间位置的变化而变化，那么原子处在态$|g_{1/2}\rangle$和态$|g_{-1/2}\rangle$时所感受到的力应分别为

$$f_{1/2} = -\frac{d}{dz}\Delta E_{1/2} = -2\hbar k\delta s_0(\sin 2kz)/3 \qquad (3.7.57)$$

$$f_{-1/2} = 2\hbar k\delta s_0(\sin 2kz)/3 \qquad (3.7.58)$$

利用(3.7.57)，(3.7.58)式可把(3.7.48)式表示为

$$f = f_{1/2}\rho_{55} + f_{-1/2}\rho_{66} \qquad (3.7.59)$$

上式表明，原子在激光场所受的辐射力f，是原子在基态子能级$|g_{1/2}$和$|g_{-1/2}\rangle$所受到的力 $f_{1/2}$和 $f_{-1/2}$，按原子在这两个能级的粒子布居概率的权重平均. 这一结论与(3.6.182)式完全相同，在那里原子所受的辐射偶极力是原子在两个修饰能级所受的力的加权平均.

这也就是说，对于这里所讨论的角量子数为 $J_e=3/2$ 和 $J_g=1/2$ 的准二能级原子而言，由于原子的两个基态子能级在弱激光场作用下发生不同的光漂移，使得原子受到不同的力。此外，由于原子在态 $|g_{1/2}\rangle$ 和态 $|g_{-1/2}\rangle$ 具有不同的粒子布居，所以原子在激光场作用下受到总的力是 $f_{1/2}$ 和 $f_{-1/2}$ 以粒子布居概率为权重的平均.

下面我们来计算粒子布居概率 ρ_{55}，ρ_{66}，进而得出原子所受力的大小. 首先我们来看原子静止在空间某一点 z 的情形. 在这种情况下，原子的速率 $v=0$，而且 $\sin kz$，$\cos kz$ 也不随时间变化. 此时由(3.6.178)式知，原子在态 $|g_{\pm1/2}\rangle$ 的粒子布居概率为稳态粒子布居概率 ρ_{55}^{st}，ρ_{66}^{st}，所以原子所受的力为

$$f(z,v=0)=f_{1/2}\rho_{55}^{st}+f_{-1/2}\rho_{66}^{st}=2\hbar k\delta s_0\sin2kz\cdot\cos2kz/3 \tag{3.7.60}$$

下面我们再来看看原子作慢速运动时所受的力. 由于(3.7.45)，(3.7.46)式与(3.6.140)式具有相同的形式，因此在多普勒频移 kv 远小于泵浦速率 $1/\tau_p$ 时，即 $kv\tau_p\ll1$ 时，由(3.6.189)式可得

$$\rho_{55}(z,v)\approx\rho_{55}^{st}(z)-v\tau_p\frac{d\rho_{55}^{st}}{dz}+\cdots=\sin^2kz-kv\tau_p\sin2kz \tag{3.7.61}$$

$$\rho_{66}(z,v)\approx\rho_{66}^{st}(z)-v\tau_p\frac{d\rho_{66}^{st}}{dz}+\cdots=\cos^2kz+kv\tau_p\sin2kz \tag{3.7.62}$$

将上面两式代入(3.7.48)式，可得原子作低速运动时在激光场中所受的力为

$$f(z,v)=f(z,v=0)+4\hbar k^2\delta s_0v\tau_p(\sin^2(2kz))/3 \tag{3.7.63}$$

这时我们再来看看原子在一个激光波长范围内所受的力，即对 $f(z,v)$ 作空间周期平均. 显然，由(3.7.60)和(3.7.62)式可得

$$\bar{f}(v=0)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(z,v=0)dz=\frac{2}{3\lambda}\hbar k\delta s_0\int_0^\lambda\sin2kzdz=0 \tag{3.7.64}$$

$$\bar{f}(v)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(z,v)dz=-\alpha v \tag{3.7.65}$$

这就是(3.7.2)式所表征的运动原子在驻波型激光场中所受的力.这里已令

$$\alpha=-2\hbar k^2\delta s_0\tau_p/3=-3\hbar k^2\delta/\Gamma \tag{3.7.66}$$

它表明系数 α 的大小明显地依赖于激光场的频率 ω_L 与原子的本征频率 ω_A 的差值 δ[(3.7.22)式].当 $\delta>0$ 时,$\alpha<0$,因此原子所受的空间平均力 $\bar{f}(v)=|\alpha|v$ 起着加速原子的作用.而当 $\delta<0$ 时,$\alpha>0$,此时 $\bar{f}(v)=-|\alpha|v$ 起着减速原子运动的作用,α[(3.7.66)式]即为(3.7.2)式中所说的阻尼系数的表示式.由于此时辐射力(3.7.65)式对原子运动的阻碍作用,原子的速率将逐渐减小,原子的动能 E_k 随之减小.由热力学定律可知,$E_k=k_BT/2$,因此在原子动能减小过程中,原子的温度逐渐降低,这样就达到了激光冷却原子的目的.下面我们较仔细地分析一下激光冷却原子过程的物理机制.

四、激光场冷却原子的物理机制

由于我们在推导(3.7.12)式时已将空间坐标平移 $\lambda/8$,因此在 $z=0$ 处,原子受到右旋圆偏振光场的作用,此时放在那里的原子会吸收 σ^- 光子,使它从态 $|g_{1/2}\rangle$ 跃迁至态 $|e_{-1/2}\rangle$,进而在真空起伏的作用下衰减至态 $|g_{-1/2}\rangle$.(若原子衰减至 $|g_{1/2}\rangle$,它会吸收另外一个 σ^- 光子而跃迁至 $|e_{-1/2}\rangle$,而再一次有机会衰变到态 $|g_{-1/2}\rangle$).另一方面,如果处于原子态 $|g_{-1/2}\rangle$ 的原子吸收一个 σ^- 光子而跃迁到态 $|e_{-3/2}\rangle$ 的话,由于处在 $|e_{-3/2}\rangle$ 能态的原子只能衰减至 $|g_{-1/2}\rangle$,所以在稳态时原子将被泵浦至 $|g_{-1/2}\rangle$.由(3.7.43)和(3.7.44)式可知,在 $z=0$ 空间点,原子在基态的稳态粒子布居概率为

$$\rho_{55}^{st}(z=0)=0,\qquad \rho_{66}^{st}(z=0)=1 \tag{3.7.67}$$

此外由(3.7.12)式还可知道,原子从 $|g_{-1/2}\rangle$ 态开始的 σ^- 跃迁比从

$|g_{1/2}\rangle$态开始的σ^-跃迁强三倍，因而态$|g_{-1/2}\rangle$的光漂移$\Delta E_{-1/2}$比态$|g_{1/2}\rangle$的光漂移值$\Delta E_{1/2}$大三倍，由(3.7.54)，(3.7.56)式得

$$\Delta E_{1/2}(z=0)=\hbar\delta s_0/3, \qquad \Delta E_{-1/2}(z=0)=\hbar\delta s_0 \quad (3.7.68)$$

当$z=\lambda/4$时，由于此处激光场的偏振是σ^+，所以处在这里原子的情况与处在$z=0$处的原子的情况相反，稳态时原子都会被泵浦至$|g_{1/2}\rangle$，它的稳态粒子布居概率分布为

$$\rho_{55}^{st}(z=\lambda/4)=1, \qquad \rho_{66}^{st}(z=\lambda/4)=0 \qquad (3.7.69)$$

这时态$|g_{1/2}\rangle$，$|g_{-1/2}\rangle$的光漂移分别为

$$\Delta E_{1/2}(z=\lambda/4)=\hbar\delta s_0, \quad \Delta E_{-1/2}(z=\lambda/4)=\hbar\delta s_0/3 \qquad (3.7.70)$$

最后，假如原子放在具有线偏振激光的平面上，例如$z=\lambda/8$，$3\lambda/8$，…，此时激光场可以看作以σ^-和σ^+这两种不同圆偏振光的等幅叠加，因此由对称性可知，原子在两个基态子能级上的布居概率相等，光漂移也相同，这一点可以从(3.7.43)，(3.7.44)及(3.7.54)，(3.7.56)式得到证明. 图 3.7.4 给出了这些结果的示意，光漂移能量作为z的函数用余弦曲线表示，布居数用圆圈的大小代表.

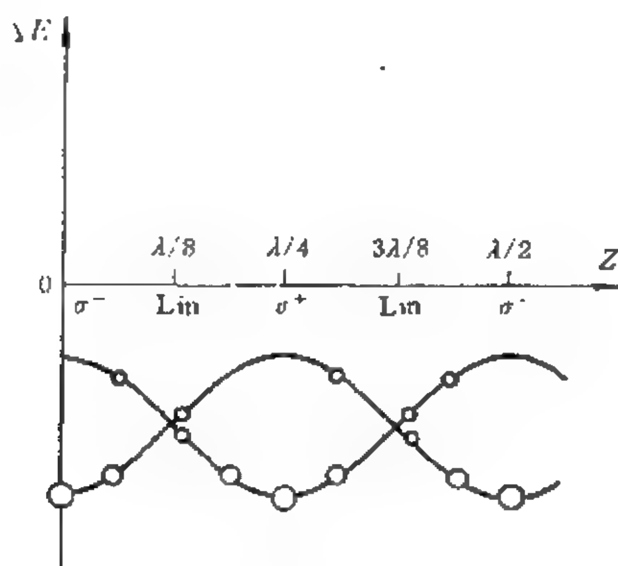


图 3.7.4 原子两个基态子能级的光漂移量和粒子布居值随z的变化
"Lin"表示线偏振，"σ^-"和"σ^+"分别表示左旋圆偏振和右旋圆偏振

如果把光漂移能量曲线看作是原子所要经历的势能山，显然原子在相邻的势能山谷(即 $z=0,\lambda/4,\cdots$)或相邻的势能山顶($z=\lambda/8,3\lambda/8,\cdots$)的粒子布居是对称分布的，因而作用于静止原子的力按空间周期平均显然为零，即满足(3.7.64)式. 但是，当原子运动时，这种对称性就会被打破，这时即出现了平均阻尼力 $\bar{f}(v)$ (3.7.65)式. 如果把在 $kv\tau_p \ll 1$ 时成立的(3.7.61)，(3.7.62)式按照泰勒展开公式

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+\Delta x f'(x)$$

写成

$$\rho_{55}(z) \approx \rho_{55}^{st}(z-v\tau_p), \qquad \rho_{66}(z) \approx \rho_{66}^{st}(z-v\tau_p) \quad (3.7.71)$$

可以看到，原子在 z 点处所受到的辐射力由它在 $z-v\tau_p$ 的稳态粒子布居概率决定. 现在假设原子从 $z=0$ 出发，在这里，由于光泵浦使得原子布居在势能山的谷底(如图 3.7.5 所示). 如果原子有这样一种速度 v，使得它在 τ_p 时间内前进了 $\lambda/4$ 的距离，即 $v=\lambda/(4\tau_p)=\pi/(2k\tau_p)$. 由(3.7.71)式可知

$$\rho_{66}(z=\lambda/4)=\rho_{66}^{st}(z=0)=1 \quad (3.7.72)$$

可见原子在运动了 $\lambda/4$ 的距离后仍停留在基态子能级 $|g_{-1/2}\rangle$ 上，但这时原子经历了一个爬势能山的过程. 因此原子的动能减小，转化成势能. 在势能山顶($z=\lambda/4$)原子将受到 σ^+ 光子的作用，因而会吸收 σ^+ 光子跃迁到 $|e_{1/2}\rangle$. 此时由于真空起伏的作用，处于 $|e_{1/2}\rangle$ 态的原子会发射荧光光子而衰减至 $|g_{1/2}\rangle$，即原子又跌入另一势能山的谷底，此时原子的势能以荧光光子的形式辐射出去. 同样的过程又从这里重复，如图 3.7.5 所示. 因此由于时间延迟 τ_p，原子如同希腊神话中的 Sisphus (Sisphus 是哥林多狡猾而贪婪的国王，后被囚禁于冥府，冥王令他推一巨石上山顶，而此石每次必滚下)那样，似乎总是在爬势能山，把它的部分动能转换成势能，然后通过荧光光子的形式发射出去.

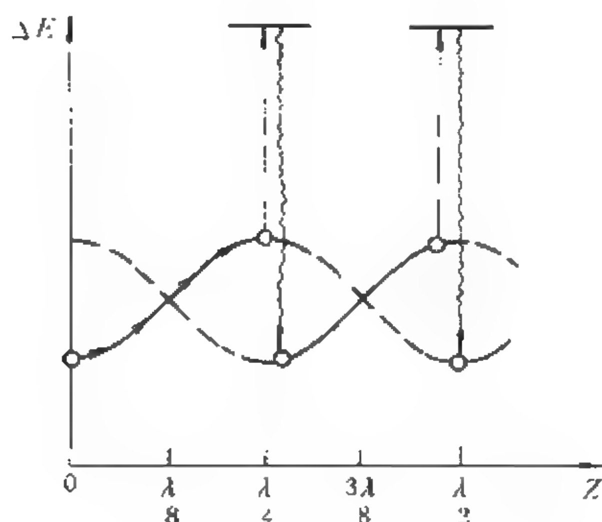


图 3.7.5　激光场作用下原子的 Sisphus 效应

以上物理图像清楚地显示，当在泵浦时间 τ_p 内原子前进 1/4 波长($\lambda/4$)量级的距离时，这种冷却机制最有效. 因此原子的速度范围可定义为

$$v_p \approx \lambda/(4\tau_p) \qquad 或\ kv_p\tau_p \approx 1/4 \tag{3.7.73}$$

由于泵浦速率 $1/\tau_p$ 正比于饱和常数 s_0，所以上式表明 v_p 与 s_0 成正比. 当 $s_0 \ll 1$ 时(即 $\Omega \ll \Gamma$ 时)，v_p 趋于零，这时原子的温度可被冷却到很低.

上面的讨论表明，当原子运动速度 $v = v_p$ 时，激光场对原子具有最佳的冷却效果. 但是值得注意的是，得到这一结果的出发点(3.7.61)，(3.7.62)式是在 $kv \ll 1/\tau_p$ 时推出的，因此上面所得的空间平均力 $\bar{f}(v)$ 只适用于 $kv \ll 1/\tau_p$ 的范围，而不适用于 $v_p = 1/(4k\tau_p)$ 的情形. 为此我们再来讨论速度范围 $kv \ll \Gamma$(这一条件是我们在推导光学布洛赫方程时忽略 $P^2/(2m)$ 的出发点)的情形. 由于激光场很弱时，即 $\Omega \ll \Gamma$ 时，$s_0 \ll 1$，因此由 $kv \ll \Gamma$ 描述的原子速度范围比 $kv \ll 1/\tau_p$ 的范围要大得多. 在这种情况下，需要根据(3.7.45)，(3.7.46)式求解 ρ_{55}，ρ_{66}. 注意到

$$\frac{d}{dt}\rho_{55}=v\frac{d}{dz}\rho_{55}=-\frac{1}{\tau_p}(\rho_{55}-\sin^2 kz) \tag{3.7.74}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{66}=v\frac{d}{dz}\rho_{66}=-\frac{1}{\tau_p}(\rho_{66}-\cos^2 kz) \tag{3.7.75}$$

利用积分公式

$$\int e^{ax}\sin^2 bx dx = e^{ax}/(2a) - \frac{e^{ax}}{a^2+4b^2}\left(\frac{a}{2}\cos 2bx + b\sin 2bx\right)$$

$$\int e^{ax}\cos^2 bx dx = e^{ax}/(2a) + \frac{e^{ax}}{a^2+4b^2}\left(\frac{a}{2}\cos 2bx + b\sin 2bx\right)$$

不难得到

$$\rho_{55}(z,v)=1/2-\frac{\cos 2kz+2kv\tau_p\sin 2kz}{2(1+4k^2v^2\tau_p{}^2)} \tag{3.7.76}$$

$$\rho_{66}(z,v)=1/2+\frac{\cos 2kz+2kv\tau_p\sin 2kz}{2(1+4k^2v^2\tau_p{}^2)} \tag{3.7.77}$$

将(3.7.76)、(3.7.77)式代入(3.7.48)式得到

$$f(z,v)=\frac{2\hbar k\delta s_0\sin 2kz\cos 2kz+4\hbar k^2v\delta s_0\tau_p\sin^2 2kz}{3(1+4k^2v^2\tau_p{}^2)} \tag{3.7.78}$$

显然上式在 $kv\tau_p\ll 1$ 时与(3.7.63)式是相同的. 对上式作空间周期平均,则得到运动原子所受的空间平均辐射力为

$$\bar{f}(v)=-\frac{\alpha v^2}{1+v^2/v_c{}^2} \tag{3.7.79}$$

式中

$$v_c=1/(2k\tau_p)=\lambda/(4\pi\tau_p) \tag{3.7.80}$$

从(3.7.79)式看到,当 $v=v_c$ 时,$\bar{f}(v)$ 具有最大值

$$f_{max}(v=v_c)=-\alpha v_c/2 \tag{3.7.81}$$

即当原子以速度 $v=v_c$ 运动时,原子在激光场中所受的阻尼力($\delta<0$)最大,我们把这一速率称为原子的临界运动速率. 在一个泵浦时

间里，原子运动的距离为

$$z=v_c\cdot\tau_p=\frac{1}{2k\tau_p}\tau_p=\lambda/(4\pi)\sim\lambda/4 \qquad (3.7.82)$$

显然 v_c 与 v_p 有相同的量级，因此前面对激光冷却原子的物理机制的分析仍然有效.

第三节　关于激光致冷的极限温度

随着激光致冷技术的发展，人们期望使原子冷却到尽可能接近于绝对零度的低温状态.理论上可预言激光冷却原子的极限温度量级，然而它的正确与否要看与实验结果相符的程度判定.近年来，激光致冷技术的发展不断降低极限温度的量级，从而促进理论的发展.现在我们首先根据上述的量子理论，研究激光致冷的极限温度问题.

一、激光场作用下原子动量的扩散

上面我们讨论了激光场冷却原子的过程，然而原子在与激光场的相互作用过程中，它的动量也存在扩散，因而存在原子被激光场加热的过程.对于这里讨论的原子-光场耦合系统而言，导致原子动量的扩散主要有三个方面的原因：第一是如前一节所述，由于原子在真空起伏作用下发射的荧光光子具有随机性，由荧光光子给原子的反冲动量就会有起伏，因而会导致原子的动量扩散；第二是原子在激光场作用下，从每一个激光场分别吸收的光子数的差值也具有起伏，从而导致原子的动量发生扩散；第三是由于在光泵浦过程中有自发发射过程的参入，因而原子的瞬时偶极力 f 以泵浦速率 $1/\tau_p$ 在 $f_{1/2}(z)$ 和 $f_{-1/2}(z)$ 之间来回振动时具有随机性，使得 f 具有一定的起伏，从而导致原子的动量扩散.下面我们来具体讨论这三种过程对原子动量扩散系数

$$D_p=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\langle \boldsymbol{P}^2\rangle-\langle \boldsymbol{P}\rangle^2]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Delta P)^2 \qquad (3.7.83)$$

的影响.

为分析第一、二两种扩散过程对原子动量扩散系数的影响，我们先来看在一个较为简单的情况下这两种过程对 D_p 的贡献，借以估计 $J_g=1/2\longleftrightarrow J_e=3/2$ 原子在两线偏振激光场作用下，这两种扩散过程对 D_p 贡献的量级.

这里考虑一个基态角量子数 $J_g=0$、激发态角量子数 $J_e=1$ 的原子(如图 3.7.6 所示)，在振幅相等、相向传播并且偏振方向分别为 σ^- 和 σ^+ 的两行波场中运动. 原子从基态吸收光子跃迁到激发态的某一子能级后，例如原子在 $|g_0\rangle$ 吸收一个 σ^+ 光子跃迁到 $|e_1\rangle$ 后，原子可以在激光场作用下受激发射一个 σ^+ 光子回到基态 $|g_0\rangle$. 在这一吸收-受激发射光子过程中，原子的动量不发生改变. 同时处在激发态 $|e_1\rangle$ 的原子也可以在真空辐射场的作用下自发发射一个动量为 $\hbar\boldsymbol{k}'$ 的荧光光子，在这一吸收-自发发射过程中，原子的动量发生了变化. 假设原子在 ΔT 时间内，将 σ^+ 光场中的 N_+ 个光子转化为 N_+ 个荧光光子，将 σ^- 光场中的 N_- 个光子转化为 N_- 个荧光光子，则原子的动量改变值为

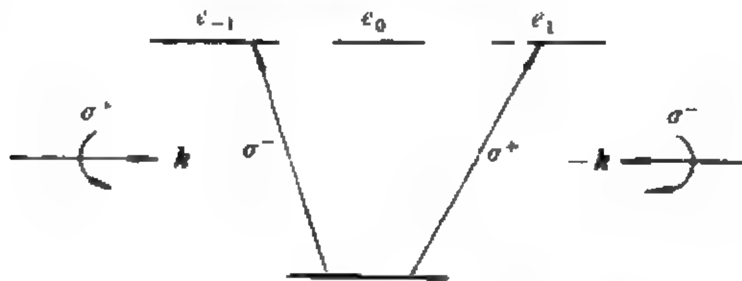


图 3.7.6 $J_g=0\longleftrightarrow J_e=1$ 的原子跃迁过程与圆偏振光的作用

$$\Delta\boldsymbol{P}=(N_+-N_-)\hbar\boldsymbol{k}-\sum_{i=1}^{N_++N_-}\hbar\boldsymbol{k}_i \tag{3.7.84}$$

上式的第一项表示原子净吸收 N_+ 个 σ^+ 个光子、N_- 个 σ^- 光子后，原子的动量发生的改变，第二项则表示原子发射 (N_++N_-) 个荧光光子后原子动量的变化，这里 $\hbar\boldsymbol{k}_i$ 为第 i 个荧光光子的动量. 由于荧光光子在动量空间里是各向同性的，因此 $\boldsymbol{k}_i$ 的平均值 $\overline{\boldsymbol{k}}_i=0$；再加上激光场的振幅相等，所以 N_+ 和 N_- 的平均值相等，即 $\overline{N}_+=$

$\overline{N}_-$，从而 ΔP 的平均值为

$$\overline{\Delta P} = (\overline{N}_+ - \overline{N}_-)\hbar \boldsymbol{k} - \sum_{i=1}^{\overline{N}_+ + \overline{N}_-} \hbar \boldsymbol{k}_i = 0 \qquad (3.7.85)$$

即原子的动量改变量的平均值为零. 而 ΔT 时间内原子动量的涨落值 $\Delta \boldsymbol{P}^2$ 为

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{P}^2 &= \Big[(N_+ - N_-)\hbar \boldsymbol{k} - \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar \boldsymbol{k}_i\Big]^2 \\ &= (N_+ - N_-)^2\hbar^2 \boldsymbol{k}^2 + \Big(\sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar \boldsymbol{k}_i\Big)^2 \\ &\quad -2(N_+ - N_-)\hbar \boldsymbol{k} \cdot \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar \boldsymbol{k}_i \end{aligned} \qquad (3.7.86)$$

对上式作平均，则

$$\overline{(\Delta \boldsymbol{P})^2} = \overline{(N_+ - N_-)^2}\hbar^2 \boldsymbol{k}^2 + \overline{\Big(\sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar \boldsymbol{k}\Big)^2} \qquad (3.7.87)$$

注意到各个荧光光子的动量是统计独立的，所以

$$\begin{aligned}\overline{\Big(\sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar \boldsymbol{k}_i\Big)^2} &= \overline{\sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar^2 \boldsymbol{k}^2} + 2\overline{\sum_{i \neq j}^{N_+ + N_-} \hbar^2 \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{k}_j} \\ &= \overline{(N_+ + N_-)}\hbar^2 \boldsymbol{k}^2 \end{aligned} \qquad (3.7.88)$$

从而

$$\overline{(\Delta \boldsymbol{P})^2} = \overline{(N_+ - N_-)^2}\hbar^2 \boldsymbol{k}^2 + \overline{(N_+ + N_-)}\hbar^2 \boldsymbol{k}^2 \qquad (3.7.89)$$

那么动量扩散系数为

$$\begin{aligned} D'_p = \overline{(\Delta \boldsymbol{P})^2}/(2\Delta T) &= \frac{1}{2}\hbar^2 \boldsymbol{k}^2 \frac{\overline{N_+ + N_-}}{\Delta T} \\ &\quad + \frac{1}{2}\hbar^2 \boldsymbol{k}^2 \frac{\overline{(N_+ - N_-)^2}}{\Delta T} \end{aligned} \qquad (3.7.90)$$

上式第一项中的 $\overline{(N_+ + N_-)}/\Delta T$ 表示荧光光子的发射率 R，由第二篇第三章知，它满足

$$R = \Gamma s_0 \qquad (3.7.91)$$

因此(3.7.90)式中第一项描述的是，由真空起伏所引起的荧光发射造成原子动量的扩散对动量扩散系数的贡献，即

$$D_{\mathrm{Pvac}}=\frac{1}{2}\hbar^2 k^2\Gamma s_0 \qquad (3.7.92)$$

需要指出的是，这里我们没有考虑荧光光子的偏振分布对 D_{Pvac}的影响，可以证明，如果考虑荧光光子偏振分布的影响，则扩散系数 D_{Pvac}变成

$$D_{\mathrm{Pvac}}=\frac{1}{5}\hbar^2 k^2\Gamma s_0 \qquad (3.7.93)$$

这一点的证明可以参看本章后面所列的文献[3,5,11].

下面我们再来讨论(3.7.90)式中右边第二项对 D_{p}的贡献. 这一项描述的是原子在两个激光场中分别吸收光子的差值的涨落. 注意到两激光场的偏振方向没有关联，并且由于两激光场的幅度相同，且原子-光场的耦合程度相同，因此原子在态 $|g_0\rangle$ 吸收 σ^+ 光子和 σ^- 光子的概率是相等的. 所以在原子从两个激光场中共吸收 $N_+ + N_-$ 个激光光子，并在真空起伏的诱导下，把它们转化成 $N_+ + N_-$ 个荧光光子的过程中，原子吸收 N_+ 个 σ^+ 光子和 N_- 个 σ^- 光子的概率 $P(N_+, N_-)$ 与吸收 $N_+ + N_-$ 个激光光子的概率 $P(N_+ + N_-)$之间的关系为

$$P(N_+,N_-)=\frac{(N_+ + N_-)!}{2^{N_+ + N_-}\,N_+!\;N_-!}P(N_+ + N_-) \qquad (3.7.94)$$

利用上式，且令 $N=N_+ + N_-$，则

$$\begin{aligned}\overline{(N_+ - N_-)^2} &= \sum_{N_+=0}^{\infty}\sum_{N_-=0}^{\infty}(N_+ - N_-)^2 P(N_+,N_-)\\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N_-=0}^{N}(N-2N_-)^2\frac{N!}{2^N(N-N_-)!\,N_-!}P(N)\\ &= \sum_{N=0}^{\infty}[N^2-2N^2+N(N-1)+2N]P(N)\\ &= \overline{N_+ + N_-} \qquad (3.7.95)\end{aligned}$$

这里利用了二项式定理：

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}n!/[k!(n-k)!]$$

把(3.7.95)式代入(3.7.90)式的第二项可知，原子从两激光场中吸收光子之差的涨落造成的原子动量扩散对原子动量扩散系数的贡献为

$$D_{\text{Pdif}}=\frac{1}{2}\hbar^2 k^2\Gamma s_0 \tag{3.7.96}$$

从而两种扩散过程对原子动量扩散系统的总贡献为

$$D'_{\text{P}}=D_{\text{Pdif}}-D_{\text{Pvac}}=\frac{7}{10}\hbar^2 k^2\Gamma s_0 \tag{3.7.97}$$

需要说明的是，虽然我们讨论的是 $J_g=1/2\longleftrightarrow J_e=3/2$ 的准二能级原子，但由于它可以近似看作是两个 $J_g=0\longleftrightarrow J_e=1$ 原子的叠加，因此前面两种扩散过程对 $J_g=1/2\longleftrightarrow J_e=3/2$ 的准二能级原子动量扩散系数的贡献与 D'_{P}具有相同的量级. 作为近似，这里仍用 D'_{P}(3.7.97)式表示 $J_g=1/2\longleftrightarrow J_e=3/2$ 原子的前两种动量扩散过程的扩散系数.

现在再来讨论导致原子动量扩散的第三个因素，即瞬时力 f 的随机性对原子动量扩散的影响. 首先我们分析一下瞬时力 f 的随机性质. 处于空间某一给定点 z 的原子(即认为原子静止在 z点)，当原子处在态$|g_{1/2}\rangle$时，它受到力$-\nabla E_{1/2}$的作用(如图3.7.7所示). 由于光泵浦过程中有自发发射过程参入，因此原子在吸收一个 σ^+光子后，将在一随机时刻内通过自发发射一个荧光光子而衰变到态$|g_{-1/2}\rangle$. 在这一基态子能级上，原子受到$-\nabla E_{-1/2}=\nabla E_{1/2}$的力的作用. 接下来，原子又会吸收一个$\sigma^-$光子在一随机时刻被泵浦到态$|g_{1/2}\rangle$，…，这表明，原子所受的瞬时力是以随机时间间隔在$-\nabla E_{-1/2}$和$-\nabla E_{1/2}$间振荡. 如果让$\bar{\tau}_1$和$\bar{\tau}_2$分别表示原子在$|g_{1/2}\rangle$和$|g_{-1/2}\rangle$态停留的随机时间间隔的平均值，那么原子所受的平均力为

$$f=-\nabla E_{1/2}\frac{\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2}-\nabla E_{-1/2}\frac{\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2} \tag{3.7.98}$$

显然，$\bar{\tau}_1/(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)$和$\tau_2/(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)$就是原子在态$|g_{1/2}\rangle$和$|g_{-1/2}\rangle$的稳

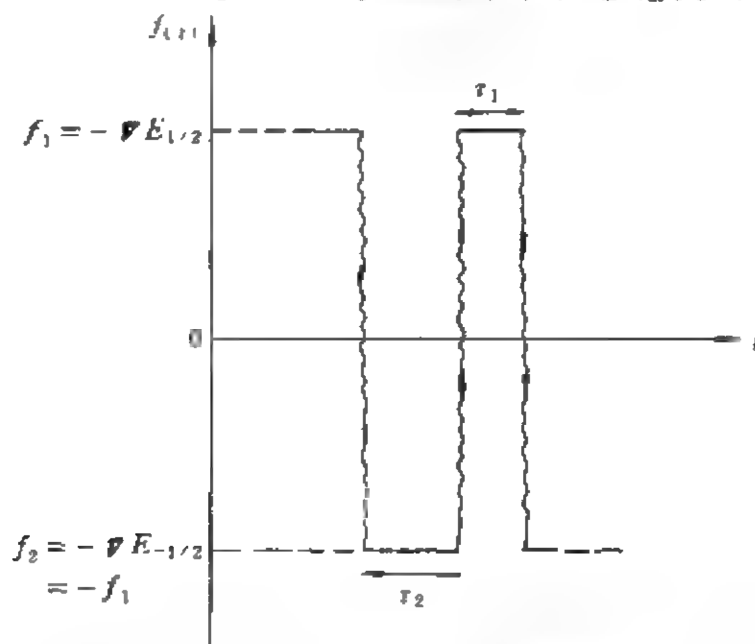


图 3.7.7 瞬时偶极力 f 的随机性质

态粒子布居概率.

下面来研究原子所受的瞬时随机力 f 的涨落对原子动量扩散系数的贡献. 由(3.7.83)式即 $f=\frac{dp}{dt}$可知

$$D''_p=\langle p\cdot f\rangle-\langle p\rangle\cdot\langle f\rangle=\int_{-\infty}^{0}dt[\langle f(t)\cdot f(0)\rangle$$
$$-\langle f(t)\rangle\cdot\langle f(0)\rangle]$$

上面应用了 $P(0)=\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$，并且已假设这里所讨论的随机过程是一平稳过程. 进一步简化上式，得

$$D''_p=\int_{0}^{\infty}dt[\langle f(0)f(t)\rangle-\langle f\rangle^2]$$
$$=\int_{0}^{\infty}d\tau[\langle f(\tau)f(t+\tau)\rangle-\langle f\rangle^2] \qquad (3.7.99)$$

这样就把问题转化为求解双时关联函数 $f(t)f(t+\tau)$的期望值. 利用(3.7.59)式及概率论知识，可得在点 z 处的双时关联函数为

$$\langle f(t)f(t-\tau)\rangle=\sum_{i=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\sum_{j=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}f_if_jP(i,t;j,t+\tau)$$
$$(3.7.100)$$

也就是说，双时关联函数的值，等于原子在基态子能级$|i\rangle$和$|j\rangle$ ($i,j=1/2,-1/2$)所受的力之积f_if_j以t时刻原子处在态$|i\rangle$并且在$t+\tau$时刻处在态$|j\rangle$的概率值$P(i,t;j,t+\tau)$为权重的平均值. 在稳态情况下，概率值$P(i,t;j,t+\tau)$仅与τ值有关，它满足

$$P(i,t;j,t+\tau)=P_iP(j,\tau/i,0) \qquad (3.7.101)$$

这里P_i是原子在态$|i\rangle$的稳态布居概率，即

$$P_{1/2}=\rho_{55}^{st}, \quad P_{-1/2}=\rho_{66}^{st} \qquad (3.7.102)$$

$P(j,\tau/i,0)$是条件概率，它反映$t=0$时刻处在态$|i\rangle$的原子在τ时刻处在$|j\rangle$的概率. 由(3.7.45)，(3.7.46)式知，当$\rho_{55}(0)=1$或$\rho_{66}(0)=1$，$\rho_{66}(\tau)$，$\rho_{55}(\tau)$满足

$$\rho_{55}(\tau)=\rho_{55}^{st}+\rho_{66}^{st}\exp(-\tau/\tau_p) \qquad (3.7.103)$$

$$\rho_{66}(\tau)=\rho_{66}^{st}+\rho_{55}^{st}\exp(-\tau/\tau_p) \qquad (3.7.104)$$

那么在$t=0$时刻处于态$|i\rangle$的原子在τ时刻处于态$|j\rangle$的条件概率为

$$P\left(\frac{1}{2},\tau/\frac{1}{2},0\right)=\rho_{55}(\tau) \qquad (3.7.105)$$

$$\begin{aligned}P\left(-\frac{1}{2},\tau/\frac{1}{2},0\right)&=1-P\left(\frac{1}{2},\tau/\frac{1}{2},0\right)=1-\rho_{55}(\tau)\\&=\rho_{66}^{st}-\rho_{66}^{st}\exp(-\tau/\tau_p)\end{aligned} \qquad (3.7.106)$$

$$P\left(-\frac{1}{2},\tau/-\frac{1}{2},0\right)=\rho_{66}(\tau) \qquad (3.7.107)$$

$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{2},\tau/-\frac{1}{2},0\right)&=1-P\left(-\frac{1}{2},\tau/-\frac{1}{2},0\right)=1-\rho_{66}(\tau)\\&=\rho_{55}^{st}-\rho_{55}^{st}\exp(-\tau/\tau_p)\end{aligned} \qquad (3.7.108)$$

将(3.7.102)，(3.7.105)—(3.7.108)式一并代入(3.7.100)式，得

$$\langle f(t)f(t+\tau)\rangle=(f^{st})^2+4(f_{1/2})^2\rho_{55}^{st}\rho_{66}^{st}\exp(-\tau/\tau_p) \qquad (3.7.109)$$

再将(3.7.109)式代入(3.7.99)式,并利用(3.7.57)及(3.7.43),(3.7.44)式,得到瞬时力的随机振荡对原子动量扩散系数的贡献为

$$D''_p = \int_0^\infty 4(f_{1/2})^2 \rho''_{55}\rho''_{66}\exp(-\tau/\tau_p)d\tau$$

$$= 2\hbar^2 k^2\delta^2 s_0\sin^4(2kz)/\Gamma \qquad (3.7.110)$$

同计算了一样,我们关心的是在一个波长范围内原子动量的扩散值的大小,因此需对(3.7.110)式作空间平均,即

$$\overline{D''_p} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda D''_p dz = \frac{3}{4}\hbar^2 k^2 \frac{\delta^2}{\Gamma}s_0 \qquad (3.7.111)$$

这样我们就得到了瞬时力在空间周期平均下对原子动量扩散的影响.因而原子的总扩散系数为

$$D_p = D'_p + \overline{D''_p} = \frac{7}{10}\hbar^2 k^2\Gamma s_0 + \frac{3}{4}\hbar^2 k^2 \frac{\delta^2}{\Gamma}s_0 \quad (3.7.112)$$

当$|\delta| \gg \Gamma$时,$D'_p \ll \overline{D''_p}$.因此在这种情况下,对原子动量扩散有主要贡献的是$\overline{D''_p}$,即

$$D_p \approx \overline{D''_p} = \frac{3}{4}\hbar^2 k^2 \frac{\delta^2}{\Gamma}s_0 \qquad (3.7.113)$$

二、激光冷却原子的热平衡温度

由于激光场对原子既有冷却作用,同时又有因动量起伏而导致的加热作用,那么这两种作用在什么情况下会达到热平衡呢?换句话说,对于这里讨论的系统,原子被冷却的最低温度是多少呢?下面就来讨论这一问题.

一方面激光场对原子的阻尼力 $f = -\alpha v$ 使得原子的动能减少,其变化率为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{cool} = fv = -\alpha v^2 \qquad (3.7.114)$$

另一方面,动量的扩散使得原子的动能增加,其变化率为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{heat}}=\frac{1}{2M}\frac{d\langle P^2\rangle}{dt}=\frac{1}{2M}\frac{d}{dt}(\Delta P)^2=D_P/M \qquad (3.7.115)$$

这里已考虑到稳态时$\frac{d\langle P\rangle^2}{dt}=0$. 在激光场-原子相互作用时间足够长以后，激光场对原子的冷却和加热两种过程达到热平衡. 此时原子动能的变化率为 0，即

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{cool}}+\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{heat}}=-\alpha v^2+D_P/M=0$$

由此可得

$$Mv^2=D_P/\alpha \qquad (3.7.116)$$

注意到

$$E_k=Mv^2/2=k_BT/2 \qquad (3.7.117)$$

从而可得激光冷却原子的热平衡温度也就是激光致冷的最低冷却温度 T_D满足如下等式：

$$k_BT_D=D_P/\alpha \qquad (3.7.118)$$

在$|\delta|\gg\Gamma$时，这一温度为

$$T_D\approx\hbar|\delta|s_0/(4k_B)\approx\hbar\Omega^2/(8|\delta|k_B) \qquad (3.7.119)$$

可见冷却温度与原子-激光场的失谐量 δ 以及激光场的强度（与 Ω 成正比）明显相关. 在激光场强度给定时（即 Ω 一定时），原子的冷却温度随着失谐量$|\delta|$的增大而降低；另一方面，当失谐量一定时，若激光场强度降低，原子的冷却温度也随之降低. 现代的实验已很好地证实了这些结论[8].

应该补充说明的一点是，(3.7.119)式所示的最低温度 T_D也是有一定限度的. 因为它受到这里的理论处理方法的限制. 由(3.7.79)式知，在 $v>v_c$时，原子所受的阻尼力就不与 v 成线性关系，(3.7.119)式则是在与 v 满足线性关系的条件下推出的，它要求达到热平衡时，原子的平均速度要远小于 v_c，而保证 f 与 v 成线

性关系，所以要求

$$v_c \gg v_{rms}, \quad \Omega \gg \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{M} \frac{|\delta|^3}{\Gamma^2}} \qquad (3.7.120)$$

这也就是给激光场的强度的下限作了一个限制. 因此原子平均速度的最低值为

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{\hbar \Omega^2}{8M|\delta|}} \gg \frac{\hbar k}{2\sqrt{2}M} \frac{|\delta|}{\Gamma} \qquad (3.7.121)$$

上式表明，在$|\delta| \gg \Gamma$时，原子的热平衡平均速率要大于原子的单光子反冲速率$\hbar k/M$，因而也就限定了激光致冷的最低极限温度T_D. 不过由(3.7.119)和(3.7.121)式所限定的最低冷却温度T_D比第一节中论述的多普勒极限温度T_D要低得多，与实验结果也相符得更好. 例如法国巴黎的研究小组对Ce原子作了实验[17]，他们得到Ce原子的温度为2.5±0.6μk，这种冷却温度所对应的热运动速度仅为原子发射单个光子的反冲速度的几倍. 可见上述理论结论与实验结果符合得相当好.

三、利用速度选择相干态布居捕获实现原子冷却的极限温度

从上述激光致冷的量子理论可以看出，冷却原子的最低温度T_D受到自发发射光子反冲动量引起的动量扩散的限制，原子的最低热平衡速度不能小于单光子反冲速率$\hbar k/M$. 然而有没有办法使原子冷却到速度为零的状态呢？显然要达到这种状态，只能设法使原子处于不进行自发发射的状态. 那么是否有这种可能性呢？从理论上讲，如果能使激光场作用下的原子处于本篇第三章中所述的相干捕获态，那么在那种情况下，原子与激光场的相互作用，只使原子在构成相干捕获态的叠加态能级间振荡. 一旦原子被泵浦进入这样的相干捕获态，原子就不再辐射荧光光子. 因而也就不会有光子反冲动量起伏，所以原子的速度将会减小到极低.

最近，巴黎的Cohen-Tannoudji小组[16]就是基于这一观点，

提出速度选择的相干布居捕获的原子冷却方案,并在实验上[9]实现了冷却极限温度低于 2μK,即原子热运动速度达到低于发射单光子反冲动量的速度界限. 他们还证明,只有速度为零的原子才有可能处于相干捕获态,而速率 $v \neq 0$ 的原子仍可以吸收和发射光子,v 越大,它吸收光子的概率也越大. 当原子被冷却到速度很低的情况下,虽然初始时,$v \neq 0$ 的原子可以吸收光子,但它自发发射光子以后,由于反冲效应,原子动量要重新分布,但总有一定的可能性使原子的速度分布至 $v=0$,而被囚禁于不吸收光子的相干捕获态上. 此后原子"躲藏"起来,既不吸收光子也不发射荧光. 通过一段相互作用时间 Θ 以后,就有不少原子在 $v=0$ 附近堆积起来. 在 $v=0$ 的很窄的速度分布 δv 范围内,总有一些原子通过与激光场的相互作用,即通过吸收激光光子然后发射荧光光子的过程而被囚禁到 $v=0$ 的相干捕获态. 在相互作用时间 Θ 区间内,只有吸收光子概率与 Θ 的乘积小于 1 的原子才可能被捕获. 由于吸收光子的概率与原子速度 v 成正比,所以 Θ 越大,保留原子的速度 v 越小,可见,只要使相互作用的时间 Θ 足够长,用这种方法冷却的原子,速度就能无限趋近于零. 最近,实验上已应用激光将原子的温度冷却到 10^{-12}K 的量级,它远小于单光子反冲速度,可见原子的平均速度已接近于零了.

上面我们对应用速度相干态布居捕获冷却原子的方案只作了定性的论述,详细的论述可参阅本章后面所列的有关文献. 这里我们还想说明的一点是,近年来有关激光致冷技术及相关应用的研究进展是很快的,相应的理论研究也在不断发展和深化. 除本章介绍的激光致冷的基本量子理论描述以及冷却方案以外,还有一些不同的理论处理和冷却方案. 例如美国纽约州立大学的研究组和斯坦福大学的研究组,就分别提出了"磁感应冷却机制"和"拉曼跃迁速度选择"等方案,由于它们的基本物理机理与本章所述是一致的,所以这里不再赘述. 有兴趣的读者可参阅本章后面所列的参考文献.

参 考 文 献

[1] D. Wineland and W. Itano, *Phys. Rev.*, **A20**, 1521, (1979).

[2] J. P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev.*, **A21**, 1606 (1980).

[3] V. S. Letokov and V. G. Minogin, *Phys. Rev.*, **73**, 1 (1981).

[4] J. Dalibard, S. Reynaud and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys.*, **B17**, 4577 (1984).

[5] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys.*, **B18**, 1661 (1985).

[6] S. Stenholm, *Rev. Mod. Phys.*, **58**, 699 (1986).

[7] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1688 (1986).

[8] P. Lett, R. Watts, C. Westbrook, W. D. Phillips and H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 169 (1988).

[9] A. Aspect, E. Arimodo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 826 (1988).

[10] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**, 2023 (1989).

[11] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis and S. Chu, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**, 2058 (1989).

[12] Y. Castin, H. Wallis and J. Dalibard, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**, 2046 (1989).

[13] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kalser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**, 2112 (1989).

[14] Y. Castin and K. Molmer, *J. Phys.*, **B23**, 4101 (1990).

[15] Y. Shevy, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 2905 (1990).

[16] C. Cohen-Tannoudji and W. D. Phillips, *Phys. Today*, **33** (Oct. 1990).

[17] C. Salomon, J. Dalibard, W. Philips, A. Clairon and S. Gurllati, *Europhys. Lett.*, **12**, 683 (1990).

[18] P. R. Berman, *Phys. Rev.*, **A43**, 1470 (1991).

[19] S. Q. Shang, B. Sheehy, H. Metcalf, P. van der Straten and G. Nienhuis, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 1094 (1991).

[20] T. W. Mossberg, M. Lewenstein and D. J. Gauthier, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 1723 (1991).

[21] A. Aspect, *Phys. Rep.*, **219**, 141 (1992).

[22] C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rep.*, **219**, 153 (1992).

[23] J. Chan, J. G. Story, J. J. Tollett and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1344 (1992).

[24] W. Ketterle, A. Martin, M. A. Joffe and D. E. Pitchard, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2483 (1992).

[25] A. M. Steane, G. Hillenbrand and C. J. Foot, *J. Phys.*, **B25**, 4721 (1992).
[26] V. Finkelstein, J. Guo and P. R. Berman, *Phys. Rev.*, **A46**, 7108 (1992).
[27] J. Y. Courtois and G. Grynberg, *Phys. Rev.*, **A46**, 7060 (1992).
[28] J. Dalibard, Y. Castin and K. Molmer, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 580 (1992).
[29] E. Korsunsky, D. Kosachiov, B. Matisov, Yu. Rozhdestvensky, L. Windholz and C. Neureiter, *Phys. Rev.*, **A48**, 1419 (1993).
[30] J. Guo and P. R. Berman, *Phys. Rev.*, **A48**, 3225 (1993).

索　引

（按汉语拼音次序排列）

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

O

P

Z